République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama –Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Chapitre 5 : Les équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et 2

Mathématiques 2 (L1 ST-SM)

Semestre 2-2021-2022

Présenté par Leila Slimane

Table des matières

0.1 Équations différentielles ordinaires :

Définition 0.1.1 *Une équation différentielle ordinaire (E.D.O) d'ordre n est une relation entre une fonction inconnue $y(x)$ d'une seule variable réelle x, ses dérivées $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ et la variable indépendante de la forme :*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (E)$$

(ou tout simplement $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$) où F est une fonction continue.

- L'ordre n de l'équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée apparaissant dans l'équation.
- L'équation différentielle est dite ordinaire si elle comporte une seule variable indépendante.
- Si la fonction Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) est dite scalaire.
- Si la fonction Y est à valeurs dans $\mathbb{R}^P$, l'équation (E) est dite vectorielle.

Exemple 0.1.1
1. *$x^3y' + y^2 - 7 = 0$ est une équation différentielle ordinaire du premier ordre.*
2. *$y'' + (5x^6 + 8)y' - 5y = x$ est une équation différentielle ordinaire du second ordre.*
3. *$y^{(4)} + (7 \sin x)y' + x^3y^2 = 0$ est une équation différentielle ordinaire du troisième ordre.*

Définition 0.1.2 *On appelle solution de (E) sur I, ou intégrale de (E) sur I, toute fonction φ définie sur un intervalle ouvert I admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n et telle que :*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \qquad (E).$$

Résoudre (E) dans I, c'est trouver l'ensemble de ses solutions dans I. Une équation pouvait posséder une infinité de solutions.

Exemple 0.1.2 *Considérons l'équation différentielle :*

$y' = 2xy + 4x$. *La fonction* $y(x) = k\exp(x^2)$ *est bien une solution de cette équation sur* $\mathbb{R}$, *ceci quel que soit* $k \in \mathbb{R}$.

Cas particulier : $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$.

Les solutions de cette équation sont les primitives de la fonction f.

0.2 Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation du type :

$$F(x, y, y') = 0 \Leftrightarrow y' = f(x, y).$$

On distingue les types suivants :

1. Équations à variables séparables : $f(y)y' = g(x)$.
2. Équations homogènes $y' = f(\frac{y}{x})$.
3. Équations linéaires : $y' + f(x)y = g(x)$.
4. Équations différentielles de Bernoulli : $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

0.2.1 Équations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à variables séparables si on peut l'écrire sous la forme :

$$f(y)y' = g(x).$$

On a :

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow (f(y)y' = g(x) \Leftrightarrow f(y)dy = g(x)dx.$$

On intègre alors chacun des cotés en considération les variables indépendantes :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Exemple 0.2.1 *Considérons l'équation différentielle :* $\sqrt{1-x^2}y'y^2 = 1$.

Elle est équivalente à :

$$y'y^2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

qui est une équation à variables séparables. En intégarant on trouve :

$$\int y^2 dy = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \arcsin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3\arcsin x + 3C}.$$

Exemple 0.2.2 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{6x^2}{2y+\cos y} \qquad (1)$$

et trouver la solution qui vérifie la condition initiale $y(1) = \pi$.

L'équation (1) est équivalente à :

$$(2y + cosy)dy = 6x^2 dx$$

$$\int (2y + cosy)dy = \int 6x^2 dx$$

$$y^2 + \sin y = 2x + C. \qquad (2)$$

Le solution est donné d'une manière implicite.

La condition initiale est $y(1) = \pi$, *on remplace* $x = 1$ *et* $y = 1$ *dans l'équation (2) on trouve :*

$$\pi^2 + \sin \pi = 2 + C \Rightarrow C = \pi^2 - 2.$$

Par la suite la solution est donné implicitement par : $y^2 + \sin y = 2x + \pi^2 - 2$.

