

Série d'exercices N°1- Matrices - Systèmes d'Equations

Exercice n°1: Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer, quand c'est possible : $A+C$, $B-3A$, AC , CA , AB , $(B+A)^t$, $B^t + A^t$, $\text{tr}(B)$.

Exercice n°2: Calculer les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & 10 & 12 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice n°3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice n°4 : On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et montrer que :
 $A^2 = 2I - A$.
2. En déduire que A est inversible.
3. Déduire A^{-1} , l'inverse de A .

Exercice n°5: Soit M la matrice $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de M , sa comatrice et l'inverse de M .
2. Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = m \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2m \end{cases}$$

Exercice n°6: Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ x - y - 2z = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Exercice n° 7: Résoudre les systèmes d'équations suivant:

$$1) \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x + 3y + 12z = a \\ -x - y + 16z = b \\ -2y + 7z = c \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases}, 4) \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + 2z = -5 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$