

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama –Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Chapitre 3 : Primitives et Intégrales

Mathématiques 2 (L1 –ST-SM)

Semestre 2-2021-2022

Présenté par Leila Slimane

Table des matières

Table des matières	2
0.1 Primitives et intégrales indéfinies	1
0.2 Intégrales définies	2
0.3 Règles d'intégration	3
0.3.1 Intégration par changement de variables	3
0.3.2 Intégration par parties	5
0.4 Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples	7

0.1 Primitives et intégrales indéfinies

Dans toute la suite I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 0.1.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction dérivable telle que : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Exemple 0.1.1 La fonction $F(x) = x^5$ est une primitive de la fonction $f(x) = 5x^4$ car $F'(x) = f(x)$.

Définition 0.1.2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors f admet une primitive F sur I . De plus toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ où C est une constante dans $\mathbb{R}$.

Trouver une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Définition 0.1.3 L'intégrale indéfinie, notée $\int f(x)dx$, est la fonction définie par :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire : $F'(x) = f(x)$.

Exemple 0.1.2 On a : $\int 5x^4 dx = x^5 + C$ et $\int e^x dx = e^x + C$.

Tables des intégrales indéfinies (primitives) des fonctions usuelles

$$\begin{array}{ll} \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx & \int a f(x)dx = a \int f(x)dx \\ \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, r \in \mathbb{R}, r \neq -1. & \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \\ \int e^x dx = e^x + C & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0. \\ \int \sin x dx = -\cos x + C & \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C & \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C \\ \int \sinh x dx = \cosh x + C & \int \cosh x dx = \sinh x + C \end{array}$$

Exemple 0.1.3 Calculer : $\int \left(\sqrt[5]{x} + 7 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt[5]{x} + 7 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= \int \sqrt[5]{x} dx + \int 7 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx + 7 \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + C_1 + 7 \int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + C_1 + \frac{21}{8} x^{\frac{8}{3}} + C_2 \\ &= \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + \frac{21}{8} x^{\frac{8}{3}} + C. \end{aligned}$$

0.2 Intégrales définies

Définition 0.2.1 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'intégrale définie de f de a à b est le réel $\int_a^b f(x) dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire : $F'(x) = f(x)$.

Remarque 0.2.1 Il faut distinguer entre intégrale définie et intégrale indéfinie. Une intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$ est un nombre alors qu'une intégrale indéfinie $\int f(x) dx$ est une fonction.

Exemple 0.2.1 Evaluons : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. La fonction $f(x) = \cos x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on sait que sa primitive est $F(x) = \sin x$. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b c dx = c(b - a)$.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.
- $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

- Si $f(x) \geq 0$, sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f(x) \geq g(x)$, sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Si $m \leq f(x) \leq M$, sur $[a, b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Proposition 0.2.1 *On suppose que f est continue sur $[-a, a]$.*

- Lorsque f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
- Lorsque f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- Si f est une fonction périodique de période T alors :
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exemple 0.2.2 *Calculer $\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx$ et $\int_{-3}^3 |5x| dx$.*

Pour la première intégrale, on remarque que la fonction $x^4 \sin^3 x$ est impaire, donc on déduit que :

$$\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx = 0.$$

Concernant la deuxième intégrale, on constate que la fonction $|5x|$ est paire, donc :

$$\int_{-3}^3 |5x| dx = 2 \int_0^3 |5x| dx = 10 \int_0^3 x dx = 5x^2 \Big|_0^3 = 45.$$

0.3 Règles d'intégration

0.3.1 Intégration par changement de variables

Proposition 0.3.1 *Si $u = g(x)$ est une fonction dérivable où son ensemble image est l'intervalle I et si f est une fonction continue sur I , alors :*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Le but de cette méthode est de remplacer une intégrale peu difficile par une autre plus facile. La difficulté majeure de cette méthode est de trouver le bon changement de variable. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparaît sous le symbole d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi.

