2.4 Solutions

Exercice 1.

1. Soient $u=(x,y,z,t)$ et $u'=(x',y',z',t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z,t)+\lambda'(x',y',z',t')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')$$

donc

$$\begin{aligned}
&f(\lambda u+\lambda' u')=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')\\
&=(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y'),(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t'),(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')\\
&+(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t')\\
&=(\lambda(x+y)+\lambda'(x'+y'),\lambda(z+t)+\lambda'(z'+t'),\lambda(x+y+z+t)\\
&+\lambda'(x'+y'+z'+t')\\
&=\lambda(x+y,z+t,x+y+z+t)+\lambda'(x'+y',z'+t',x'+y'+z'+t')\\
&=\lambda f(u)+\lambda f(u')
\end{aligned}$$

f est linéaire.

On a :

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (x+y, z+t, x+y+z+t) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x,-x,z,-z) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1)\,.$$

On pose $a = (1,-1,0,0)$ et $b = (0,0,1,-1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a,b) est une base de $\ker\,(f)$.

3. Première méthode

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), f\left(e_3\right), f\left(e_4\right)\right) \\ &f\left(e_1\right) = (1,0,1); f\left(e_2\right) = (1,0,1); f\left(e_3\right) = (0,1,1); f\left(e_4\right) = (0,1,1). \end{aligned}$$

Comme $f\left(e_1\right) = f\left(e_2\right)$ et $f\left(e_3\right) = f\left(e_4\right)$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_3\right)\right)$$

$f\left(e_1\right)$ et $f\left(e_3\right)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim\left(\mathbb{R}^4\right) \\ &\Leftrightarrow 2 + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2. \end{aligned}$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $\mathrm{Im}(f)$, par exemple $f\left(e_1\right)$ et $f\left(e_3\right)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Exercice 2.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} &\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &u(\lambda x + \mu y) = (-2\left(\lambda x_1 + \mu y_1\right) + 4\left(\lambda x_2 + \mu y_2\right) + 4\left(\lambda x_3 + \mu y_3\right), -\left(\lambda x_1 + \mu y_1\right) \\ &+\lambda x_3 + \mu y_3, -2\left(\lambda x_1 + \mu y_1\right) + 4\left(\lambda x_2 + \mu y_2\right) + 4\left(\lambda x_3 + \mu y_3\right)) \\ &= (\lambda\left[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3\right] + \mu\left[-2y_1 + 4y_2 + y_3\right], \lambda\left[-x_1 + x_3\right] \\ &+\mu\left[-y_1 + y_3\right], \lambda\left[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3\right] + \mu\left[-2y_1 + 4y_2 + y_3\right]) \\ &= \lambda\left(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3\right) \\ &+\mu\left(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3\right) = \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
x &\in \ker(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2x_1+4x_2+4x_3=0\\-x_1+x_3=0\\-2x_1+4x_2+4x_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x_1+2x_2+2x_3=0\\x_1=x_3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x_2+x_3=0\\x_1=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2=-\frac{1}{2}x_3\\x_1=x_3\end{array}\right.\\
x &= \left(x_3,-\frac{1}{2}x_3,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(2,-1,2).
\end{aligned}$$

$a=(2,-1,2)=2e_1-e_2+2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre ker (u), c'est une base de ker (u).

$$\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Vect}\left(u\left(e_1\right),u\left(e_2\right),u\left(e_3\right)\right)$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}
\dim(\ker(u))+\dim(\operatorname{Im}(u)) &= \dim\left(\mathbb{R}^3\right)\\
&\Leftrightarrow 1+\dim(\operatorname{Im}(u))=3\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im}(u))=2
\end{aligned}$$

$u\left(e_1\right)=-2e_1-e_2-2e_3=(-2,-1,-2)$ et $u\left(e_2\right)=4e_1+4e_3=(4,0,4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension 2, $\left(u\left(e_1\right),u\left(e_2\right)\right)$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

3. $\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)=\mathbb{R}^3\Leftrightarrow\left(a,u\left(e_1\right),u\left(e_2\right)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il est presque évident que

$$u\left(e_1\right)+u\left(e_3\right)=a.$$

Sinon on calcule $\alpha a+\beta u\left(e_1\right)+\gamma u\left(e_3\right)=0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha=1,\beta=-1$ et $\gamma=-1$ est une solution non nulle.

