

Série N°3 (Fonctions de Plusieurs Variables)

Exercice n°1: Donner les domaines de définitions des fonctions suivantes et indiquer ces domaines sur un graphe.

$$a) g(x) = \frac{\ln(x+y)}{\sqrt{y-x}} \quad b) h(x) = \frac{\log(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{1-|x|}}$$

$$c) k(x, y) = 1/\sqrt{(2x-y)(y-x^2)}$$

Exercice n°2: Etudier l'existence des limites des fonctions suivantes quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$a) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad b) g(x, y) = \frac{x^2-y^2}{4(x^2+y^2)} \quad c) h(x, y) = \frac{x^3 \sin(xy)}{x^2+y^4}$$

Exercice n°3: Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice n°4: En utilisant la définition des dérivées partielles, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point (x_0, y_0) pour $f(x, y) = 5xy - 4y^2 + 8$.

Exercice n°5: Soit la fonction définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

a) Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y .

b) Est-ce que la fonction f est continue en $(0, 0)$?

Exercice n°6: Soit $\varphi(x, y) = \arctan(xy) - x^4 e^{\sqrt{3y}}$.

Calculer : φ'_x , φ'_y , φ''_{xx} , φ''_{yy} , φ''_{xy} , φ''_{yx} .

Exercice n°7 (supplémentaire): Soit : $f(x, y) = \sqrt{y-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et représenter le sur un graphe.

2. Calculer : f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} , f''_{xx} .

3. Les mêmes questions pour : $f(x, y) = \sqrt{x+1} \ln(2-y)$

Exercice n°8 (supplémentaire): Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles : f'_x , f'_y si elles existent.