Fonctions à plusieurs variables
Correction de la série N°3.

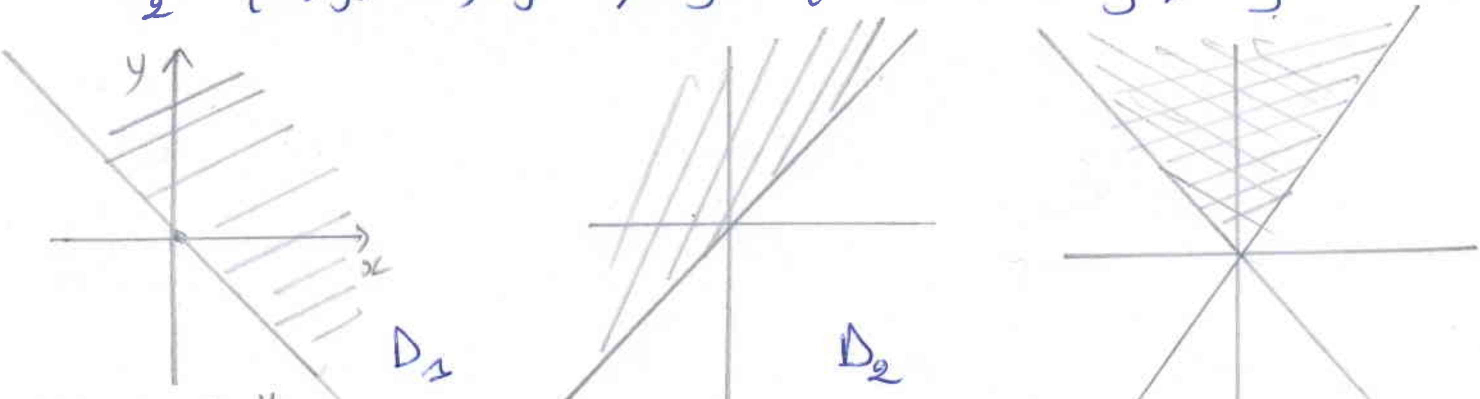
Ex 1 : a) $g(x) = \dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{y-x}}$

$D_g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>0 \ \underline{\text{et}}\ y-x>0\}$

$\quad = D_1 \cap D_2$ où :

$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>-y\}$

$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y-x>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>x\}$



$(\Delta_1) : y=-x$ $\qquad$ $(\Delta_2) : y=x$ $\qquad$ D_g

Soit $(\Delta_1) : y=-x$ on a $(1,0)\in D_1$, Donc D_1 est le demi plan situé en dessus de (Δ_1) (la droite n'est pas comprise.

- soit $(\Delta_2) : y=x$ on a $(1,0)\notin D_2$, Donc D_2 est le demi plan situé en dessus de (Δ_2) (la droite n'est pas comprise.
- $D_g = D_1 \cap D_2$ la région cochée deux fois.

b) $h(x,y) = \dfrac{\log(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{1-|x|}}$

$D_h = \{(x,y);\ 9-x^2-y^2>0 \ \underline{\text{et}}\ 1-|x|>0\}$

$\quad = D_1 \cap D_2$ où :

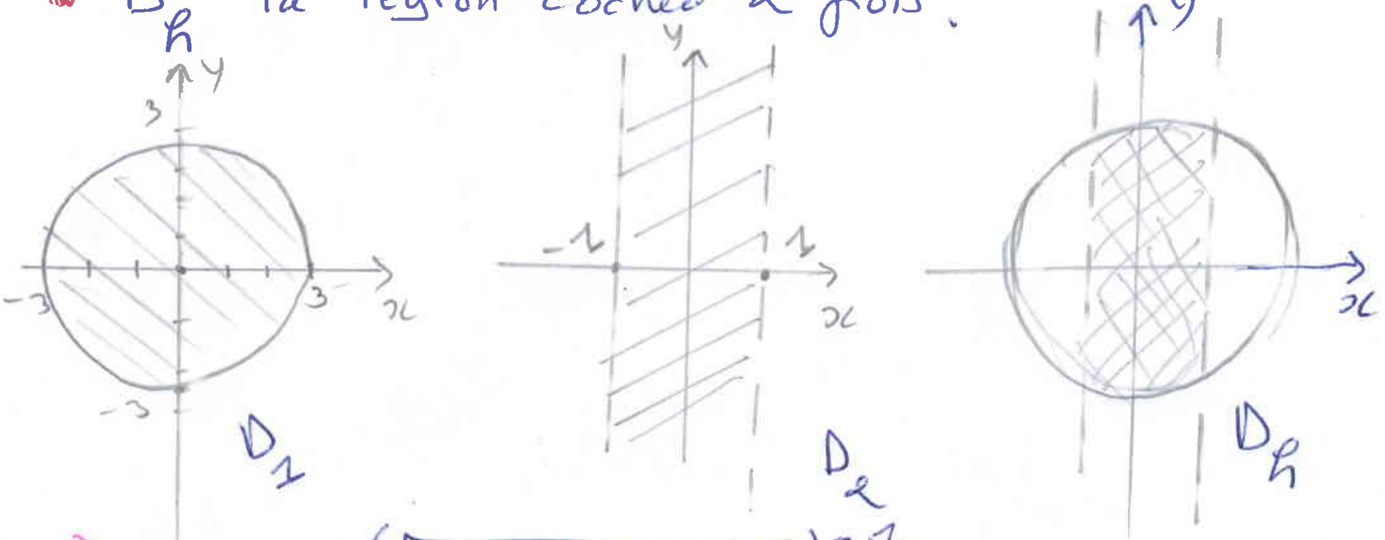
$D_1 = \{(x,y) :\ 9-x^2-y^2>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<9\}$

