Université de Khemis - Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

M1- Analyse Mathématique et Applications
Semestre 1 - 2020/2021
04/04 /2021 Duréé : 1h

Examen Final - Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice n°1 (7 points) :

1. Énoncer le Théorème de prolongement de Hahn-Banach.
2. Énoncer le Théorème de l'application ouverte.
3. Donner la définition de la topologie faible.
4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux **corrigez-le** :
   a) Tout ouvert de la topologie faible est un ouvert de la topologie faible étoile.
   b) Dans un Banach E si une suite converge faiblement alors elle converge fortement.
   c) Soit F un s.e.v. de e.v.n E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

Exercice n°2 (4.5 points) : Soit E un e.v.n et E' son dual.

1. Soit $x_0 \in E \backslash \{0_E\}$. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $f \in E'$ tel que :
$$\|f\|_{E'} = 1 \qquad et \quad f(x_0) = \|x_0\|_E \quad .$$

2. Montrer que pour tout $x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$ il existe $f \in E'$, tel que $f(x) \neq f(x')$.

Exercice n°3 (8.5 points) :

1. Soit E un espace de Banach et E' son dual. Montrer que la topologie faible $\sigma(E \ , E')$ est séparée.

2. Soit E et F deux espaces de Banach et $T: E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si le graphe de T est fermé alors T est continue**.**

3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X. Montrer que si $X = \bigcup_{n\geq} \mathrm{F}_n$ alors il existe n_0 tel que l'intérieur de F_{n_0} est non vide.

- **Bon Courage** -