0.2.2 Équations homogènes

Définition 0.2.1 *Une équation différentielle est dite homogène si on peut l'écrire sous la forme suivante :*

$$y' = f(\frac{y}{x}).$$

Afin de résoudre ce type d'équations, on pose : $z = \frac{y}{x}$, soit $y = zx$ et $y' = z'x + z$

Donc :

$$y' = f(\frac{y}{x}) \Leftrightarrow xz' = f(z) - z.$$

Cette équation différentielle est une équations différentielle à variables séparables.

On chercher à résoudre l'équation suivante :

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{1}{x} dx.$$

Exemple 0.2.3 *Considérons l'équation homogène suivante :*

$$y' = \exp(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x} ....(1)$$

Passons aux changement de variables :

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z + xz.$$

Remplaçant en (1) on obtient :

$$z + xz' = \exp(z) + z \Rightarrow xz' = \exp(z) \Rightarrow z' \exp(-z) = \frac{1}{x}.$$

En intégrant on obtient : $\int \exp(-z)dz = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\exp(-z) = \ln|x| + C$,

ce qui est équivalent à : $\exp(-z) = \ln \frac{K}{|x|}$. *Par la suite :* $y = -x \ln(\ln \frac{K}{|x|})$.

0.2.3 Équations différentielles linéaires

Nous nous intéréssons ici aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 0.2.2 *Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle s'écrit de la forme :* $$y' + f(x)y = g(x),$$
(i.e. elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y') où f et g sont des fonctions réelles définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Équations différentielles linéaires homogènes

Définition 0.2.3 *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle du premier ordre homogène du premier ordre est une équation différentielle de la forme :*

$$y' + f(x)y = 0. \qquad (E_H)$$

Remarque 0.2.1 *La fonction nulle est solution de l'équation différentielle du premier ordre homogène (E_H).*

L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle (E_H) sur I est donné par :

$$S_H = \{y, \text{ tel que } y(x) = C\exp(-F(x)),\ \ C \in \mathbb{R}\}$$

où F désigne une primitive de F sur I *i.e.* :

$$F(x) = \int f(x)dx, \qquad y(x) = C\exp(-\int f(x)dx).$$

Exemple 0.2.4 *Soit l'équation différentielle homogène du premier ordre :*

$$y' + \tfrac{5}{1+x^2}y = 0.....(E_H)$$

On a : $(E_H) \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{1+x^2}y \Leftrightarrow y' = C\exp(-\int \frac{5}{1+x^2}dx)$

$$\Leftrightarrow y = C\exp(-5\arctan(x)).$$

Donc :

$$S_H = \{y,\ \textit{tel que}\ y(x) = C\exp(-5\arctan(x)),\ \ C \in \mathbb{R}\}.$$

Équations différentielles linéaires non-homogènes

Considérons l'équation différentielle linéaire non-homogène :

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (E).$$

On appelle équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) l'équation :

$$y' + f(x)y = 0. \qquad (E_H).$$

Proposition 0.2.1 *Soient y_p une solution particulière sur I de l'équation différentielle linéaire (E) et (y_H) les solutions de l'équation différentielle (E_H) sur I. L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle (E) sur I est donné par :*

$$S = \{y,\ \ y = y_H + y_p\}.$$

Exemple 0.2.5 *Considérons l'équation :* $y' - xy = -x^3 \quad (E)$.

Vérifier que $y_p = x^2 - 2$ est une solution particulière de (E) et déduire les solution de (E).

On a $y_p' = 2x$, remplaçant dans (E) on trouve :

$$2x - x(x^2 - 2) = -x^3$$

Donc y_p est bien une solution particulière de (E).

L'équation homogène associé à (E) est :

$$y' - xy = 0$$

Ses solutions sont de la formes : $y_H = C\exp(\frac{1}{2}x^2)$.

Par la suite les solutions de (e) sont :

$$y = y_p + y_H = x^2 - 2 + C\exp(\tfrac{1}{2}x^2).$$

Exemple 0.2.6

0.2.4 Équations différentielles de Bernoull

Définition 0.2.4 *On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme :*

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \;\; \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\},$$

où f et g sont des fonctions continues.

