Université de Khemis - Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Module : Topologie et Analyse Fonctionnelle

Master 1 S1-2021-2022

Série d'exercices N°1

Exercice n°1 : Montrer que dans un espace topologique séparé une union finie de compacts est compacte.

Exercice n°2 : Soient (X, d) un espace métrique compact et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et $l \in X$. On suppose que toute sous-suite convergente de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l . Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l .

Exercice n°3 : Montrer que si une application entre deux espaces métriques est séquentiellement continue en un point alors elle est continue en ce point.

Exercice n°4: Soit (X, d) un espace métrique. Munissons l'espace $X \times X$ de la distance produit :

$$D_\infty\left((x,y),(x',y')\right) = max\left(d(x,x'),d(y,y')\right).$$

Montrer que l'application $d: X \times X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 2.

Exercice n°5: Soient E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Il existe $f \in E'$, tel que

$$f(\,x_0\,) = \|x_0\| \text{ et } \|f\| \leq 1.$$