$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1-|x|>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|<1\}$.

• On a $x^2+y^2=9$ eq. du cercle $C(0,3)$
$(0,0)\in D_1$, donc D_1 est la région qui se trouve à l'intérieur du cercle et le cercle n'est pas compris.

• $|x|<1 \iff -1<x<1$
D_2 est la région qui se trouve entre les droites $x=-1$ et $x=1$ (les droites ne sont pas comprises)

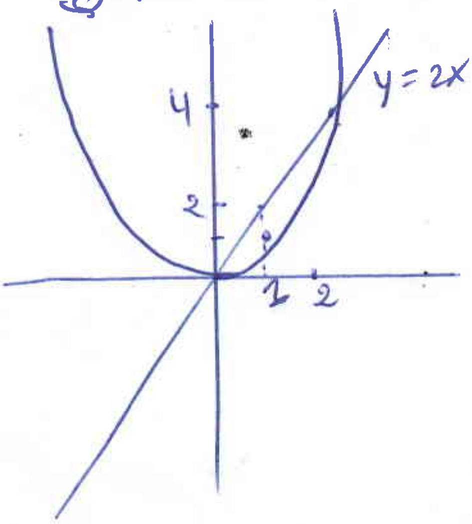
• D_h la région cochée 2 fois.



c) $k(x,y)=\left(\sqrt{(2x-y)(y-x^2)}\right)^{-1}$

$D_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (2x-y)(y-x^2)>0\}$
$=D_1\cup D_2$ où :
$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2x-y>0 \text{ et } y-x^2>0\}$
et $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2x-y<0 \text{ et } y-x^2<0\}$.

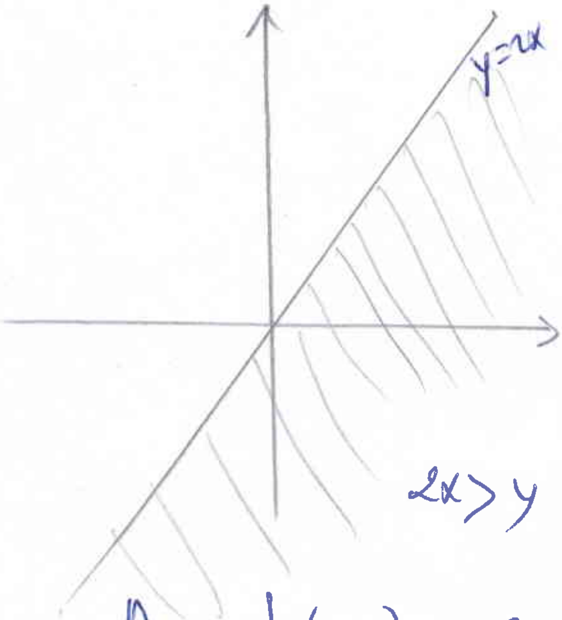
Soit la droite $y=2x$ et la parabole $y=x^2$. On a les points d'intersection :