Exemple 0.3.1 Pour calculer $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$, on pose $u = 1 + x^2$ et $du = 2xdx$. On obtient :

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Exemple 0.3.2 Calcul de $I = \int \cos^4 x \sin^3 x dx$. Soit le changement de variable :

$u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x dx = \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int u^4 (1 - u^2) du \\ &= \int (u^4 - u^6) du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C. \end{aligned}$$

Proposition 0.3.2 Si la fonction g et sa dérivée g' sont continue sur $[a, b]$ et si la fonction f est continue sur l'ensemble $g([a, b])$, alors on a l'égalité :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Exemple 0.3.3 Evaluons :

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Posons :

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx.$$

Par la suite, si $x = 1$ on a : $u = \ln 1 = 0$ et quand $x = e$ on a $u = \ln e = 1$.

$$\text{Donc : } J = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

En utilisant la méthode de changement de variables et la table des primitives des fonctions usuelles on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \int f'(x)f(x)^r dx &= \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \neq -1 & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + C \\ \int f'(x)e^{f(x)} dx &= e^{f(x)} + C & \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx &= 2\sqrt{f(x)} + C \\ \int f'(x)\sin(f(x)) dx &= -\cos(f(x)) + C & \int f'(x)\cos(f(x)) dx &= \sin(f(x)) + C \\ \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx &= \arctan(f(x)) + C & \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx &= \arcsin(f(x)) + C \end{aligned}$$

0.3.2 Intégration par parties

Proposition 0.3.3 Soient u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I . Alors :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Symboliquement, on écrit : $\int u dv = uv - \int v du.$

Remarque 0.3.1 1. L'intégration par parties n'est efficace que si l'on obtient une intégrale plus simple que l'intégrale initiale.

2. Le choix des fonctions doit être judicieux et ce n'est que par la pratique qu'on pourra plus facilement faire ce choix.

Exemple 0.3.4 Pour calculer $\int \arcsin x dx$, on utilise une intégration par parties où on pose : $u = \arcsin x$, $dv = dx$ donc $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$.

Alors on a :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Des fois on aura besoin de faire appel à l'intégration par parties plusieurs fois.

Exemple 0.3.5 *Evaluons : $\int x^2 \sin x dx$.*

On pose : $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ donc $du = 2x dx$, $v = -\cos x$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du \\ \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.\end{aligned}$$

Pour calculer la deuxième intégrale on entame une deuxième intégration par parties, avec cette fois $u = 2x$, $dv = \cos x dx$ donc $du = 2 dx$, $v = \sin x$. On aura :

$$\int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

En remplaçant ce résultat dans l'intégrale initiale on trouve :

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Exemple 0.3.6 *Calculer $I = \int e^x \sin x dx$. Posons : $u = e^x$, $dv = \sin x dx$ donc $du = e^x$, $v = -\cos x$. L'intégration par parties nous donne :*

$$I = -\cos x e^x + \int e^x \cos x dx. \quad (1)$$

Une deuxième intégration par parties, avec le choix :

$u = e^x$, $dv = \cos x dx$ donc $du = e^x$, $v = \sin x$, nous donne :

$$\int e^x \cos x dx = \sin x e^x - \int e^x \sin x dx. \quad (2)$$

Remplaçant (2) dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned}I &= -\cos x e^x + \sin x e^x - I \\ 2I &= -\cos x e^x + \sin x e^x \Rightarrow I = \frac{1}{2}(-\cos x e^x + \sin x e^x).\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties pour les intégrales définies est donnée par :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

ou symboliquement, par : $\int_a^b u dv = uv]_a^b - \int_a^b v du$.

0.4 Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples

Définition 0.4.1 Une fonction rationnelle f est un rapport de deux polynômes P et Q de degré respectivement m et k : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

- i) Si $\deg(P) = m \geq \deg(Q) = k$ on dit que f est une fonction rationnelle impropre.
- ii) Si $\deg(P) = m < \deg(Q) = k$ on dit que f est une fonction rationnelle propre.

Pour intégrer une fonction rationnelle on commence par l'exprimer comme une somme de fractions simples appelés éléments simples, dont l'intégration est immédiate.

Première étape : Dans le cas où f est impropre (i.e. $\deg(P) \geq \deg(Q)$) on effectue la division euclidienne de P par Q jusqu'à obtenir un reste $R(x)$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$:

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{3}$$

où S et R sont aussi des polynômes. Dans le cas où f est propre (i.e. $\deg(P) < \deg(Q)$) on passe directement à la deuxième étape avec $P(x) = R(x)$.

Deuxième étape : On factorise le dénominateur $Q(x)$ en un produit de facteurs de la forme $ax + b$ et des facteurs de la forme $x^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4c < 0$.

