

Université Djilali BOUNAAMA de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

L2 Physique Fondamentale

Fonction de la variable complexe

Chapitre 4: L'intégrale complexe

Dr. S.E. BENTRIDI

I. Notions sur les courbes

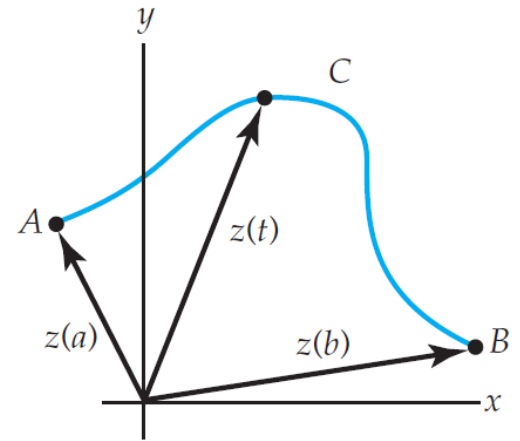
I.0. Rappel sur la notion de courbe paramétrique:

Une courbe paramétrique $C(t)$ est caractérisée par son paramétrisation :

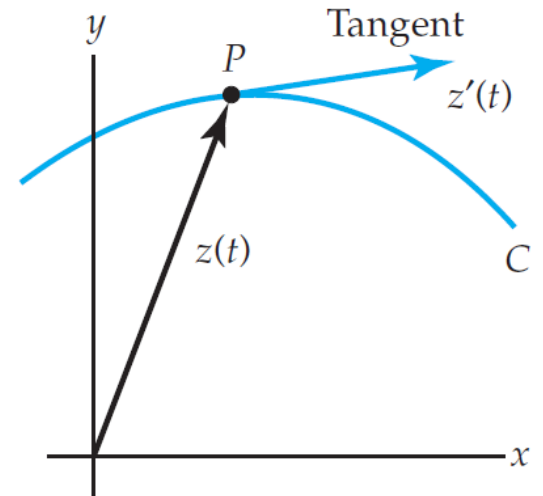
$$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$$

A : $z(a) = x(a) + iy(a)$: le point initial de la courbe C

B : $z(b) = x(b) + iy(b)$: le point final de la courbe C



La notion de courbe lisse, lisse par morceaux ou fermée est contenue dans la formulation précédente. Or, si on suppose que la dérivée de $z(t)$ existe et notée $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, on dit que la courbe $C(t)$ est **lisse** si sa dérivée est continue et non nulle sur l'intervalle $a \leq t \leq b$.



I. Notions sur les courbes

I.1. Les contours :

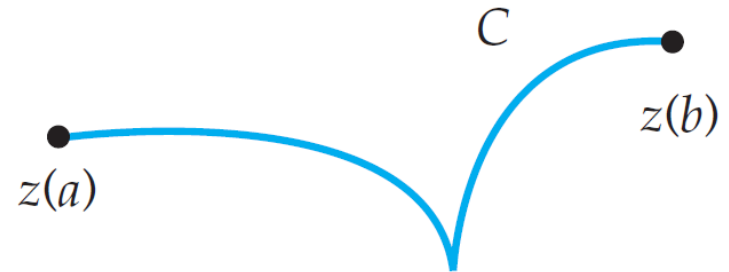
Les notions de courbe lisse, courbe lisse par morceau et courbe fermé, peuvent être interprétée à partir de l'équation paramétrique :

$$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$$

Supposant que la dérivée de $z(t)$ existe et elle donnée par :

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), a \leq t \leq b$$

On dit que C est une courbe lisse sur le plan $\mathbb{C}$ si $z'(t)$ est continue et ne s'annule jamais sur l'intervalle $a \leq t \leq b$.

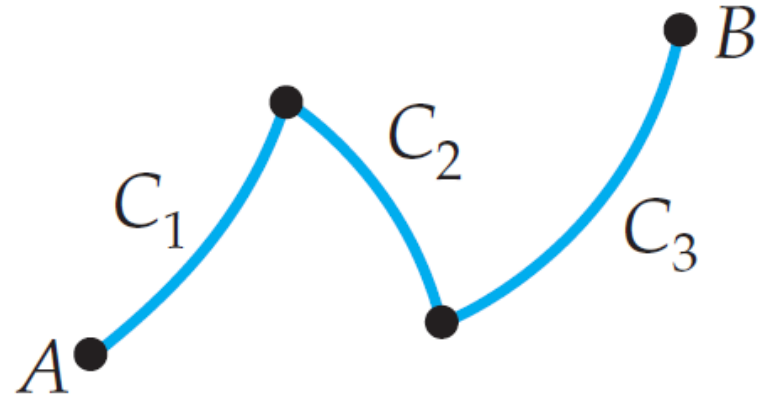


Autrement, la courbe C ne peut avoir de coins aigus ou des pointes.

I. Notions sur les courbes

I.1. Les contours :

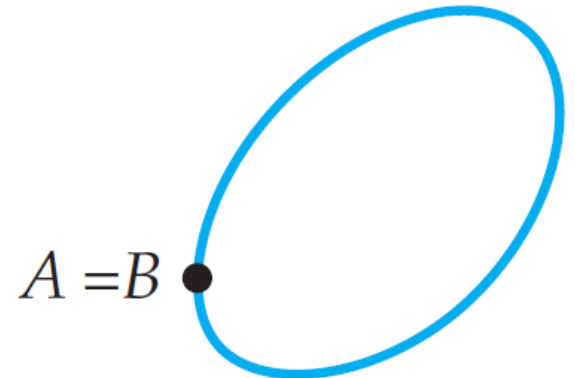
Une courbe lisse (ou régulière) par morceau, possède une tangente tournante continue à l'exception ou les points dans lesquels se joignent les courbes $C_1, C_2, \dots, C_n$.



Une courbe est dite simple si pour tout $t_1 \neq t_2$: $z(t_1) \neq z(t_2)$, à l'exception peut-être à $t = a$ et $t = b$.

Dans ce cas la courbe est dite une courbe fermée si : $z(a) = z(b)$

Elle dite simple fermée si $z(t_1) \neq z(t_2)$ pour tout $t_1 \neq t_2$ et $z(a) = z(b)$.

