
Série d'exercices N°1- Matrices - Systèmes d'Equations

Exercice n°1: Soient $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Calculer, quand c'est possible : A+C, B-3A, AC, CA , AB, $(B+A)^t$, $B^t + A^t$, tr(B).

Exercice n°2: Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos a & -\sin a\\ 0 & \sin a & \cos a\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 2a & 10 & 12\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

Exercice n°3 : Soit $a \in IR$ et A la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice n°4 : On donne les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et montrer que :
$$A^2 = 2I - A.$$
2. En déduire que A est inversible.
3. Déduire A^{-1} , l'inverse de A.

Exercice n°5: Soit M la matrice $M_3(IR)$ définie par :

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de M , sa comatrice et l'inverse de M .

2. Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé :

$$\begin{cases} x_1 \qquad -x_3 = m \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 = 2m \end{cases}$$

Exercice n°6: Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ x - y - 2z = -6 \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Exercice n°7 (supplémentaire): Résoudre les systèmes d'équations suivant:

$$1)\ \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} ,\quad 2)\ \begin{cases} x + 3y + 12z = a \\ -x - y + 16z = b \\ \quad -2y + 7z = c \end{cases} ,\quad 3)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases} ,4)\ \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + 2z = -5 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Correction

Exercice n°1 :

- On a $A + C$ n'est pas définie car $dimA = 3 \times 3 \neq \dim C = 3 \times 2$.
- $B - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} -3\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -15 \\ -15 & -1 & -6 \\ -16 & -7 & -4 \end{pmatrix}$
- Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de C donc la matrice AC est bien définie et on a :

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 3 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

- Le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A donc AC n'est pas définie.
- Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc
- AB est bien défini et on a :
- $$AB = \begin{bmatrix} -18 & 18 & 27 \\ -2 & 8 & 12 \\ -6 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$
- $B + A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (B + A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- On sait que $(B + A)^t = B^t + A^t$ donc $B^t + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
- $TrB = b_{11} + b_{22} + b_{33} = 1 + 2 + 3 = 6.$

Exercice n°2:

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

  On a développé en utilisant la deuxième colonne car elle contient plus de zéros.

- $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = cos^2 a + sin^2 a = 1.$

- $\det C = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & 10 & 12 \\ 2a & 1 & 3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ car la troisième colonne est la somme de la première colonne et la deuxième colonne.
- La règle de Sarrus donne un résultat rapide pour cet exemple :

  $\det D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3) - (abc + abc + abc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

Exercice n°3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

1. A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow -1 - a^3 \neq 0 \Leftrightarrow -1 - a^3 \neq 0 \Leftrightarrow a^3 \neq -1$
   $\Leftrightarrow a \neq -1.$

2. Si $a \neq -1$ l'inverse de A existé et elle est donnée par : $A^{-1} = \frac{1}{detA}(A^c)^t$
   où A^cest la comatrice de A donnée par :

$$A^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Alors $A^{-1} = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}$.

Exercice n°4 :

1. On a : $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

D'autre part on a :

$$2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc on a bien : $A^2 = 2I - A.$

2. Par définition on dit que A est inversible s'il existe une matrice B avec

$dim\, A = dimB$ telle que : $AB = I$ (ou $BA = I$).

On a : $A^2 = 2I - A \Leftrightarrow A^2 + A = 2I \Leftrightarrow (A+I)A = 2I \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}(A+I)\right]A = I.$

Donc la matrice A est inversible.

3. Comme $\left[\frac{1}{2}(A+I)\right]A = I$ on déduit que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°5:

1. $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$\det M \neq 0$ donc M est inversible)

2. M^c la comatrice de M est donnée par :

$$M^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de M est donnée par : $M^{-1} = \frac{1}{detM}(M^c)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Le système donné est équivalent à la forme matricielle suivante : $MX = B$ où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$$

Alors : $X = M^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ -2m+1 \\ 4m-1 \end{pmatrix}$

C'est –à-dire : $x_1 = 5m - 1$, $x_2 = -2m + 1$, $x_3 = 4m - 1$.

Exercice n°6:

1. Le premier système est équivalent à : $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -5 \neq 0$ donc le système admet une solution unique. La méthode de Cramer donne :

$$x = \frac{\det A_x}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$y = \frac{\det A_y}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$z = \frac{\det A_z}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2$$

2. Le deuxième système est équivalent à : $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = 20 \neq 0$ donc le système admet une solution unique. La méthode de Cramer donne :

$$x = \frac{\det A_x}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{9}{20}$$

$$y = \frac{\det A_y}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-6}{20}$$

$$z = \frac{\det A_z}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-25}{20}$$