Troisième étape : Exprimer la fonction rationnelle propre $\frac{R(x)}{Q(x)}$ de l'équation (3) comme une somme d'éléments simples de la forme :

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \text{ ou } \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^j}.$$

Exemple 0.4.1 *Considérons la fonction rationnelle :*

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

I) En effectuant la division euclidienne on trouve :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

II) On factorise le dénominateur : $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)$.

III) Comme le facteur $(x - 1)$ est présent deux fois, la décomposition en élément simple est de la forme :

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Multiplions par le plus petit dénominateur commun $(x - 1)^2(x + 1)$, on trouve:

$$4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2. \quad (4)$$

Posons $x = 1$ dans (4) on obtient : $B = 2$. Posons $x = -1$: $C = -1$ et finalement si on pose $x = 0$ on déduit que $A = 1$. Alors :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{-1}{x + 1}. \quad (5)$$

A l'aide de la décomposition en éléments simples, l'intégrale d'une fonction rationnelle se ramène à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ ou $\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx$, $n \geq 2$, $b^2 - 4a < 0$. On distingue quatre types de ces intégrales :

Type I :

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C.$$

Type II :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$$

Type III :

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx, \quad b^2-4a < 0.$$

On remarque que $x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)$. Si on pose :

$y = x + \frac{b}{2}$ et $p^2 = c - \frac{b^2}{4} > 0$ on trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx &= \int \frac{A(y-\frac{b}{2})+B}{y^2+p^2} dy = A \int \frac{y}{y^2+p^2} dy + (B-A\frac{b}{2}) \int \frac{1}{y^2+p^2} dy \\ &= \frac{A}{2} \ln(y^2+p^2) + \frac{2B-Ab}{2p} \arctan\left(\frac{y}{p}\right) + C \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+bx+p^2) + \frac{2B-Ab}{2p} \arctan\left(\frac{2x+b}{2p}\right) + C. \end{aligned}$$

Type IV :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx, \quad b^2-4a < 0, \quad n \neq 1.$$

On pose : $y = x + \frac{b}{2}$, on obtient :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx = A \int \frac{y}{(y^2+p^2)^n} dy + \frac{2B-Ab}{2} \int \frac{1}{(y^2+p^2)^n} dy.$$

La première intégrale est facile à calculer :

$$\int \frac{y}{(y^2+p^2)^n} dy = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+p^2)}{(y^2+p^2)^n} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(n-1)(y^2+p^2)^{n-1}} \right) + C_1.$$

Le calcul de la seconde intégrale nécessite plus de travail. Soit :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n}. \text{ Intégrons par parties, en posant} \\ u &= \frac{1}{(y^2+p^2)^n}, \quad dv = dy \implies du = \frac{-2ny}{(y^2+p^2)^{n+1}}, \quad v = y : \\ I_n &= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n \int \frac{y^2 dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} = \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n \int \frac{(y^2+p^2-p^2) dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} \\ I_n &= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n \int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n} - 2np^2 \int \frac{dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} \\ I_n &= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2nI_n - p^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

Donc : $I_{n+1} = \frac{1}{2np^2} \left(\frac{y}{(y^2+p^2)^n} + (2n-1)I_n \right).$

Ce qui est équivalent à :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)p^2} \left(\frac{y}{(y^2+p^2)^{n-1}} + (2n-3)I_n - 1 \right).$$

Ceci, nous permet de le calculer d'une manière récurrente, sachant que :

$$I_1 = \frac{1}{p} \arctan \frac{y}{p} + C.$$

Exemple 0.4.2 Calculer :

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx.$$

D'après l'exemple 0.4.1, la décomposition en éléments simples de $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$ est :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx &= \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int \frac{-dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - 2\frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Exemple 0.4.3 Calculer :

$$J = \int \frac{x+5}{x^2-4x+13} dx.$$

La fonction rationnelle ici est propre, on n'aura pas besoin d'effectuer la division euclidienne. De plus, on remarque que le polynôme $x^2 - 4x + 13$ est irréductible car

$\Delta = -36 < 0$. Donc on a une intégrale de type III. On a :

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+7}{x^2-4x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + 7 \int \frac{dx}{x^2-4x+13} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+13| + 7 \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} \end{aligned}$$

Pour évaluer la deuxième intégrale on pose : $x-2=3y$, $dx=3dy$ on obtient :

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{3} \arctan y + C = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$

Donc :

$$J = \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+13| + \frac{7}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$