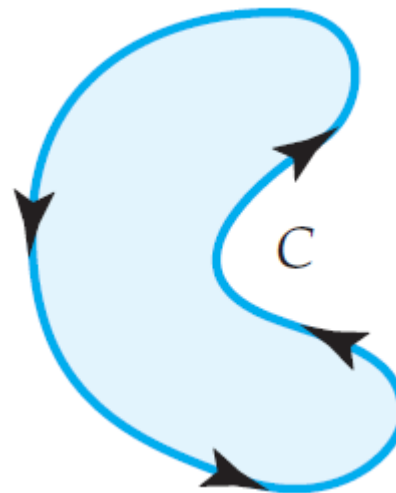
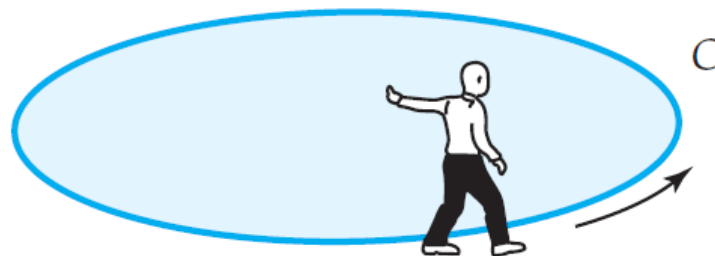


I. Notions sur les courbes

En analyse complexe, une courbe lisse, ou lisse par morceau est appelée aussi « Contour » ou « Chemin ».

on dit qu'une courbe possède une orientation positive si elle évolue dans le sens contraire des aiguilles de la montre pour $a \leq t \leq b$.

À l'inverse, elle possède un sens négative si elle évolue dans le même sens des aiguilles de la montre.



II. L'intégrale complexe

Une intégrale complexe d'une fonction f de variable complexe z qui est définie sur un contour C est donnée par :

$$\int_C f(z)dz$$

II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

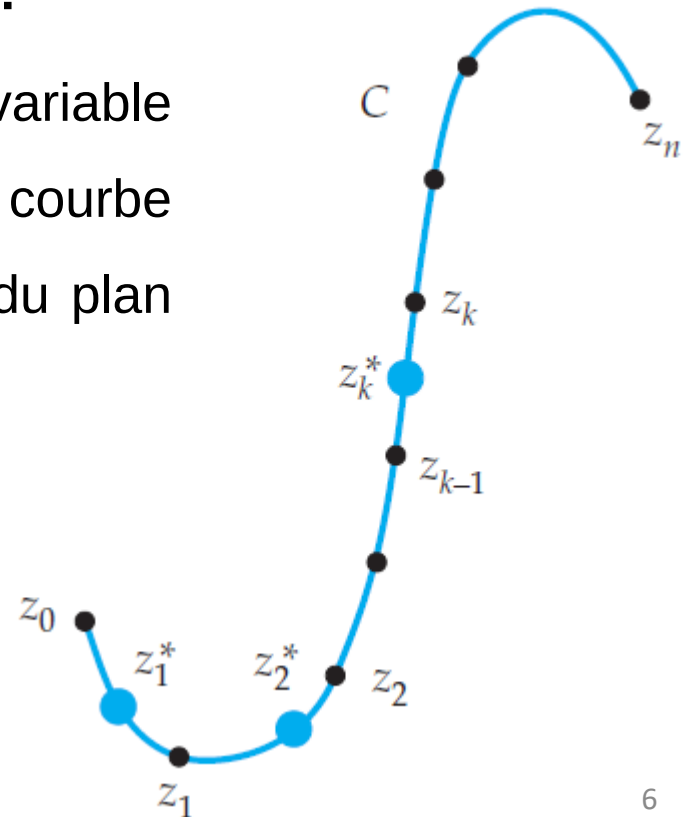
1- Soit une fonction complexe f d'une variable complexe z , définie sur tous les points d'une courbe lisse C qui repose sur une certaine région du plan

$\mathbb{C}$. $C: z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$.

2- Soit P la partition de l'intervalle du paramètre $[a, b]$ en n sous-intervalles :

$[t_{k-1}, t_k]$ de longueur $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$



II. L'intégrale complexe

Une intégrale complexe d'une fonction f de variable complexe z qui est définie sur un contour C est notée : $\int_C f(z)dz$

II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

Ceci induit une partition de la courbe C en n sous-arcs dont les points initiaux et finaux sont les paires :

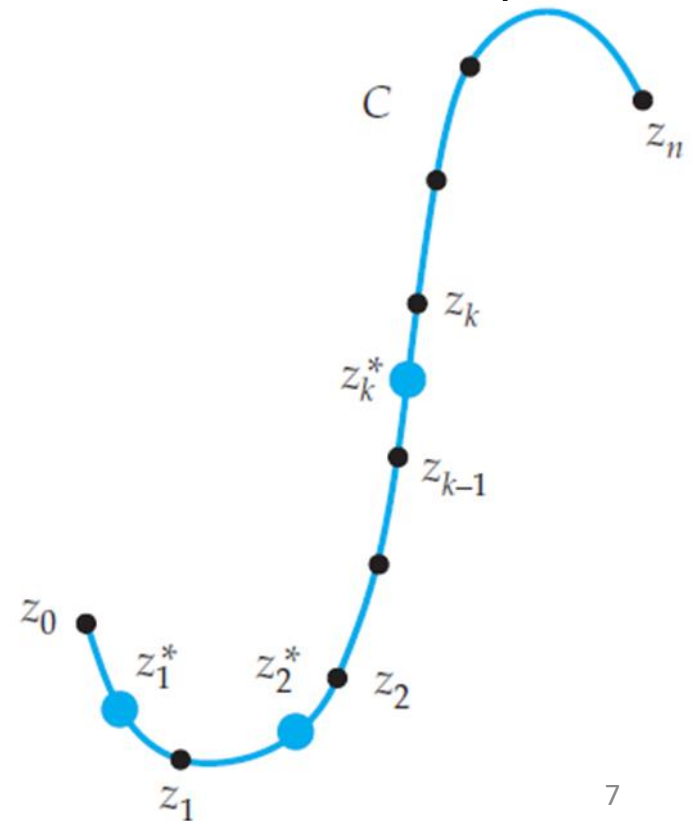
$$z_0 = x(t_0) + iy(t_0) \quad z_1 = x(t_1) + iy(t_1)$$

$$z_1 = x(t_1) + iy(t_1) \quad z_2 = x(t_2) + iy(t_2)$$

....

