حل سلسلة أعمال الموجهة رقم "3" في مقياس الجزء (02).

نظرية الإنتاج في المدى القصير

التمرين الأول:

1/ إيجاد الإنتاج المتوسط (PM_L) والإنتاج الحدي (Pm_L) للعمال:

وحدات العمل	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رأس المال (K)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
الإنتاج الكلي (Q)	0	10	30	60	80	95	108	112	112	108	100
الإنتاج المتوسط (PM_L)	0	10	15	20	20	19	18	16	14	12	10
الإنتاج الحدي (Pm_L)	-	10	20	30	20	15	13	4	0	-4	-8

← الإنتاج المتوسط للعمل (PM_L) هو حاصل قسمة الإنتاج الكلي على عدد وحدات العنصر المتغير $PM_L = \frac{Q}{L}$

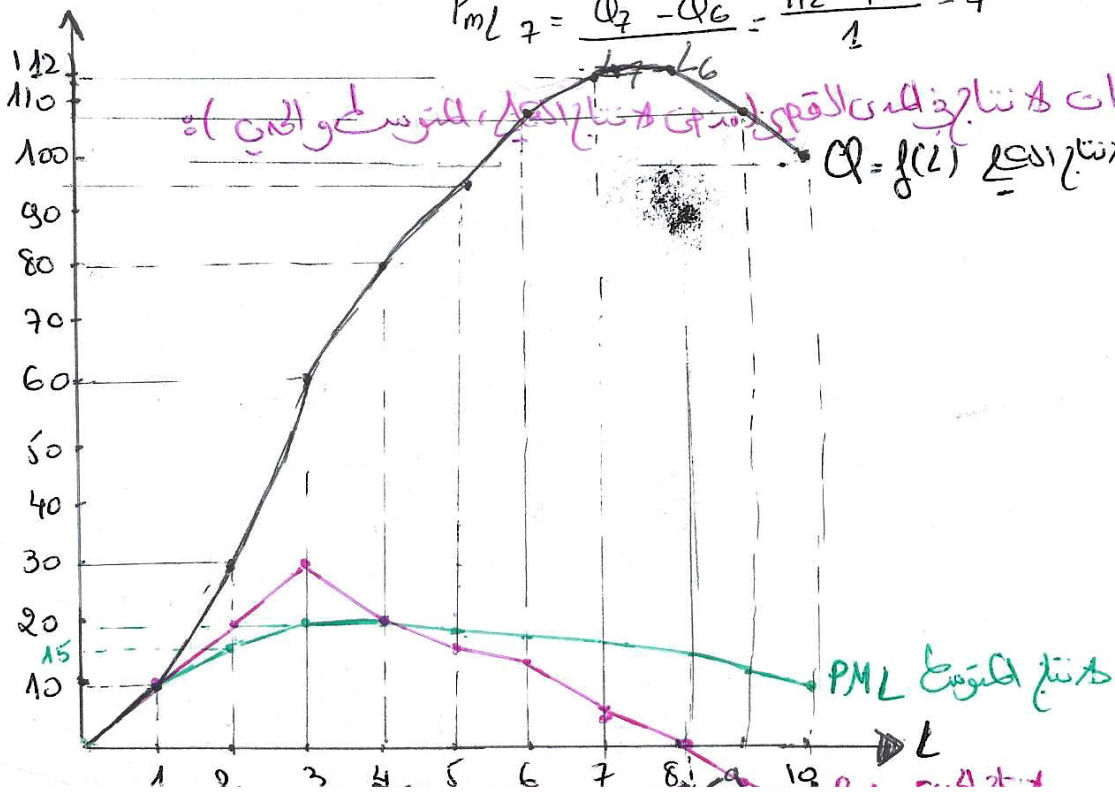
← الإنتاج الحدي للعمل (Pm_L) هو التغير في الناتج الكلي والناتج عن استخدام وحدة عمالة إضافية.

$$Pm_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad \left(Pm_L = \frac{dQ}{dL} \text{ في حالة دالة الإنتاج}\right)$$

$$Pm_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{Q_2 - Q_1}{L_2 - L_1} \Rightarrow Pm_{L4} = \frac{Q_4 - Q_3}{L_4 - L_3} = \frac{80-60}{1} = 20$$

$$Pm_{L7} = \frac{Q_7 - Q_6}{L_7 - L_6} = \frac{112-108}{1} = 4$$

2/ رسم منحنيات الإنتاج في المدى القصير (منحنى الإنتاج الكلي، المتوسط والحدي):



3/ تحديد مراحل إنتاج الثلاث : (مع التعليق).