$\left(a,u\left(e_1\right),u\left(e_2\right)\right)$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)=\mathbb{R}^3$

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned}
u(x) &= ux_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=x_1u\left(e_1\right)+x_2u\left(e_2\right)+x_3u\left(e_3\right)\\
&= x_1\left(2e_1+e_2+3e_3\right)+x_2\left(e_2-3e_3\right)+x_3\left(-2e_2+2e_3\right)\\
&= 2x_1e_1+\left(x_1+x_2-2x_3\right)e_2+\left(3x_1-3x_2+2x_3\right)e_3\\
&= \left(2x_1,x_1+x_2-2x_3,3x_1-3x_2+2x_3\right).
\end{aligned}$$

2. $f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right)=0_{\mathbb{R}^3}=2\times0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow0_{\mathbb{R}^3}\in E$

Soient x et y deux vecteurs de E, alors $u(x)=2x$ et $u(y)=2y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda(2x)+\mu(2y)=2(\lambda x+\mu y).$$

Donc $\lambda x+\mu y \in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$
$f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right)=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$
Soient x et y deux vecteurs de F, alors $u(x)=-x$ et $u(y)=-y$
Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda(-x)+\mu(-y)=-(\lambda x+\mu y).$$

Donc $\lambda x+\mu y \in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3.

$$x \in E \Leftrightarrow u(x)=2x \Leftrightarrow \left(2x_1, x_1+x_2-2x_3, 3x_1-3x_2+2x_3\right)=2\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1=2x_1 \\ x_1+x_2-2x_3=2x_2 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=2x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1-3x_2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ x_3=0. \end{array}\right.$$

Donc $x=\left(x_1, x_1, x_3\right)=x_1(1,1,0)=x_1\left(e_1+e_2\right)$.
$e_1+e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E.

$$x \in F \Leftrightarrow u(x)=-x \Leftrightarrow \left(2x_1, 3x_1-x_2, 3x_1-3x_2+2x_3\right)=-\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1=-x_1 \\ x_1+x_2-2x_3=-x_2 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=-x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=x_3. \end{array}\right.$$

Donc $x=\left(0, x_3, x_3\right)=x_3(0,1,1)=x_3\left(e_2+e_3\right)$.
$e_2+e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F.
4.

$$\dim(E)+\dim(F)=1+1=2.$$

Donc il n'y a pas somme directe.

Exercice 4.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1}, alors $f(u)=-u$ et $f\left(u'\right)=-u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f\left(\lambda u+\lambda' u'\right)=\lambda f(u)+\lambda' f\left(u'\right)=\lambda(-u)+\lambda\left(-u'\right)=-\left(\lambda u+\lambda' u'\right).$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1},
La troisième montre que $\lambda u+\lambda' u' \in E_{-1}$

$$f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right)=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soient u, u' deux vecteurs de E_1, alors $f(u)=u$ et $f\left(u'\right)=u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f\left(\lambda u+\lambda' u'\right)=\lambda f(u)+\lambda' f\left(u'\right)=\lambda u+\lambda u'.$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1,
La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_2) &= f(e_1) - f(e_2) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 \\ &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1}, donc la dimension de E_1 est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1 .

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1, f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap$ E_1 est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

5.

$$\begin{aligned} \dim(E_{-1} + E_1) &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) \\ &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\dim\left(E_{-1}+E_1\right)\leq 3.$$

Finalement

$$\dim\left(E_{-1}+E_1\right)=3.$$

Remarque : cela entraine que $\dim\left(E_{-1}\right)=2$ et $\dim\left(E_1\right)=1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1}\oplus E_1=\mathbb{R}^3.$$

6. On peut calculer $f^2\left(e_1\right), f^2\left(e_2\right)$ et $f^2\left(e_3\right)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1, e_2 et e_3. Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $\left(e_1-e_2, e_1-e_3, e_1+e_2+e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1}\oplus E_1=\mathbb{R}^3$). Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrive de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2\left(e_1-e_2\right)=e_1-e_2, f^2\left(e_1-e_3\right)=e_1-e_3$ et que $f^2\left(e_1+e_2+e_3\right)=e_1+e_2+e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned}
f^2\left(e_1-e_2\right) &= f\left(f\left(e_1-e_2\right)\right)=f\left(-\left(e_1-e_2\right)\right)\\
&= -f\left(e_1-e_2\right)=-\left(-\left(e_1-e_2\right)\right)=e_1-e_2
\end{aligned}$$