$$z_{n-1} = x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1}) \quad z_n = x(t_n) + iy(t_n)$$

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}; k = 1, 2, \dots, n$$



II. L'intégrale complexe

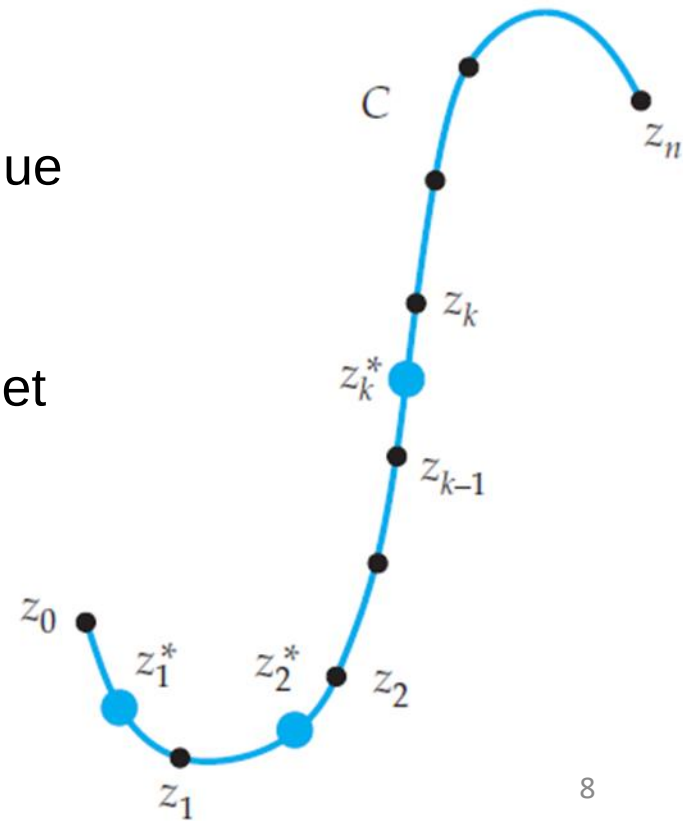
Une intégrale complexe d'une fonction f de variable complexe z qui est définie sur un contour C est notée : $\int_C f(z)dz$

II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

3- Soit $\|P\|$ la norme de la partition P de $[a, b]$, qui est la longueur maximale des sous-intervalles Δt_k .

4- On choisit un point : $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ sur chaque sous arc de C .

5- on forme n produits : $f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ et on somme ces produits : $\sum_{k=1}^n f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$



II. L'intégrale complexe

II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

Définition 1 : Intégrale complexe

L'intégrale complexe de f sur C est définie par :

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$$

Si la limite dans la définition 1 existe alors on dit que f est intégrable sur C . Cette limite existe pour f continue en tout point de C et pour C soit lisse ou lisse par morceaux.

On utilise la notation : $\oint_C f(z)dz$ pour une intégrale complexe sur une courbe fermée orientée positivement et $-\oint_C f(z)dz$ dans le cas inverse. Une intégrale complexe est en effet une intégrale de contour.

II. L'intégrale complexe

II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

Définition 1 : Intégrale complexe

L'intégrale complexe de f sur C est définie par :

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$$

La définition précédente peut être également interprétée comme suit:

Prenons: $f(z) = u + iv$; $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ et réécrivons la limite comme:

$$\int_C f(z) dz = \lim \sum (u + iv)(\Delta x + i\Delta y)$$

Après distribution on obtient:

$$\int_C f(z) dz = \lim \left[\sum (u\Delta x - v\Delta y) + i \sum (v\Delta x + u\Delta y) \right]$$

Ce qui peut s'écrire en passant à l'intégrale:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

II. L'intégrale complexe

II.2. Fonction complexe à variable réelle :

En général si f_1 et f_2 sont des fonctions réelles pour une variable réelle t alors : $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ est une fonction complexe (à valeurs complexes) de la variable réelle t sur l'intervalle : $a \leq t \leq b$, alors on peut écrire que :

$$\int_a^b f(t).dt = \int_a^b f_1(t).dt + i \int_a^b f_2(t).dt$$

On notera les propriétés suivantes pour $f(t)$ et $g(t)$:

$$(1) \int_a^b k.f(t)dt = k \int_a^b f(t)dt ; k = Cte \in \mathbb{C} ;$$

$$(2) \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt ;$$

$$(3) \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt ; (4) \int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$$

II. L'intégrale complexe

II.2. Fonction complexe à variable réelle :

Exercice 1 : Évaluez l'intégrale $\int_C \bar{z} dz$; $C: x = 3t, y = t^2$; $-1 \leq t \leq 4$

Solution:

Par définition la courbe paramétrique C est $z(t) = x(t) + iy(t) = 3t + it^2$

Donc, comme $f(z) = \bar{z}$ alors $f(z) = 3t - it^2$

De même : $dz = \frac{dz}{dt} dt = z'(t)dt = (3 - 2it)dt$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{-1}^4 (3t + it^2)(3 - 2it)dt = \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t + i3t^2)dt \\ \int_C f(z)dz &= \left[\frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + it^3 \right]_{-1}^4 = 195 + i65\end{aligned}$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Théorème 4.1 : Si f est continue sur une courbe lisse C donnée par :
 $z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$, alors :

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) \cdot z'(t) \cdot dt$$

Exercice 2 : Évaluer l'intégrale :

$$\oint_C \frac{1}{z} dz, C: x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Exercice 2 : Évaluer l'intégrale :

$$\oint_C \frac{1}{z} dz, C: x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solution:

Dans ce cas $C: z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$

Nous avons également: $dz = \frac{dz}{dt} dt = z'(t)dt = ie^{it} dt$

De même : $f(z) = \frac{1}{z} = e^{-it}$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Théorème 4.2 : Propriétés :

