Solution de la Série 3 : Systèmes linéaires

<u>Système de 1^er^ Ordre</u>

1. Définition

Un système est dit de 1er ordre s'il est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\tau\frac{dy}{dt}+y(t)=ke(t)\Rightarrow \tau pY(p)+Y(p)=kE(p)\Rightarrow \boxed{H(p)=\frac{Y(p)}{E(p)}=\frac{k}{1+\tau p}}$$

K : gain statique

τ: constante du temps.

2.1.Réponse à un échelon

$$\frac{Y(p)}{E(p)}=\frac{k}{1+\tau p}\quad\Rightarrow\quad Y(p)=\frac{k}{1+\tau p}E(p)$$

$$E(p)=\frac{1}{p}\quad\Rightarrow\quad Y(p)=\frac{k}{p(1+\tau p)}\quad \text{donc}\quad \boxed{y(t)=k(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Correction

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$$e(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \;\Rightarrow\; E(p) = RCV_s(p) + V_s(p)$$

Donc $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}$

2. C'est un système de 1[er] ordre avec k=1 et $\tau = RC$

3. $V_s(p) = \dfrac{1}{1+RCp}E(p)$ avec $E(p) = \dfrac{10}{p}$; $\tau = RC = 100x10^{-6} = 10^{-4}\,s$

$$V_s(p) = \frac{10}{p(1+10^{-4}p)} \;\Rightarrow\; v_s(t) = 10(1-e^{-\frac{t}{10^{-4}}}) \;\Rightarrow\; \boxed{v_s(t) = 10(1-e^{-10^4 t})}$$

SYSTEMES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

1. DEFINITION

Un système est dit **linéaire invariant du second ordre** si la réponse **s(t)** est **liée** à l'excitation **e(t) par** une **équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre** :

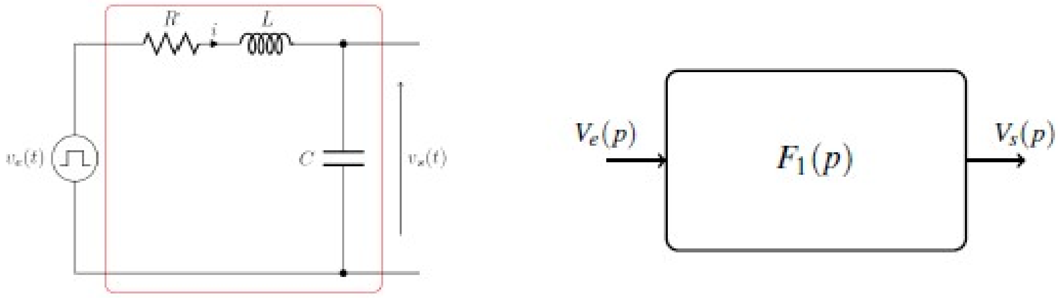
$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0}\frac{ds}{dt} + s(t) = A_0 . e(t)$$

ω_0 : pulsation propre du système
m : coefficient d'amortissement

$$F_1(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\times\xi}{\omega_0}\times p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

1 Exercice 1 : Circuit RLC

Nous nous intéressons dans ce premier exercice au montage représenté à la FIGURE 1.



(a) Montage étudié

(b) Schéma bloc du système

FIGURE 1 – Ciruit RLC

1. Quelle est la relation liant le courant $i(t)$ et la tension $v_s(t)$? De même, quelle est la relation liant la tension aux bornes de l'inductance et le courant $i(t)$.

$$i(t) = C \times \frac{dv_s(t)}{dt}$$
$$v_L(t) = L \times \frac{di(t)}{dt}$$

2. A partir de la loi des mailles, exprimer l'équation différentielle du second ordre liant $v_e(t)$ et $v_s(t)$

$$v_e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_s(t)$$
$$v_e(t) = R \times i(t) + L \times \frac{di(t)}{dt} \text{ + Vs(t)}$$
$$v_e(t) = RC \times \frac{dv_s(t)}{dt} + LC \times \frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + v_s(t)$$

3. A l'aide des propriétés de la transformée de Laplace étudiées lors du premier TD, déterminer la fonction de transfert liant $V_e(p)$ et $V_s(p)$. La tension de sortie à l'instant $t = 0$ est considérée nulle.

$$V_e(p) = RC \times p \times V_s(p) + LC \times p^2 \times V_s(p) + V_s(p)$$
$$V_e(p) = V_s(p)(1 + RC \times p + LC \times p^2)$$

