Université de Khemis-Miliana | Master1-Analyse Mathématiques et Application
Faculté des Sciences et de la Technologie | Semestre1-2020/2021
Département de Mathématiques et Informatique | Septembre2021 Durée :1h

==

Corrigé de Rattrapage - Topologie et Analyse Fonctionnelle

==

Exercice n°1(8 points) :

1. **Théorème de Banach-Steinhaus :** Soit E un espace de Banach et F un espace normé et soit $(T_i)_{i\in I}$une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$. On supppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T_i(x),\ \ i \in I\}$ est borné dans F : $\forall x \in E, \exists C_x > 0 : C_x = \underset{i\in I}{Sup} \|T_i(x)\|_F < +\infty$. Alors :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall i \in I, \quad \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M.$$

2. Toute application constante sur un espace métrique est continue mais elle n'est pas ouverte. Prenons comme exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, alors $f(]a,b[) = \{c\}$, le singleton $\{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

3. Le complémentaire de la boule unité est un ouvert pour la topologie forte qui n'est pas ouvert pour la topologie faible.

4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

a) **Vrai**

b) **Faux** Il existe des suites qui ne conver. fort. mais elles converg. faib.

c) **Faux ..**la topolofie faible étoile est toujours séparée.

d) **Faux** L'inégalité $\|x\|_2 \leq c\ \|x\|_1$ signifie que l'application identité :

$Id : \ (E, \|\cdot\|_1) \to \ (E, \|\cdot\|_2)$ est continue.

e) **Faux** Le théorème de Baire est vrai pour tout espace métrique complet.

Exercice n°2 (points) :

1. Soit $(x_n)_n$ une suite de E. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup y$ avec $x \neq y$. Ceci est équivalent à $f(x_n) \to f(x)$ et $f(x_n) \to f(y)$ pour tout $f \in E'$. Mais $(f(x_n))_n$ est une suite réelle qui converge dans $\mathbb{R}$. Donc la limite est unique, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in E'$. D'autre part le corollaire **??** assure l'existence d'un $f_0 \in E'$ tel que $f_0(x) \neq f_0(y)$ car $x \neq y$. Contradiction.

2. On écrit $f_n(x_n) - f(x)$ sous la forme suivante : $f_n(x_n) - f(x) = (f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x))$.

Comme $x_n \rightharpoonup x$ faiblement on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(x)) = 0$. De plus

$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|x_n\|_E \|f_n - f\|_{E'}$. La propriété 2. donne que $\|x_n\|_E$ est bornée puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, on déduit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ car $f_n \to f$. Donc on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x_n) - f(x)) = 0.$

Exercice n°3 (6 points) :

1. Supposons que $C \neq E$, sinon le résultat est trivial. Soit $x_0 \in E \backslash C$. Comme C est un convexe fermé et $\{x_0\}$ est un convexe compact, le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique, deuxième version) assure l'existence de $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in C, \quad f(x) < \alpha < f(x_0).$$

L'ensemble $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in E, \ f(x) > \alpha\}$ est un ouvert pour $\sigma(E, E')$ qui contient x_0 et il est contenu dans $E \backslash C$. Donc on déduit que $E \backslash C$ est un ouvert pour la topologie faible.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que (x_n, Tx_n) converge vers $(x, y) \in X \times Y$. On doit montrer que $y = T(x)$.

On a : $x_n - x \rightarrow 0$. Il s'ensuit d'après l'hypothèse :
$\forall f \in E', \forall \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow f(Tx_n) \rightarrow 0$ que $\forall f \in E'$, $f(T(x_n - x)) \rightarrow 0$.
Alors $f(Tx_n) \rightarrow f(Tx), \forall f \in E'$. Comme f est continue, il s'ensuit qu :
$f(\lim\limits_{n \to +\infty} Tx_n) = f(Tx)$, $\forall f \in E'$. Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} Tx_n = y$, on obtient que : $f(y) = f(Tx), \forall f \in E'$. On déduit alors, grâce à un corollaire du cours que $y = Tx$. Le graphe de T est donc fermé. Comme E et F sont des Banach, le théorème du graphe fermé assure que T est continue.