Supposons les fonctions complexes f et g continues sur un domaine D et C est une courbe lisse reposant entièrement sur D , alors :

$$(1) \int_C k \cdot f(z) dz = k \int_C f(z) dz ; k = Cte \in \mathbb{C} ;$$

$$(2) \int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz ;$$

$$(3) \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz ;$$

$$(4) \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

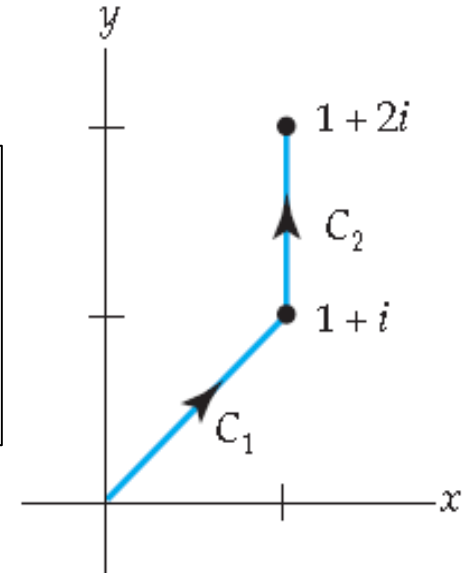
II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Exercice 3 : Évaluez l'intégrale complexe suivante:

$$\int_C (x^2 + iy^2) dz$$

Sur la courbe C montrée sur la figure ci-contre.



Solution:

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2) dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2) dz$$

Sur C_1 : $y = x \rightarrow z = x + iy = x(1 + i) \rightarrow dz = (1 + i)dx$

Sur C_2 : $x = 1 \rightarrow z = 1 + iy \rightarrow dz = idy$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 (x^2 + ix^2)(1 + i) dx + \int_1^2 (1 + iy^2) idy$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 (1 + i)(1 + i)x^2 dx + \int_1^2 (1 + iy^2) idy$$

$$\int_C f(z) dz = (1 + i)^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[iy - \frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 = \frac{2}{3}i + i - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3} + i\frac{5}{3}$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Théorème 4.3 : Théorème de la borne supérieure

Si f est une fonction continue sur une courbe lisse C et si $|f(z)| \leq M$

pour tout z sur C , alors : $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$; où :

$$L = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dz = \int_a^b |z'(t)| dz$$

Exercice 4 : Trouver une limite supérieure pour la valeur absolue de :

$$\oint \frac{e^z}{z^2+1} dz \text{ ou } C: |z| = 4$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Exercice 4 : Trouver une limite supérieure pour la valeur absolue de :

$$\oint \frac{e^z}{z^2+1} dz \text{ ou } C: |z| = 4$$

Solution:

D'après le théorème 4.3 :

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+1} \rightarrow |f(z)| = \left| \frac{e^z}{z^2+1} \right| \leq M = \frac{|e^z|}{|z^2+1|} = \frac{|e^z|}{|z|^2+1} = \frac{e^4}{17}$$
$$\int_C dz = L = 8\pi$$

Ceci implique:

$$\int_C f(z) dz \leq ML = \frac{8\pi e^4}{17}$$

II. L'intégrale complexe

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Remarques : il n'existe pas une paramétrisation unique d'une courbe C :

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z(t) = e^{i2\pi t} = \cos t + i \sin t ; 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = e^{i\frac{\pi t}{2}} = \cos \frac{\pi t}{2} + i \sin \frac{\pi t}{2} ; 0 \leq t \leq 4$$

C'est une paramétrisation du cercle unitaire : $C: |z| = 1$

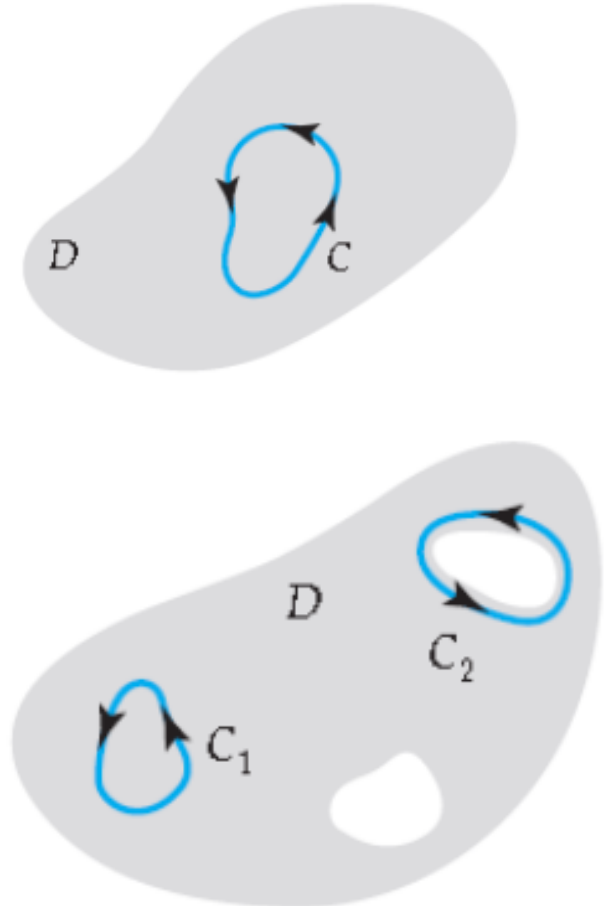
II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.1. Domaines simplement et multiplement connexes:

Un domaine D est dit simplement connexe si quelque soit la courbe simple et fermée C , entièrement reposant sur D , peut être rétrécie dans un point, sans qu'elle ne quitte D .

D'autre part, un domaine est dit multiplement connexe, n'est pas simplement connexe, c-à-d contient des vides ou trous, tel que s'il existe des courbes simple et fermé reposant entièrement sur D , elles ne peuvent pas être rétrécie sans qu'elle ne quitte le domaine D .



On parle de domaine, doublement connexe (1 trou), triplement connexe (2 trous), etc...

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.2. Théorème de Cauchy :

Théorème 4.4 :

Supposant que la fonction f est analytique sur un domaine simplement connexe D et que f' est continue sur D , alors, pour tout contour simple et fermé C dans D ,

$$\text{on a : } \oint_C f(z)dz = 0$$

Indication : la démonstration peut être faite en utilisant le théorème de Green qui exprime une intégrale de ligne en une intégrale double (surface)

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Avec : $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.3. Théorème de Cauchy-Goursat

Théorème 4.5 :

Supposant que la fonction f est analytique sur un domaine simplement connexe D . Alors pour tout contour simple fermé C dans D , on a :

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Exercice 5 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C e^z dz$ en utilisant le théorème de Cauchy-Goursat sur un contour quelconque sur $\mathbb{C}$.

