UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA, KHEMIS MILIANA
FACULTÉ des SCIENCES et de la TECNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE

Correction de l'examen
Topologie et Analyse Fonctionnelle
semestre1-2020-2021

Exercice 1 : (Aph1 : 7=2+1.5+1.5+1.5+0.5, s17 : 7=1.5+1.5+1.5+1+1+0.5)

1. **Théorème de prolongement de Hahn-Banach** Considérons E un e.v.n. et G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup\limits_{x\in G, \|x\|\leq 1} g(x)$. Alors il existe un prolongement $f \in E'$ de g tel que : $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

2. **Théorème de l'application ouverte** Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors T est une application ouverte, *i.e.*
$$\exists c > 0 : B_F(0, c) \subset T\left(B_E(0, 1)\right).$$

3. a) **Faux** (corr. tout ouvert de la topologie faible étoile est un ouvert de la topologie faible, ou tout ouvert de la topologie faible est un ouvert de la topologie forte).

   b) **Faux** (corr. Dans un Banach E si une suite converge faiblement alors elle converge fortement ou dans un Banach E de dimension finie si une suite converge faiblement alors elle converge fortement).

   c) **Vrai.**

Exercice 2 : (4.5 = 2.5+2)

1) Posons $F = \mathbb{R}x_0$ et définissons sur F l'application $L(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. L'application $L \in F'$. Le théorème de prolongement de Hahn-Banach assure l'existence de $f \in E'$ tel que $f_{|F} = L$ et $\|f\|_{E'} = \|L\|_{F'}$. Donc $f(x_0) = \|x_0\|_E$ et $\|f\|_{E'} = 1$ car $\|L\|_{F'} = 1$. En effet :
$$\|L\|_{F'} = \sup_{y\in F, y\neq 0_E} \frac{|L(y)|}{\|y\|_F} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0} \frac{|L(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|_E} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0} \frac{|\lambda|\|x_0\|_E}{|\lambda|\|x_0\|_E} = 1.$$

2) Si $x_1 \neq x_2$ alors posons $x = x_1 - x_2 \neq 0_E$, il existe d'après la question précédente $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\| \neq 0$. Ceci implique que : $f(x_1 - x_2) \neq 0$. C'est-à-dire $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exercice 3 : (8.5=2.5+3+3)

1) Soit $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. D'après le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) ou directement d'après la deuxième question de l'exercice précédent il existe $f \in E'$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Posons :
$$\varepsilon = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{4},\ V_1 = f^{-1}(]f(x_1)-\varepsilon,\ f(x_1)+\varepsilon[) \text{ et } V_2 = f^{-1}(]f(x_2)-\varepsilon,\ f(x_2)+\varepsilon[).$$

V_1 et V_2 sont des ouverts pour la topologie faible $\sigma(E, E')$

et de plus $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Alors la topologie faible est séparée.

2) Supposons que $G(T)$ est fermé et montrons que T est continue. Munissons E d'une seconde norme définie par :

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F, \quad \forall x \in E.$$

Comme $G(T)$ est fermé, on déduit que $(E, \|\cdot\|_T)$ est un espace complet *i.e. de Banach.* ($G(T)$ est fermé dans l'espace complet $E \times F$, donc il est complet).

D'autre part on a :

$\|x\|_E \leq \|x\|_T.$

Un corollaire du théorème de l'application ouverte entraine que ces deux normes sont équivalentes :

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_T \leq C \|x\|_E .$$

Donc :

$$\forall x \in E : \|Tx\|_F \leq C \|x\|_E ,$$

ce qui veut dire que T est continue.

3) Montrons le par l'absurde. Supposons que $X = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$ et qu'il n'existe pas un tel n_0, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \overset{\circ}{F_n} = \emptyset.$$

Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite de fermés d'interieur vide de l'espace métrique complet (X, d). Le théorème de Baire implique alors que $\underset{n\geq 0}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide. Contradiction avec le fait que $X = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$ (car $\overset{\circ}{X} = X$).