4. La forme standard d'une fonction de transfert du second ordre est la suivante :

$$F_1(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\times\xi}{\omega_0} \times p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Exprimer sous cette forme la fonction de transfert $F_1(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$ définie à la question précédente. Vous donnerez l'expression des constantes K, ξ et ω_0. Vous préciserez également la signification de ces constantes.

$$F_1(p) = \frac{V_s(p}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RC \times p + LC \times p^2}$$

D'où :
- Gain statique :$K = 1$
- Coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
- Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

2 Exercice 2 : Identification d'un système du second ordre - Régime pseudo-périodique

Afin d'asservir un système, il est impératif de savoir l'identifier. Une manière usuelle de procéder est de solliciter le système avec un échelon indiciel en entrée et d'observer comment évolue la sortie. La réponse indicielle d'un système $F_2(p)$ est représentée à la FIGURE 2.

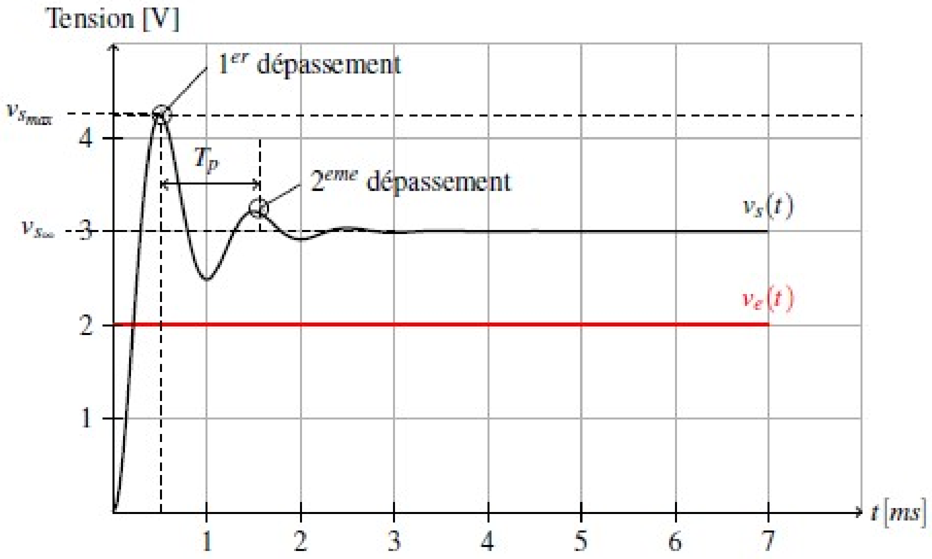


FIGURE 2 – Réponse indicielle

1. Déterminer le gain statique K du système.

Le gain statique est le gain existant entre entrée et sortie d'un système en **régime permanent** :

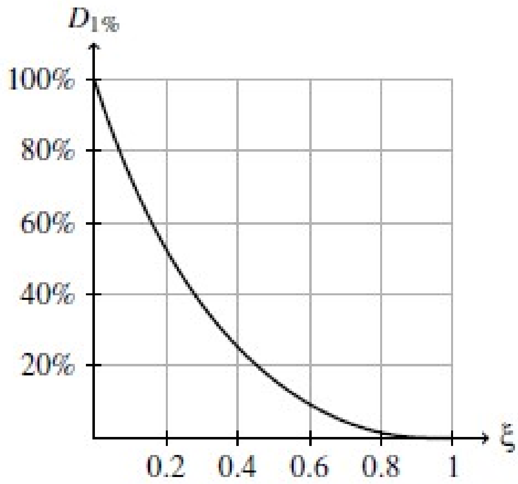
$$K = \frac{v_{s_\infty}}{v_{e_\infty}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

2. Mesurer la valeur du premier dépassement du système.

   Le premier dépassement est mesuré de la manière suivante :

$$D_{1\%} = \frac{v_{s_{max}} - v_{s_\infty}}{v_{s_\infty}} = \frac{4,2-3}{3} = 0,4 \Rightarrow 40\%$$

3. A l'aide du graphique ci-dessous, déterminer la valeur du coefficient d'amortissement ξ du système.



   Le coefficient d'amortissement correspondant à un premier dépassement de 40% est de 0,28.

4. Mesurer la valeur de la pseudo période T_p du système.

   Il est possible de mesurer la valeur de la pseudo-période (T_p) du système directement sur l'essai indiciel :

$$T_p = 1ms$$

5. En déduire, à l'aide de la relation ci-dessous, la valeur du la pulsation propre du système (ω_0)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1 \times T_p \times \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1 \times 10^{-3} \times \sqrt{1-0,28^2}} = 6544 rad/s$$