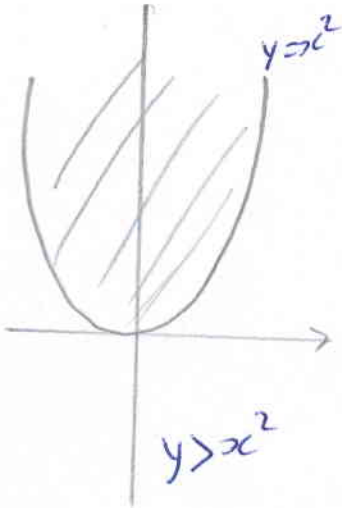


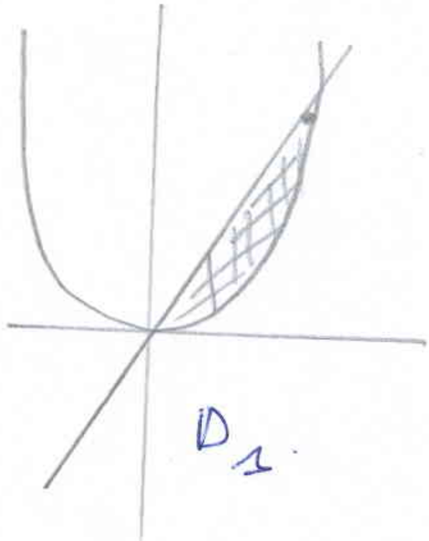
$x^2=2x \iff (x^2-2x)=0$
$\iff x(x-2)=0$
$\iff x=0$ ou $x=2$

$(0,0)$ et $(2,4)$

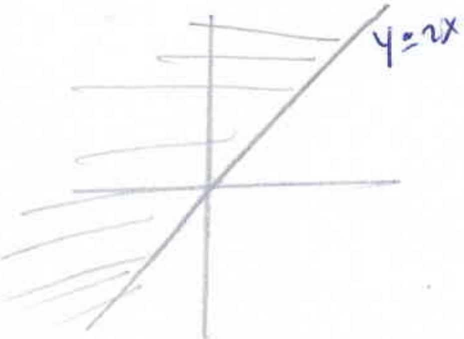
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x > y \text{ et } y > x^2\}$

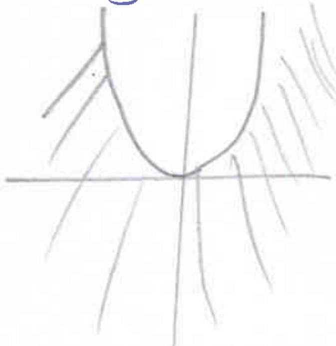


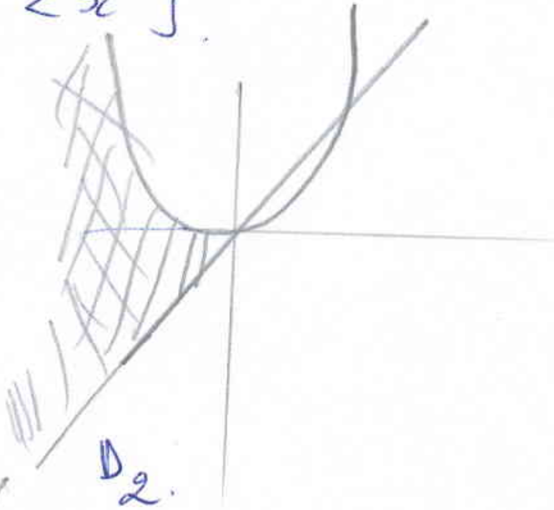




$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x < y \text{ et } y < x^2\}$







$D_k = D_1 \cup D_2$

la region cochée.

Ex2 a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ la limite n'existe pas car si la limite existe on aurait:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right)$$ mais on a:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 1 = \boxed{1}$$

et $$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,0)\right) = \lim_{y \to 0}\left(\frac{-y}{y}\right) = \lim_{y \to 0} -1 = \boxed{-1}$$

b) $g(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{4(x^2+y^2)}$ la limite n'existe pas

car: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$.

et $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^2}{4y^2}=-\dfrac{1}{4}$. $\Big|\ \dfrac{1}{4}\neq-\dfrac{1}{4}$.

2ème Méthode: Posons $y=mx$. $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$.

alors: $\lim\limits_{(x,mx)\to(0,0)} g(x,mx)=\lim\limits_{x\to 0} g(x,mx)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-m^2x^2}{4(x^2+m^2x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-m^2}{4(1+m^2)}=\dfrac{1-m^2}{4(1+m^2)}$

la limite dépend de m donc la limite n'existe pas.

c) $h(x,y)=\dfrac{x^3\sin(xy)}{x^2+y^4}$

- on a: $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ et $|x|<\sqrt{x^2+y^2}$ et $|y|<\sqrt{x^2+y^2}$.

