Université de Khemis-Miliana — M1-Analyse Mathématiques et Applications

Faculté des Sciences et de la Technologie — Semestre1-2020/2021

Département de Mathématiques et Informatique — Septembre2021 — Durée :1h

==

Examen de Rattrapage - Topologie et Analyse Fonctionnelle

==

Exercice n°1(8.5 points) :

1. Énoncer le Théorème de Banach-Steinhaus.

2. Donner un exemple d'une application continue qui n'est pas ouverte.

3. Donner un exemple d'un ouvert pour la topologie forte qui n'est pas ouvert pour la topologie faible.

4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

a) Dans un e.v.n. de dimension infinie les ouverts convexes pour la topologie forte sont des ouverts pour la topologie faible.

b) Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement alors elle ne converge pas fortement.

c) Si E est de dimension infinie, la topologie faible étoile n'est pas séparée.

d) L'inégalité $\|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1$ signifie que l'application identité :

$Id: \ (E, \|\cdot\|_2) \to \ (E, \|\cdot\|_1)$ est continue.

e) Le théorème de Baire est vrai pour tout espace métrique.

Exercice n°2 (5 points) :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un Banach E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites d'éléments de E'.

1. Montrer que la limite faible d'une suite, si elle existe, est unique.

2. Montrer que :

si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$ et si $f_n \to f$ fortement alors $f_n(x_n) \to f(x)$ fortement.

Exercice n°3 (6.5 points) :

1. Soit C un ensemble convexe d'un Banach E. Montrer que si C est fermé pour la topologie forte alors $E \backslash C$ est ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

2. Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. On suppose que :

$$\forall f \in E', \forall \left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suite de } E \text{ avec } x_n \rightarrow 0 \Rightarrow f(Tx_n) \rightarrow 0.$$

   Montrer que T est continue.

— **Bon courage** —