لتحديد طبيعة العلاقة بين منحنيات إنتاج الثلاثة يظهر لنا من خلال الشكل البياني ومن خلال الجدول أن السلوك الإنتاجي للمؤسسة يمر بثلاث مراحل:

- المرحلة الأولى $L \in [L=0, PM_L = Pm_L]$: خلال هذه المرحلة نلاحظ أنه مع زيادة عنصر العمل (L) فإن الإنتاج الكلي يتزايد بمعدلات متزايدة وذلك (غاية توظيف العامل 3) ثم يبدأ بالتزايد بمعدلات متناقصة. في نفس الوقت نلاحظ أن الإنتاجية الحدية للعمل (Pm_L) متزايدة وأكبر من الإنتاجية المتوسطة للعمل (PM_L). أي أن منحنى الإنتاجية الحدية للعمل يقع فوق منحنى الإنتاجية المتوسطة للعمل في نهاية هذه المرحلة سوف تتساوى الإنتاجية الحدية مع الإنتاجية المتوسطة للعمل عند $L=4$. تسمى بمرحلة النمو.

- المرحلة الثانية $L \in [PM_L = Pm_L \ , \ Pm_L = 0]$: في هذه المرحلة يتزايد حجم الإنتاج الكلي مع تزايد عدد وحدات العمل ولكن بمعدلات متناقصة (أي يعني الإنتاج الكلي) أقصى قيمة له وهو مستوى الإنتاج مثلا 119 عند الإنتاجية الحدية للعمل (Pm_L) تواصل تناقصها (أي تنعدم حتى أن المنحنى (Pm_L) يصبح تحت الإنتاجية المتوسطة (PM_L) (المنحنى). تسمى هذه المرحلة بمرحلة الإنتاج وتعتبر المعقلة إقتصاديا لأن الربح يكون عند أكبر قيمة. هذه المرحلة تمتد من $L=4$ إلى غاية $L=8$

- المرحلة الثالثة : $L \in [Pm_L = 0 \ ; \ L = 8]$ يبدأ الإنتاج الكلي بالتناقص حتى أن الإنتاجية الحدية تكون سالبة والإنتاجية المتوسطة متناقصة. هذه المرحلة تسبب خسارة للمؤسسة لأن Pm_L سالبة أي إنتاجية الوحدة المستخدمة سالبة. تمتد هذه المرحلة من $L=8$ إلى $L=b$

4/ قانون تناقص الغلة :

ينص هذا القانون على أن الإنتاج الكلي يتغير بزيادة وحدات العمل، ونجد هذا القانون في الأجل القصير عندما يكون الإنتاج الكلي بدلالة العمل (L) فقط، فتغير الإنتاج الكلي يتراجع في البداية بالزيادة بمعدلات متزايدة كلما أضفنا وحدة واحدة، ثم يزداد بمعدلات متناقصة ليتسم بعدها بالثبات عندما يكون عدد العمال يساوي 7 أو 8 ثم يبدأ بالتناقص حتى الغاية القصوى له (أي أن يبلغ عدد وحدات العمل 10 في هذه الحالة.

يبدأ مفعول قانون تناقص الغلة : من نقطة إذا كان دالة الإنتاج الكلي، أي عندما يبدأ الإنتاج الحدي (Pm_L) بالتناقص وهي عند النقطة العظمى للإنتاج الحدي Max Pm_L، أي أن المفعول في هذه الحالة يبدأ عند : $L = 3$ (رياضيا تكتب من المشتقة الثانية للإنتاج الكلي)

و المشتقة الأولى لدالة الناتج الحدي).