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

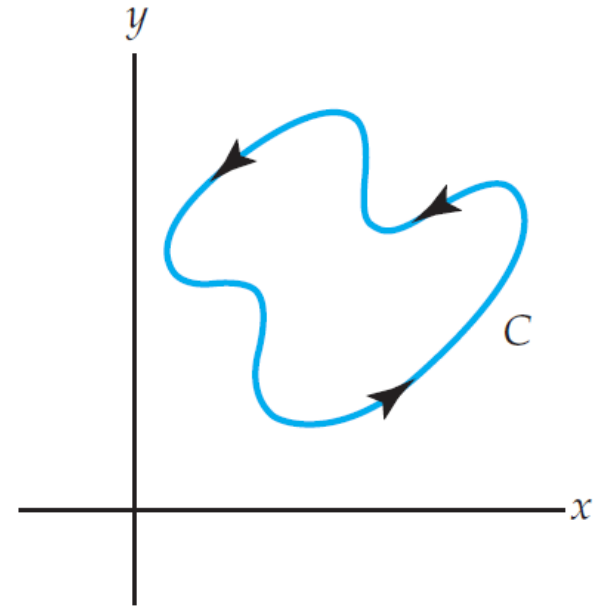
III.3. Théorème de Cauchy-Goursat

Exercice 5 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C e^z dz$ en utilisant le théorème de Cauchy-Goursat sur un contour quelconque sur $\mathbb{C}$.

Solution:

La fonction e^z étant entière sur tout $\mathbb{C}$ donc elle est analytique sur tout le plan complexe (dans chaque point) ainsi que sur tout contour fermé simple, ce qui implique d'après le théorème de

Cauchy-Goursat: $\oint_C e^z dz = 0$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.3. Théorème de Cauchy-Goursat

Une autre variante du théorème de Cauchy-Goursat peut être stipulée comme suit :

Si f est analytique sur tout point dans et sur une courbe C simple et fermée, alors : $\oint_C f(z)dz = 0$

Exercice 6 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C \frac{1}{z^2} dz$;

$$C: \text{ellipse: } (x - 2)^2 + \frac{1}{4}(y - 5)^2 = 1$$

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.3. Théorème de Cauchy-Goursat

Exercice 6 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C \frac{1}{z^2} dz$;

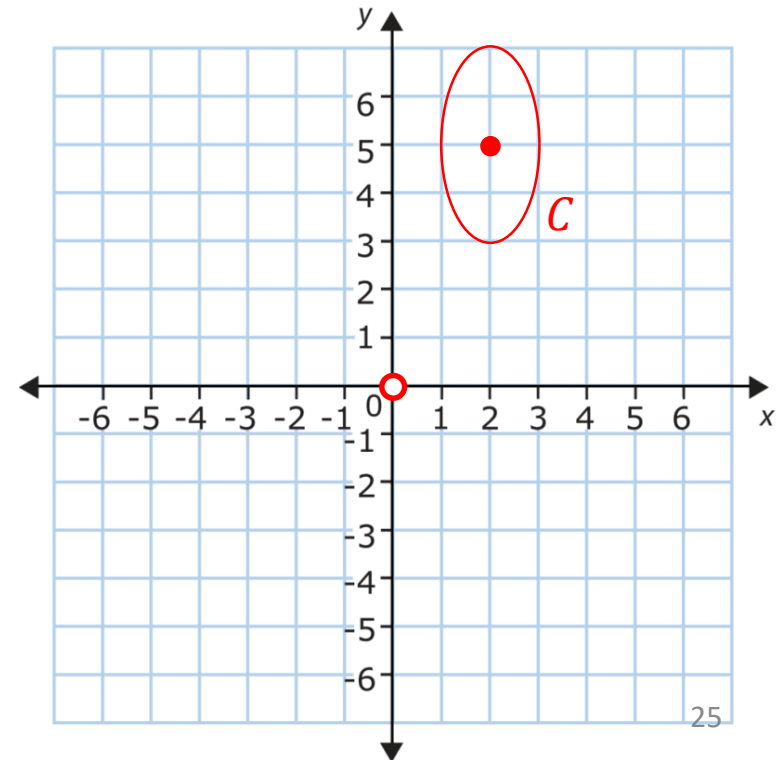
$$C: \text{ellipse: } (x - 2)^2 + \frac{1}{4}(y - 5)^2 = 1$$

Solution:

La fonction rationnelle $\frac{1}{z^2}$ est définie sur tout le plan complexe sauf au point $z = 0$.

Ce point n'appartient pas à l'intérieur du contour fermé d'intégration, ce qui implique qu'on peut utiliser le théorème précédent

pour obtenir: $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$



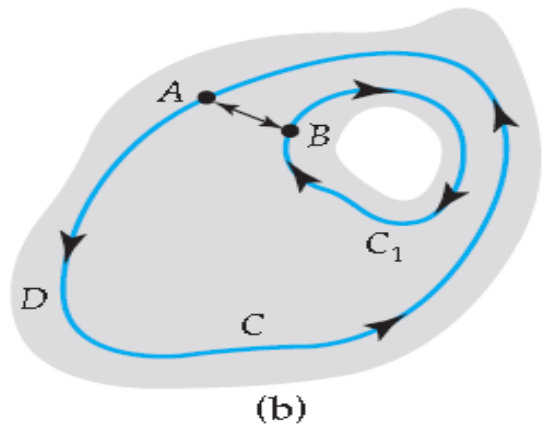
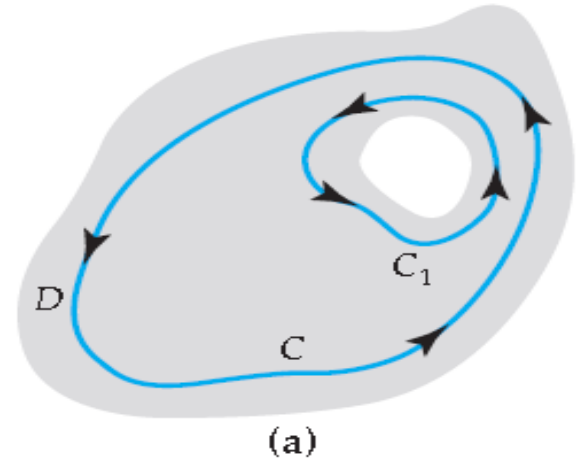
II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Si f est analytique sur un domaine D multiplement connexe, qu'on supposera pour faire simple, que c'est un domaine doublement connexe (un seul trou). C et C_1 sont des contours simples fermés sur D .

