Université de Khemis - Miliana **Module : Topologie et Analyse Fonctionnelle**

Faculté des Sciences et de la Technologie **Master 1 S1-2021-2022**

Département de Mathématiques et Informatique

Série d'exercices N°2

Exercice n°1 :

1. Soit E un e.v. n. et $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que :

$$\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad et \quad f(x_0) = \|x_0\|_E{}^2.$$

2. Soit E un e.v. n . Montrer que pour tout $x \in E$ on a :

$$\|x\|_E = Sup_{L\in E',\ \|L\|_{E'}=1} |L(x)|.$$

Exercice n°2 : Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. $Alors$:

$U \coloneqq \bigcap_{n\geq 0} U_n$ n'est pas un ensemble dénombrable.

Exercice n°3 : Soit E et F deux e.v. n . et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté *G(T)* le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F,\ \ y = T(x)\}.$$

1. Montrer que si T est continue alors *G(T)* est fermé.
2. Montrer que $\|\,.\,\|_1$ définie par $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ est une norme sur E.
3. Supposons que E et F sont des esp. de Banach. Montrer que si *G(T)* est fermée alors E muni de la norme $\|\,.\,\|_1$ est un espace de Banach.

Exercice n°4 : Soit E et F des esp. de Banach et T une application linéaire de E vers F. On suppose que pour toute forme linéaire $l \in F'$, la forme linéaire loT: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Montrer que T est aussi continue.

Exercice n°5 : Soit E un Banach, F un e.v.n et (T_n) une suite de $\mathcal{L}(E, F)$. On suppose que pour tout $x \in E$ la suite $(T_n(x))$ converge vers une limite *T(x).* Alors la suite (T_n) est bornée et : $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.