On utilise le th. de gendarme pour montrer que (cette) la limite existe. (Rappel: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$)

On a: $x^2+y^4\geqslant x^2$

Donc $\dfrac{1}{x^2+y^4}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ ...(1)

et $|\sin(xy)|\leqslant 1 \Rightarrow |x^3\sin xy|\leqslant|x^3|$ ...(2)

De (1) et (2) on obtien.

$0\leqslant\left|\dfrac{x^3\sin(xy)}{x^2+y^4}\right|\leqslant\dfrac{|x^3|}{x^2}=|x|$

comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$.

Le th. de gendarme donne $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{x^3\sin(xy)}{x^2+y^4}\right|=0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3\sin(x,y)}{x^2+y^4}=0}$ la limite existe

Ex 3 : a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) si $(x,y) \neq (0,0)$; f est continue car $5x^2y$ est conti. et x^2+y^2 est cont. donc leur division est conti.

2) si $(x,y) = (0,0)$ On a $f(0,0) = 0$.

1ère Meth De plus $0 \leq |f(x,y)| \leq 5\dfrac{(x^2)\,|y|}{x^2+y^2} \leq 5|y|$

(car $x^2 \leq x^2+y^2$) donc $0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq 0$

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

alors $f(0,0) = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ est conti. en $(0,0)$

2ème Meth. posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. $(x,y)\to 0 \Leftrightarrow r \to 0$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{5r^{6}\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} 5r^4\cos^2\theta\sin\theta$
$= 0$ (car $\cos^2\theta\sin\theta$ est bornée)

$\Rightarrow f$ est conti. en $(0,0)$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) si $(x,y) \neq (0,0)$ f est conti. comme fraction de 2 fct. conti. (xy) et (x^2+xy+y^2).

2) si $(x,y) = (0,0)$ f n'est pas conti. car la $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\nexists$ n'existe pas :

1ère Methode $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta} \not\to 0$
car elle dépend de θ.

2ème Methode Prenons le chemin $x = 0$ on obtient ~~lim f(x,y)~~
$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$
2ème chemin : $x = y$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{3} \neq 0$

Ex 4 : $f(x,y)=5xy-4y^2+8$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(5(x_0+h)y_0-4y_0^2+8)-(5x_0y_0-4y_0^2+8)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(5x_0y_0+5hy_0-4y_0^2+8)-(5x_0y_0-4y_0^2+8)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{5hy_0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}5y_0=5y_0$ Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=5y_0$.

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(5x_0(y_0+h)-4(y_0+h)^2+8)-(5x_0y_0-4y_0^2+8)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(5x_0y_0+5x_0h-4y_0^2-8y_0h-4h^2+8)-(5x_0y_0-4y_0^2+8)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{5x_0h-8y_0h-4h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}5x_0-8y_0-4h$

$=5x_0-8y_0$ Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=5x_0-8y_0$.

Ex 5 : $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1. • Si $(x,y)\neq(0,0)$: $f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{yx^2+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{xy^2+x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

• si $(x,y)=(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=\boxed{0}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$

Les dérivées partielles existent en $(0,0)$.

b) On a $f(0,0) = 0$. mais la limite n'existe pas en $(0,0)$ car:

si $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta \Rightarrow f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$

1 dépend de θ. ~~donc~~ $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$= \cos\theta\sin\theta \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Résultat: l'existence des dérivées partielle en un point (a,b) n'implique pas la continuité de f au point (a,b).

Ex 6: $\varphi(x,y) = \arctan(xy) - x^4 e^{\sqrt{3y}}$

$$\varphi'_x(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2} - 4x^3 e^{\sqrt{3y}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$$

$$\varphi'_y(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2} - x^4 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3y}} e^{\sqrt{3y}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$$

$$\varphi''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} - 12x^2 e^{\sqrt{3y}}$$

$$\varphi''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{-2yx^3}{(1+x^2y^2)^2} - \left(-\frac{3}{4}\frac{1}{(\sqrt{3y})^3} + \frac{9}{4(\sqrt{3y})^2}\right) x^4 e^{\sqrt{3y}}$$

$$\varphi''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{12x^3}{2\sqrt{3y}} e^{\sqrt{3y}}$$

$$\varphi''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{12}{2\sqrt{3y}} x^3 e^{\sqrt{3y}}.$$