UNIVERSITE DE DJILALI BOUNAAMA- KHEMISMILIANA

Maths II $1^{ème}$ *Année* 2021 – 2022

Serie d'exercices n°1

Exercice 1

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$X = (1,-2,0,3), \qquad Y = (-1,2,1,-1), \qquad Z = (1,3,-2,0).$$

1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes :

$$2\cdot X - Y + Z, \qquad 2\cdot(X+Y)+Z, \qquad X - Y + 3\cdot Z.$$

2) Determiner les scalaires réels λ_1, λ_2 et λ_3, de façon que le vecteur $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z$, ait ses deux dernières composantes nulles .

Exercice 2

Soit, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble F_1 des triplets de la forme $(a-b, a, 2a+b)$ où a et b sont des réels quelconques , et l'ensemble F_2 des triplets de la forme (x,y,z) tels que $x = y = z$.

1) Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et inddiquer une base pour chacun d'eux.

2) Determiner $F_1 + F_2$.

Exercice 3

1) Montrer que l'ensemble G des triplets de la forme $(\alpha+\beta, \alpha, \alpha+2\beta)$, α et β étant des réels quelconques ,est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base de G.

2) Même questions avec l'ensemble $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$

3) Même questions avec l'ensemble $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \wedge y = 2x\}$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, considérons les vecteurs :

$$v_1 = 2.e_1 + e_2 + e_3 \ , \ v_2 = e_2 - e_3 \ , \ v_3 = -e_2 + e_3$$

1) Calculer $v_1 + v_2 + v_3$. Que représente le vecteur $v_2 + v_3$ pour le vecteur v_1?

2) Donner une base du sous-espace engendré par les vecteurs v_1 , v_2 et v_3.

3) Déterminer x, y et z pour que les trois vecteurs $v_4 = (x,y,z)$, v_1 et v_2 soient linéairements dépendants .

Exercice 5

Considérons les vecteurs lignes de $\mathbb{R}^3$:

$$A = (-1,2,5), \qquad B = (2,3,4), \qquad C = (7,0,-7).$$

Montrer que A, B et C sont linéairement dépendants .

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, considérons les vecteurs : $v_1 = e_1 - e_2 + e_3$ et $v_2 = -e_1 - e_2 - e_3$.

1) Donner une base du sous-espace $F = \langle v_1, v_2 \rangle$.

2) Démontrer que le vecteur $A = 2.e_2$ appartient au sous-espace F.

Dans la base canonique B on considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

3) Donner une Base de $F + G$.

Trouver dans cette base les composantes de $A = e_2 - e_3$.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, considérons les vecteurs : $v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = -e_1 + e_2 + e_3$

1) Donner une base du sous-espace $F = \langle v_1, v_2 \rangle$

2) Démontrer que $E = \langle -e_1 - 2e_2 + e_3 \rangle$ est un sous-espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$

3) Par rapport à la base canonique $\mathfrak{B}$ les vecteurs $X(x, y, z)$ d'un sous-espace vectoriel G satisfont à la condition : $2x - 3y + z = 0$

Déterminer la dimension et une de base de G.

Exercice 8

Déterminer la dimensons du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendrés par les vecteurs :

$u = (1, -1, 0, 2, 1)$, $v = (2, 1, 1, 3, -1)$, $w = (0, 1, 1, 2, 1)$, $t = (4, -2, 0, 5, 0)$.

Exercice 9

Déterminer le rang des systèmes de vecteurs suivants :

a) $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (0, 1, -1)$, $t = (1, -4, 5)$.

b) $u = (0, 1, -1, 2)$, $v = (3, 0, 1, 1)$, $w = (-1, -1, 0, 0)$, $t = (1, -4, 5)$.

Exercice 10

Déterminer une base et la dimension des s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les familles de vecteurs $\{X_i\}$:

a) $X_1 = (1, 0, 1)$, $X_2 = (-1, -1, 0)$, $X_3 = (-1, 1, 1)$.

b) $X_1 = (0, 1, -2)$, $X_2 = (-1, 1, -3)$, $X_3 = (-2, 3, -8)$.