5/ تحديد قيمة L التي يتوقف عندها الناتج الأمثل: يتحدد حجم الناتج الأمثل عندما تكون الناتجية الحدية معدومة ($Pm_L = 0$) ومن خلال الجدول نلاحظ أن:

$Pm_L = 0 \Rightarrow Q^* = 112$ وحدة $\Rightarrow$ **$L^* = 8$ وحدات عمل**

لا يتضاعف حجم الناتج الكلي بمضاعفة العنصر الناتجي العامل عند مستوى الناتج الأمثل، لأن بعد مستوى الناتج الأمثل تنتقل المؤسسة إلى المرحلة الثالثة أين يبدأ الناتج بالتناقص إستنادا لقانون تناقص الغلة.

6/ معنى وجود إنتاج حدي موجب، سالب ومعدوم:

- إنتاج حدي موجب: $Pm_L > 0$ أي $\frac{\Delta Q}{\Delta L} > 0$ يبقى كلما أضفنا وحدة واحدة إضافية من عنصر العمل كلما زاد الناتج الكلي.
- إنتاج حدي معدوم: $Pm_L = 0$ أي $\frac{\Delta Q}{\Delta L} = 0$ يعني أن التغير في الناتج الكلي معدوم، أي الناتج الكلي يكون ثابت عند $L = 7$ و $L = 8$.
- إنتاج حدي سالب: $Pm_L < 0$ أي $\frac{\Delta Q}{\Delta L} < 0$ يعني أن التغير في الناتج الكلي يكون سالب، أي أن وحدة العمل رقم 9 و رقم 10 تتسبب في انخفاض الناتج الإجمالي بوحدة إضافية من وحدات العمل تؤدي إلى انخفاض الناتج.

التمرين الثاني : دالة الانتاج في المدى القصير $Q = -5L^3 + 10L^2 + 20L$

1/ إيجاد دالة انتاج الحدي ودالة انتاج المتوسط للعامل :

← دالة انتاج المتوسط (PML) :

$$PML = \frac{Q}{L} = \frac{-5L^3 + 10L^2 + 20L}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{PML = -5L^2 + 10L + 20}$$

← دالة انتاج الحدي (Pm_L) :

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(-5L^3 + 10L^2 + 20L)}{\partial L}$$

$$\Rightarrow \boxed{Pm_L = -15L^2 + 20L + 20}$$

2/ حساب قيمة (L) التي يتحقق عندها $Pm_L = PML$:

$$Pm_L = PML \Leftrightarrow -15L^2 + 20L + 20 = -5L^2 + 10L + 20$$

$$\Rightarrow -10L^2 + 10L = 0 \Rightarrow 10L(-L + 1) = 0$$

ومنه إما $L = 0$ أو $L = 1$ وبما أن $L = 0$ مرفوضة فإنه عند $L = 1$ يتساوى انتاج الحدي للعامل مع انتاج المتوسط للعامل. وعند هذه النقطة يكون انتاج المتوسط للعامل عند أعظم قيمة له أي :

$$\frac{\partial PML}{\partial L} = 0 \Rightarrow -10L + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 1}$$

3/ حساب مستوى انتاج Pm_L منعدم : يتحقق مستوى انتاج Pm_L منعدم عندما يكون انتاج الحدي معدوم :

$$Pm_L = 0 \Leftrightarrow -15L^2 + 20L + 20 = 0$$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية :

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (20)^2 - 4(-15)(20) = 1600$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1600} = 40$$

$$L_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 40}{2(-15)} = \boxed{-0,66}$$ ومنه مرفوضة

$$L_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 40}{2(-15)} = \boxed{2}$$ مقبول

ومنه : $L^* = 2$ وحدة عمل

وبتعويض قيمة $L^* = 2$ في دالة الانتاج (Q) نحصل على مستوى الانتاج الأمثل وهو:

$$Q^* = -5(2)^3 + 10(2) + 20(2) = 140 \text{ وحدة}$$

14 قد يه مراحل الانتاج الثلاث:

← المرحلة الأولى: تكون في المجال $[L=0, L_1 \left(\frac{PML = PmL}{\frac{\partial PML}{\partial L} = 0}\right)]$

$$[L=0, L_1 = 1[\quad \text{ومنه}$$

تسمى بمرحلة التوسع وتتمثل في الوحدات الأولى (من 0 إلى عدد الوحدات الأمثل الواحد).