C_1 entoure le trou (vide) montré sur la figure ci-contre. f est analytique sur tout point sur chaque contour et à l'intérieur de C et l'extérieur de C_1 .



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

En introduisant le raccourci AB , la région limitée entre les deux courbes devient maintenant simplement connexe, alors on peut écrire :

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz + \oint_{-AB} f(z)dz + \oint_{-C_1} f(z)dz = 0$$

Donc :

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$

C'est « le principe de la déformation du contour ».

En appliquant ce principe, il nous sera possible de remplacer un contour complexe par un autre plus simple pour calculer la même intégrale

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 7 : Évaluez l'intégrale complexe :

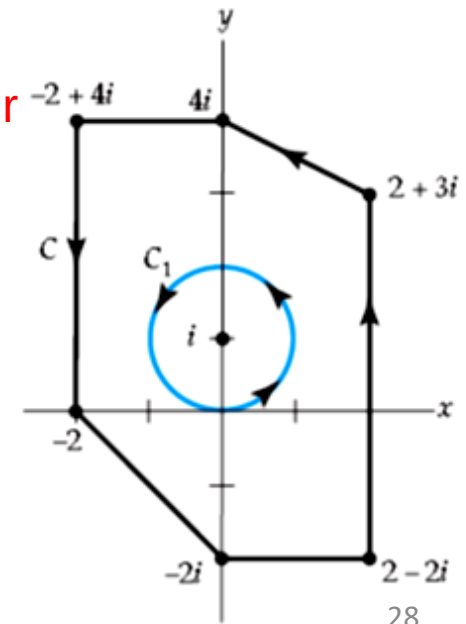
$$\oint \frac{dz}{z - i}$$

sur un des contours montrés sur la figure ci-contre.

Solution:

Pour plus de commodité on choisit de calculer l'intégrale sur le contour simple C_1 : $|z - i| = 1 \Leftrightarrow z - i = e^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z - i} = \oint_{C_1} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi$$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Le résultat de l'exercice précédent (exo.7), peut être généralisé comme suit :

$$\oint \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i; & n = 1 \\ 0; & n \neq 1 \end{cases}$$

$z_0 = Cte \in \mathbb{C}$ à l'intérieur de tout contour C simple fermé.

Exercice 8 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z+3} dz ; C: |z - 2| = 2$$

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

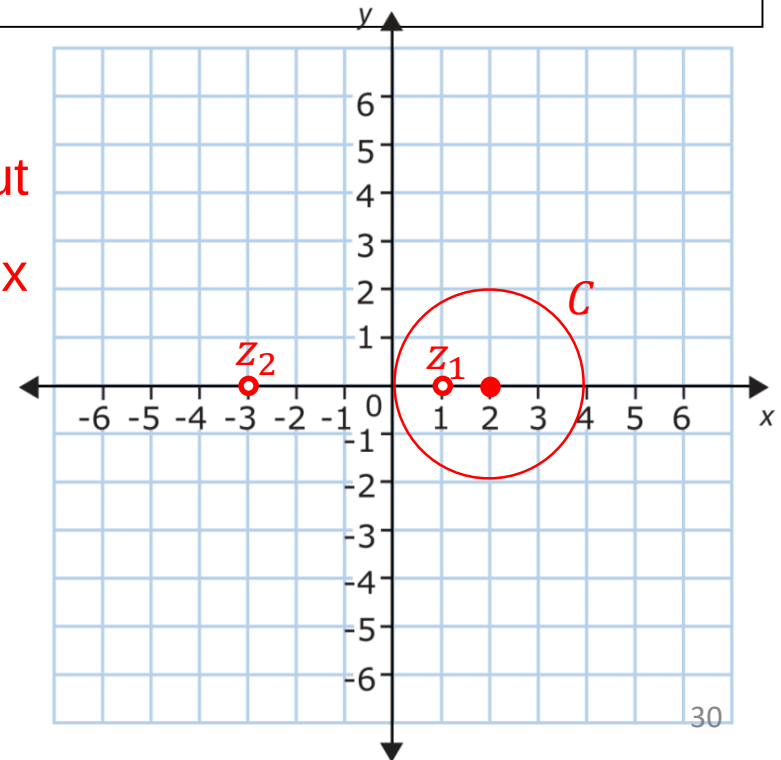
Exercice 8 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z+3} dz ; C: |z-2| = 2$$

Solution:

Comme le dénominateur $z^2 - 2z + 3$ peut s'écrire : $(z-1)(z+3)$. Il s'annule aux deux points: $z_1 = 1$ et $z_2 = -3$

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z+3} dz \\ &= \underbrace{3 \oint_C \frac{dz}{z-1}}_{i6\pi} + \underbrace{2 \oint_C \frac{dz}{z+3}}_0 = i6\pi \end{aligned}$$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

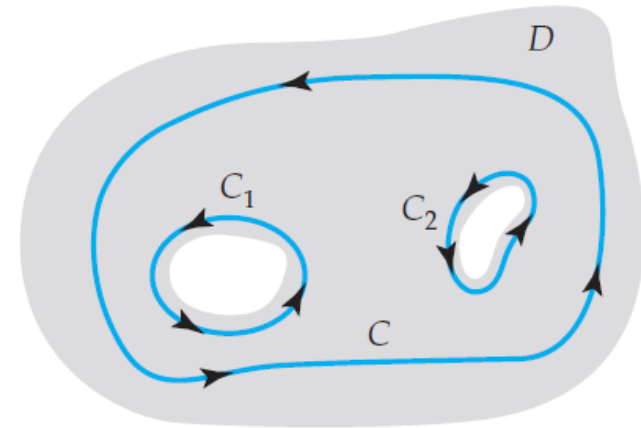
III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Dans le cas où les contours C, C_1 et C_2 sont des contours simples fermés comme c'est montré dans la figure ci-contre (a); où la fonction $f(z)$ est analytique sur chacun des trois contours ainsi qu'à chaque point intérieur à C mais extérieur à C_1 et C_2 , alors en introduisant des court-circuit entre C_1 et C ainsi qu'entre C_2 et C comme c'est montré sur la figure (b), il en découle alors:

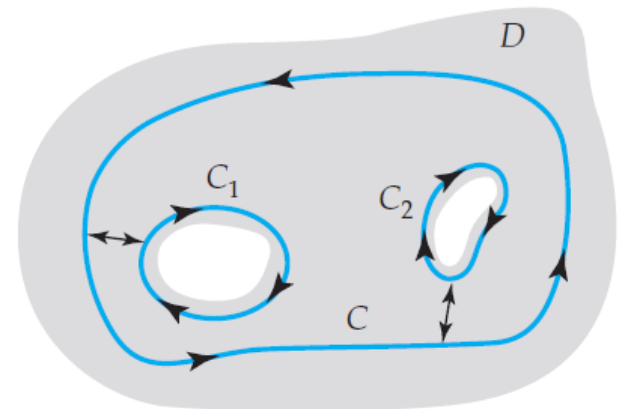
$$\oint_C f(z)dz + \oint_{-C_1} f(z)dz + \oint_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

Le théorème suivant résumé le résultat général de cas particulier pour un domaine D multiplement connexe avec n « trous »



(a)



(b)

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Théorème 4.6 :

Supposant $C, C_1, C_2, \dots, C_n$ des contours simples fermés avec une orientation positive tel que $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont à l'intérieur de C mais les régions internes de chaque $C_k; k = 1, 2 \dots n$ n'ont aucun point en commun.

Si f est analytique sur chaque contour et à chaque point intérieur de C et extérieur de $C_k; k = 1, 2 \dots n$:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz$$

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 9 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz ; C: |z| = 4$$

Solution:

On peut écrire $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ce qui implique que la fonction

$\frac{1}{z^2+1}$ n'est pas analytique aux deux points $z_1 = i$ et $z_2 = -i$. Les deux

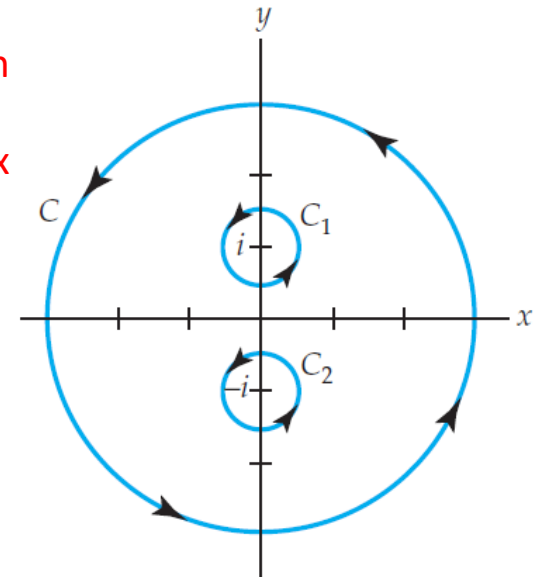
points résidents à l'intérieur du contour $C: |z| = 4$

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i} \frac{dz}{z + i}$$

L'intégrale devient:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \oint_C \left[\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right] dz$$

On entoure les deux points (singuliers) par deux contours C_1 et C_2 comme c'est montré sur la figure: $C_1: |z - i| = \frac{1}{2}$ et $C_2: |z + i| = \frac{1}{2}$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 9 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz ; C: |z| = 4$$

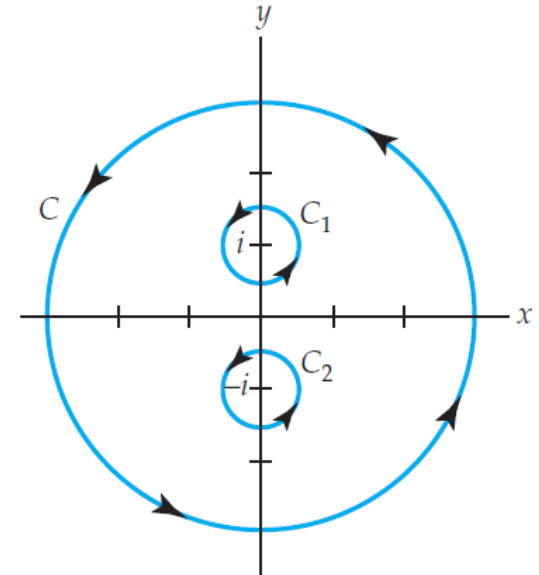
Solution:

On peut réécrire l'intégrale comme suit:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \left[\frac{dz}{z - i} - \frac{dz}{z + i} \right] + \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \left[\frac{dz}{z - i} - \frac{dz}{z + i} \right]$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \underbrace{\oint_{C_1} \frac{dz}{z - i}}_{i2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{dz}{z + i}}_0 + \frac{1}{2i} \underbrace{\oint_{C_2} \frac{dz}{z - i}}_0 - \underbrace{\frac{1}{2i} \oint_{C_2} \frac{dz}{z + i}}_{i2\pi}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi - \pi = 0$$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Théorème 4.7 : Analyticité implique indépendance du chemin d'intégrale

Supposant que la fonction f est analytique dans un domaine simplement connexe D et que C est un contour quelconque entièrement dans D , alors :

$\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin C .

Définition 2 : Supposant f continue sur D . Si une fonction F existe, tel que : $F'(z) = f(z)$ en chaque point sur D , alors F est appelée fonction primitive de f .

