Université de Khemis-Miliana — M1-Analyse Mathématiques et Applications

Faculté des Sciences et de la Technologie — Semestre1-2021/2022

Département de Mathématiques et Informatique — 06 février 2022 — Durée :1h

Examen Final - Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice n°1(6 points) :

1. Énoncer le Théorème de Baire.
2. Énoncer le Théorème de Kakutani.
3. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

a) Dans un e.v.n. de dimension infinie la boule unité fermée est compacte pour la topologie forte.

b) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $*\sigma(E', E)$ alors elle converge pour $\sigma(E', E'')$.

c) L'espace E' est séparable si et seulement si E est séparable.

Exercice n°2 (4 points) :

1. Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de E non dense. Montrer que :

$$\exists f \in E' \text{ tel que } F \subset Kerf.$$

2. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que :

$$U := \bigcap_{n\geq 0} U_n \text{ n'est pas un ensemble dénombrable.}$$

Exercice n°3 (4 points) :

Soit E un espace de Banach réflexif et M un s.e.v. fermé.

1. Montrer que M est aussi fermé pour $\sigma(E, E')$.
2. Montrer que B_M la boule unité fermée de M est compacte pour $\sigma(E, E')$.
3. Déduire que M est réflexif.

Exercice n°4 (6 points) :

Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté $G(T)$) le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F,\ y = T(x)\}.$$

1. Montrer que si T est continue alors $G(T)$ est fermé.
2. On suppose maintenant que $G(T)$ est fermé et on munit $E \times F$ par la norme :

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right).$$

Soit l'application linéaire : $P : G(T) \to E$ avec $P(x, Tx) = x$.

i) Montrer que P est une application bijective et continue.

ii) Déduire que l'application P^{-1} est continue.

iii) Conclure que l'application T est continue.

— **Bon courage** —