← المرحلة الثانية: تكون في المجال $[L_1 \left(\frac{PML = PmL}{\frac{\partial PML}{\partial L} = 0}\right), L^* (PmL = 0)[$

$$[L_1 = 1, L^* = 2[\quad \text{ومنه}$$

تسمى بمرحلة الانتاج وتتمثل في الوحدات الأمثل (من 1 إلى عدد الوحدات يساوي 2).

← المرحلة الثالثة: المجال $[L^* (PmL = 0), L_2 = \infty[$

$$[L^* = 2, L_2 = \infty[\quad \text{ومنه}$$

تسمى بمرحلة الخسارة أو التدهور

التمرين الثالث:

$$Q = 3kL^2 - kL^3$$

1/ أهمية العامل الذي تبدأ عنده الإنتاج الكلي: $(k=10)$

بتعويض $k=10$ في دالة الإنتاج نحصل على الدالة التالية:

$$Q = 30L^2 - 10L^3$$

وبالتالي فإن أقصى إنتاج كلي يمكن تحقيقه من خلال عنصر العمل، ويتحقق ذلك عندما يكون الإنتاج الحدي (P_mL) معدوم.

أولا نحسب الإنتاج الحدي:

$$P_mL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (30L^2 - 10L^3)}{\partial L}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_mL = 60L - 30L^2}$$

$$P_mL = 0 \Leftrightarrow 60L - 30L^2 = 0 \Rightarrow L(60 - 30L) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 & \text{مرفوض} \\ \boxed{L = 2} & \text{مقبول} \end{cases}$$

وبالتالي أهمية العامل التي تبدأ لنا أقصى إشباع هي $L^* = 2$

أهمية الإنتاج الكلي: بتعويض قيمة $L^* = 2$ في دالة الإنتاج الكلي نحصل على مستوى الإنتاج

مثل:

$$Q^* = 30(2)^2 - 10(2)^3 = \boxed{\text{وحدة } 40}$$

2/ تحديد مستوى العامل الذي يبدأ الإنتاج بالتزايد بعد إستقراره عنده:

يزداد الإنتاج بعد إستقراره عندما يكون الإنتاجية الحدية في هذا الأخير أقصى ($\max P_mL$) أي عند نقطة النطاف:

$$\frac{\partial P_mL}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial (60L - 30L^2)}{\partial L} = 0$$

$$\Rightarrow 60 - 60L = 0 \Rightarrow \boxed{L = 1}$$

3/ تحديد مراحل الإنتاج الثلاث:

المرحلة الأولى: $L \in [0, L_1]$ حيث $\left(\frac{\partial PML}{\partial L} = 0 \text{ و } PML = P_mL\right)$ نقطة تقاطع منحنى P_mL و PML

وبالتالي فإن مستوى العمالة الذي ينتهي هذه المرحلة (أقصى مستوى من الإنتاج المتوسط):

$$\left.\begin{aligned} P_mL &= 60L - 30L^2 \\ PML &= \frac{Q}{L} = 30L - 10L^2 \end{aligned}\right\} P_mL = PML \Leftrightarrow 60L - 30L^2 = 30L - 10L^2$$

$$\Leftrightarrow 30L - 20L^2 = 0 \Rightarrow L(30 - 20L) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = 0 & \text{مرفوض} \\ L = \frac{3}{2} = 1.5 & \text{مقبول} \end{cases}$$

و بالتالي فإن مجال مستوى اليد العاملة (وحدات العمل) يكون من $]0,1.5[$.