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 10 : Évaluez l'intégrale $\int_C \cos z \, dz$ entre $z_0 = 0$ et $z_1 = 2 + i$

Solution:

$$\int_C \cos z \, dz = \int_0^{2+i} \cos z \, dz = [\sin z]_0^{2+i} = \sin(2 + i) - \sin(0) = \sin(2 + i)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \rightarrow \sin(2 + i) = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i}$$

$$= \frac{0,367(\cos 2 + i \sin 2) - 2,718(\cos 2 - i \sin 2)}{2i} \approx 1,4 - i049$$

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Quelques conclusions :

- C est fermé, alors : $z_0 = z_1 \rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$
- Si une fonction continue f possède une primitive F sur D , alors $\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin

Si f est une fonction continue et que $\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin C dans D , alors f possède une primitive F sur D

II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 11 : Évaluez l'intégrale $\int_C \frac{1}{z} dz$ sur C

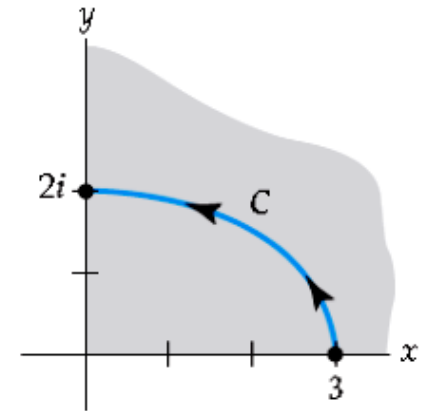
Solution:

Supposant que D est le quart positif du plan complexe ($x > 0; y > 0$). Dans ce cas on peut admettre que la fonction $F(z) = \text{Ln } z$ est la primitive de la fonction $f(z) =$

$F'(z) = \frac{1}{z}$, ou les deux fonctions sont analytiques sur le domaine D :

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_3^{2i} \frac{dz}{z} = [\text{Ln } z]_3^{2i} = \text{Ln } 2i - \text{Ln } 3 = \log 2 + i \frac{\pi}{2} - \log 3$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = -0,4055 + i1,5708$$



II. L'intégrale complexe

III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Exercice 12 : Évaluez l'intégrale $\int_C \frac{1}{z^{1/2}} dz$ sur C

C : *segment droit entre $z_0 = 0$ et $z_1 = 9$*

II. L'intégrale complexe

IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

1^{ère} Formule : supposant f analytique sur un domaine D simplement connexe et que C est une courbe simple fermé dans D . Pour tout point $z_0 \in C$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Exercice 13 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz$ sur $C: |z| = 2$

Solution:

Si on identifie $f(z) = z^2 - 4z + 4$ et $z_0 = -i$ comme un point dans le cercle C , donc d'après la formule de Cauchy:

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + i4) = 2\pi(-4 + i3)$$

II. L'intégrale complexe

IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

1^{ère} Formule : supposant f analytique sur un domaine D simplement connexe et que C est une courbe simple fermé dans D . Pour tout point $z_0 \in C$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Exercice 14 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$ sur $C: |z - 2i| = 4$

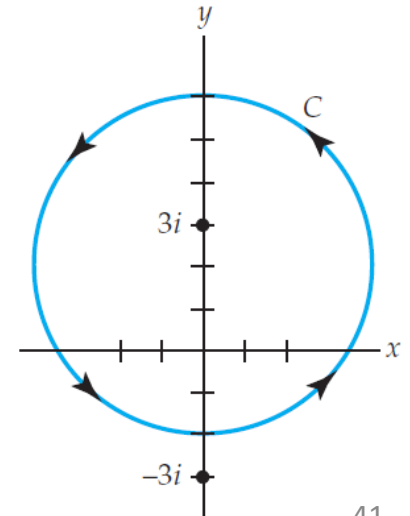
Solution:

on a: $z^2 + 9 = (z - i3)(z + i3) \rightarrow \oint_C \frac{zdz}{z^2+9} = \oint_C \frac{zdz}{(z-i3)(z+i3)}$

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2+9} = \oint_C \left(\frac{z}{z+i3} \right) \frac{dz}{z-i3}$$

Avec le choix: $f(z) = \frac{z}{z+i3}$ qui est analytique sur tout le domaine délimité par le cercle C , on obtient:

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2+9} = 2\pi i f(3i) = i\pi$$



II. L'intégrale complexe

IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

2^{ème} Formule : supposant f analytique sur un domaine D simplement connexe et que C est une courbe simple fermé dans D . Pour tout point $z_0 \in C$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Exercice 15: Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz$ sur $C: |z| = 1$

II. L'intégrale complexe

IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

Exercice 15: Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz$ sur $C: |z| = 1$

Solution:

On peut constater que l'intégrant: $\frac{z+1}{z^4+2iz^3}$ n'est pas analytique en $z_1 = 0$ et $z_2 = -2i$ mais c'est uniquement $z_1 = 0$ est inclus dans le contour C donc:

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{z+1}{z^3(z+i2)} = \frac{(z+1)/(z+i2)}{z^3}$$

Selon la seconde formule de Cauchy, on peut identifier: $z_0 = 0$ et $n = 2$ avec le choix:

$$f(z) = \frac{z+1}{z+i2}$$

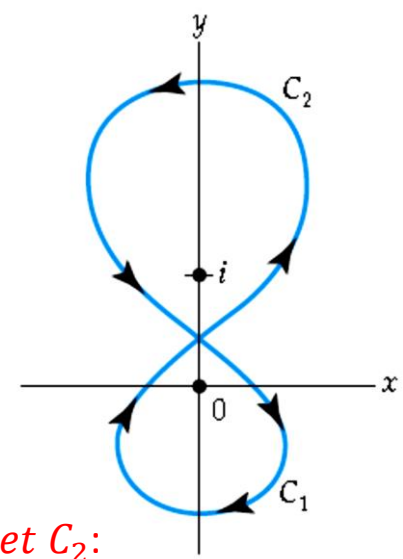
Donc, on peut écrire:

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz = \oint_C \frac{(z+1)/(z+i2)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$$

II. L'intégrale complexe

IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

Exercice 16: Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz$ sur $C = C_1 + C_2$



Solution:

Dans ce cas on écrit l'intégrale sur C comme la somme de deux intégrales sur C_1 et C_2 :

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz$$

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = - \underbrace{\oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z} dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2} dz}_{I_2}$$

Pour I_1 : $z_0 = 0, f(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2}$ avec $f(0) = -3$: $I_1 = 2\pi i f(0) = -6\pi i$

Pour I_2 : $z_0 = i, n = 1, f(z) = \frac{z^3+3}{z}; f'(z) = \frac{(2z^3-3)}{z^2} \rightarrow f'(i) = 3 + i2$: $I_2 = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = -4\pi + 6\pi i$

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + -4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i$$