On remarque que si $n = 0$, l'équation de Bernouli n'est qu'une équation linéaire avec second membre

$$y' + f(x)y = g(x),$$

et si $n = 1$ l'équation est équivalente à l'équation linéaire sans second membre :

$$y' + (f(x) - g(x))y = 0.$$

Afin de résoudre l'équation de Bernoulli on l'a ramène avec un changement de variable adéquat à une équation différentielle linéaire avec un second membre.

On a :

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \Rightarrow y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)........(1)$$

Posons : $z = y^{1-\alpha}$. Par la suite : $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$.

Substituons dans l'équation (1) on obtient :

$$z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x) \qquad (2).$$

On constate que l'équation (2) est linéaire, simple à résoudre par la méthode de variations des constantes.

0.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coéfficients constants

Définition 0.3.1 *Une équation diférentielle linéaire du second ordre, à coéfficients constants est une équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* g *est une fonction continue sur un intervalle* I*.*
L'équation :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E)*.*

Théorème 0.3.1 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène* (E_0) *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2*.*

0.3.1 Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ ou $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On a : $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0.$

Définition 0.3.2 *L'équation* $ar^2+br+c = 0$ *est appelée l'équation caractéristique associée à* (E_0)*.*
et $\triangle = b^2 - 4ac$ *est appelé le discriminant caracteristique associé à* (E_0)*.*

Théorème 0.3.2

1. *si* $\triangle > 0$*, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distincts* $r_1 \neq r_2$ *et les solutions de* (E_0) *sont :*

   $$y(x) = \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x), \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *si* $\triangle = 0$*, l'équation caractéristique admet une racine double* r_0 *et les solutions sont :*

   $$y(x) = (\lambda + \mu x) \exp(r_0 x) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *si* $\triangle < 0$*, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjugués* $r_1 = \alpha + i\beta$*,* $r_2 = \alpha - i\beta$ *et les solutions de* (E_0) *sont :*

$$y(x) = \exp(\alpha x)(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)), \qquad où\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 0.3.1 1. *Considérons l'équation différentielle :*

$$y'' + 5y + 6y = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$*, elle possède deux racines réelles distincts* $r_1 = 2, r_2 = 3$*. donc ,pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, la solution est*

$$y(x) = \lambda\exp(2x) + \mu\exp(3x), \qquad où\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *L'équation caractéristique de l'équation*

$$y'' - 6y + 9y = 0$$

est $r^2 - 6r + 9 = 0$*. Le discriminant est nul* $\triangle = 0$ *, donc on a une racine réelle double* $r_0 = 3$ *et par la suite les solutions sont :*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\exp(3x) \qquad où\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *L'équation caractéristique de l'équation*

$$y'' - 2y + 5y = 0$$

est $r^2 - 2r + 5 = 0$*. On a* $\triangle < 0$ *, elle possède deux racines complexes conjugués* $r_1 = 1 + 2i$*,* $r_2 = 1 - 2i$ *et par la suite les solutions sont :*

$$y(x) = \exp(x)(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)), \qquad où\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

0.3.2 *Équations avec second membre (non-homogène)*

Nous traitons maintenant le cas de la présence du second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

Proposition 0.3.1 $$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E).$$

Proposition 0.3.2 *Les solutions générales de l'équation* (E_0) *s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène à une solution particulière de* (E)*.*

Il reste donc à trouver une solution particulière.

On traite le cas suivant :

$g(x) = \exp(\alpha x)P(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, alors on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = x^m \exp(\alpha x)Q(x),$$

ou Q est un polynôme de meme degré que P avec :

- $y_0(x) = \exp(\alpha x)Q(x), \quad (m = 0)$ si α n'est pas une racine de l'équation caracteristique.
- $y_0(x) = x \exp(\alpha x)Q(x), \quad (m = 1)$ si α est une racine simple de l'équation caracteristique.
- $y_0(x) = x^2 \exp(\alpha x)Q(x), \quad (m = 2)$ si α est une racine double de l'équation caracteristique.