← المرحلة الثانية: $L^*(P_{mL}=0)$ هي نقطة تقاطع منحنى P_{mL} و P_L حيث $\left(\frac{\partial P_L}{\partial L}=0 \text{ و } P_{mL}=P_L\right)$ [نحسب L^* ثم نعوض في P_L لإيجاد الناتج الأعظمي].

يعني أن مجال مستوى اليد العاملة يكون من $]1,2[$.

← المرحلة الثالثة: L_2 هي حد الإيقاف للإنتاج الكلي ما لانهاية.

يعني أن مجال مستوى العمل يكون من $]2,+\infty[$ ما لانهاية.

4/ نحدد المسار الأمثل التوسع: إذا كان $P_L=1$ ، $P_K=2$

بإشتقاق المسار الأمثل التوسع من شرط تقاطع نجد:

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}}=\frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{6KL-3KL^2}{3L^2-L^3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KL(6-3L)}{L(3L-L^2)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{K=\frac{3L-L^2}{2(6-3L)}}$$

حل التمرين الرابع: دالة الانتاج $Q = 2LK$

1 - إيجاد الانتاج الكلي عند النقطة (A) التي إحداثياتها: $(K, L) = (10, 20)$

$$Q = 2LK = 2(20)(10) = 400$$

2 - إيجاد الانتاجية الحدية والمتوسطة للعمل، إذا كان K ثابت ويساوي 10 وحدة:

هذا يعني أن دالة الانتاج تصبح من الشكل:

$$Q = 2L.10 \Leftrightarrow Q = 20L$$

- الانتاجية المتوسطة للعمل

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{20L}{L} \Rightarrow \boxed{PM_L = 20}$$

- الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial 20L}{\partial L}$$

$$\Rightarrow \boxed{Pm_L = 20}$$

3- إيجاد الانتاجية الحدية والمتوسطة لرأس المال إذا كان L ثابت ويساوي 20:

هذا يعني أن دالة الانتاج تصبح من الشكل:

$$Q = 2 \cdot 20 \cdot K \Rightarrow Q = 40K$$

- الانتاجية المتوسطة لرأس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{40K}{K} \Rightarrow \boxed{PM_K = 40}$$

- الانتاجية الحدية لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (40K)}{\partial K} \Rightarrow \boxed{Pm_K = 40}$$

4 - إيجاد المرونة الجزئية لكل من L و K عند النقطة A:

- المرونة الجزئية للعمل: يعني أن K ثابت ويساوي 10 ودالة الانتاج تصبح بالشكل:

دالة الانتاج: $Q = 20L$

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}$$

$$\Rightarrow E_L = 20 \cdot \frac{20}{400} = 1$$

التفسير اقتصادي:

هذا يعني إذا ارتفع العمل بنسبة 1٪ سيؤدي إلى زيادة الانتاج الكلي بـ 1٪

- المرونة الجزئية لرأس المال (K):

هذا يعني أن دالة الانتاج Q تكون بدلالة رأس المال (K) وبالتالي فالدالة تصبح:

$Q = 40K$ ~~$(Q = 40K)$~~

وبما أن $K = 10$ فإن الانتاج عند هذه النقطة يصبح يساوي $Q = 400$

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}$$

$$E_K = 40 \cdot \frac{10}{400} = 1$$

التفسير اقتصادي: إذا زادت رأس المال بـ 1٪ فإن الانتاج الكلي سيرتفع بـ 1٪

5- نسبة الزيادة في الانتاج الكلي إذا ارتفع كل من العمل ورأس المال بـ 15٪:

عند زيادة L و K تصبح الدالة بالشكل التالي:

$$Q' = 2(1,15L)(1,15K)$$

$$Q' = 2(1,32LK)$$

$$Q' = 2LK + (0,32 \, LK)$$

$$\boxed{Q' = Q + 0,32Q}$$

هذا يعني إذا زاد كل من العمل ورأس المال بـ 15٪ فإن الانتاج الكلي سوف يزيد بـ 0,32٪