Car $e_1-e_2\in E_{-1}$.

$$\begin{aligned}
f^2\left(e_1-e_3\right) &= f\left(f\left(e_1-e_3\right)\right)=f\left(-\left(e_1-e_3\right)\right)\\
&= -f\left(e_1-e_3\right)=-\left(-\left(e_1-e_3\right)\right)=e_1-e_3
\end{aligned}$$

Car $e_1-e_3\in E_{-1}$.

$$\begin{aligned}
f^2\left(e_1+e_2+e_3\right) &= f\left(f\left(e_1+e_2+e_3\right)\right)\\
&= f\left(e_1+e_2+e_3\right)=e_1+e_2+e_3
\end{aligned}$$

Car $e_1+e_2+e_3\in E_1$.

Par conséquent $f^2=id_{\mathbb{R}^3}$.

Cela montre que $f^{-1}=f$ et que f est bijective.

Exercice 5.

1. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}
\dim(\ker(u))+\dim(\operatorname{Im}(u)) &= \dim\left(\mathbb{R}^2\right)\\
&\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(u))=2-1=1.
\end{aligned}$$

Par conséquent $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2.$$

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) \\ &= x_1(e_1 + e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 \\ &= (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u(e_2) &= au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$.

Exercice 6.

1.

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 1$$

Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\mathrm{im}(f)) = 1.$$

2. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} &\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3, \\ &x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

On pose $a = (-1, 1, 0, 0), b = (-1, 0, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 0, 1)$.

(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 7.

Supposons (a)

Si $y \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe $x \in Ey = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in \mathrm{Ker}(u)$

Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.
Supposons (b)
D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2\dim(\operatorname{Im}(u)) = n \Leftrightarrow 2\operatorname{rg}(u) = n$$

Pour tout $x \in E, u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

Exercice 8.
Si u est injective alors si

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E.$$

car u est injective, ce qui montre que $\ker(u) = \{0_E\}$.
Si $\ker(u) = \{0_E\}$ alors

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x-y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E.$$

car $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Exercice 9.
1. $(u - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

$$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda.$$

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ, on a $u(x_1) = \lambda x_2$ et $u(x_2) = \lambda x_2$
Soient α_1 et α_2 deux réels.

$$\begin{aligned} u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) \\ &= \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2). \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$
E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$
Pour tout x_1 et x_2 dans F. Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$
Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$
Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F).$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.
Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$ Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda.$$

Exercice 10.

1. Supposons que u soit surjective, alors $\mathrm{Im}(u) = F$ par conséquent $\dim(\mathrm{Im}(u)) = p$ et d'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + p = n \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - p < 0. \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas surjective.

2. Supposons que u soit injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$ par conséquent $\dim(\ker(u)) = 0$ et d'après le théorème du rang, comme $\mathrm{Im}(u) \subset F$ entraine que $\dim(\mathrm{Im}(u)) < p$

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = n \\ &\Leftrightarrow n = \dim(\mathrm{Im}(u)) < p. \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas injective.

Exercice 11.

Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x), y \in f(\ker(f^2))$ On a montré que

$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \subset f\left(\ker\left(f^2\right)\right)$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in \mathrm{Im}(f)$ et comme

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$$

on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f\left(\ker\left(f^2\right)\right) \subset \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = f\left(\ker\left(f^2\right)\right).$$

Exercice 12.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$

Donc $y \in \operatorname{Im}(g)$,

On a donc $y \in \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$, on a montré que

$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$$

Soit $y \in \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$

$y \in \operatorname{Im}(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$

$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g(f(x))$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Exercice 13.

1. Soit $x \in \ker(u), u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que

$$\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right).$$

2. Soit $y \in \operatorname{im}(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in \operatorname{im}(u)$.

Exercice 14.

Supposons que $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u(u(x)) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et comme $u(y) = 0_E, y \in \ker(u) \cap \operatorname{im}(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraine que $u(u(x)) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que

$$\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{0_E\}.$$