

Université Djilali BOUNAAMA de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

L2 Physique Fondamentale

Fonction de la variable complexe

Chapitre 3: Les fonctions élémentaires

Dr. S.E. BENTRIDI

I. Fonction exponentielle complexe

Déf.3.1 :

La fonction e^z définie par:

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Est appelée fonction exponentielle complexe

Théorème 3.1 :

La fonction exponentielle e^z est entière et sa dérivée est donnée par:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

I. Fonction exponentielle complexe

Exercice 1 : calculer les dérivées des fonctions suivantes:

(a) $iz^4(z^2 - e^z)$; (b) $\exp\{z^2 - (1 + i)z + 3\}$

I. Fonction exponentielle complexe

Exercice 1 : calculer les dérivées des fonctions suivantes:

(a) $iz^4(z^2 - e^z)$; (b) $\exp\{z^2 - (1 + i)z + 3\}$

Solution :

$$(a) \frac{d}{dz} \left(iz^4(z^2 - e^z) \right) = 4iz^3(z^2 - e^z) + iz^4(2z - e^z)$$

$$(b) \frac{d}{dz} \left(e^{z^2 - (1+i)z + 3} \right) = (2z - 1 - i)e^{z^2 - (1+i)z + 3}$$

I. Fonction exponentielle complexe

I.2. Propriétés algébriques :

Si z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ alors on a :

$$(1) e^0 = e^{0+i0} = 1$$

$$(2) e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

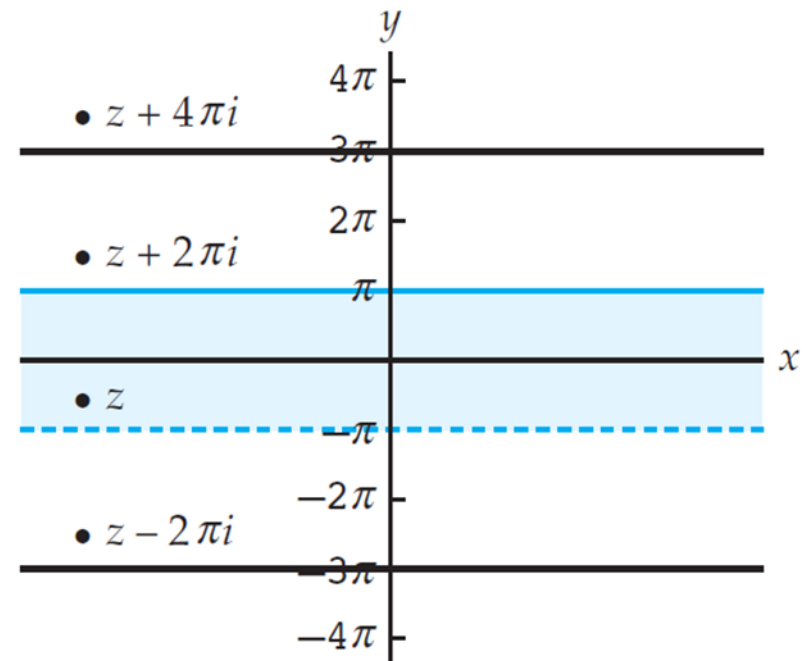
$$(3) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}$$

$$(4) (e^{z_1})^n = e^{nz_1}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(5) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$(6) |e^x| = e^x; \quad \forall x; e^x > 0 \quad \text{et} \quad \arg(z) = y + 2n\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(7) e^{z+i2k\pi} = e^z, \quad k = \mathbb{Z}$$



Région fondamentale de $\exp(z)$

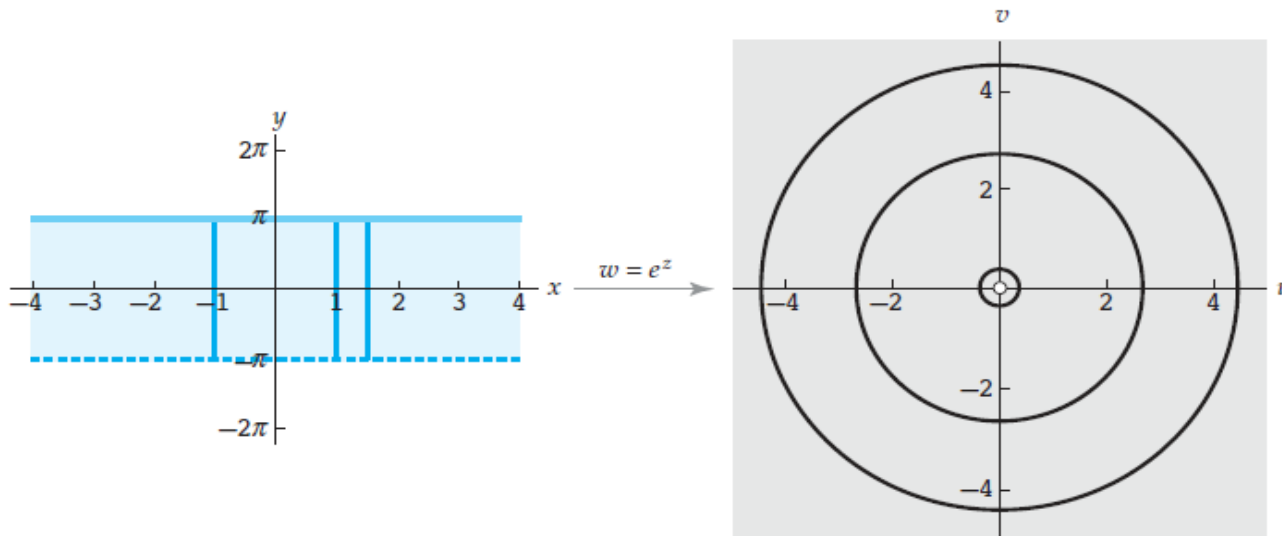
I. Fonction exponentielle complexe

I.3. Transformations sous e^z :

Cas 1 : z est une ligne verticale : $z = a + it$; $a = \text{Cte.}$ et $-\pi < t < \pi$:

Donc sous $e^z = e^a \cdot e^{it} \rightarrow r = e^a$; $\theta = t + 2n\pi$

Ceci montre que pour toute région périodique sous e^z donne lieu à un ensemble de cercles concentriques de rayon $e^a > 0$:



Transformation de segments verticaux sous $\exp(z)$

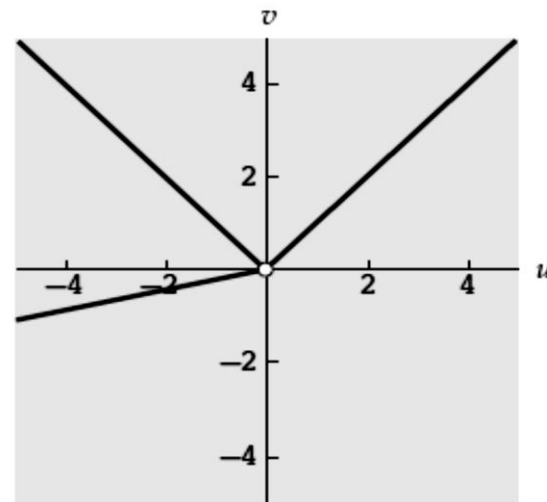
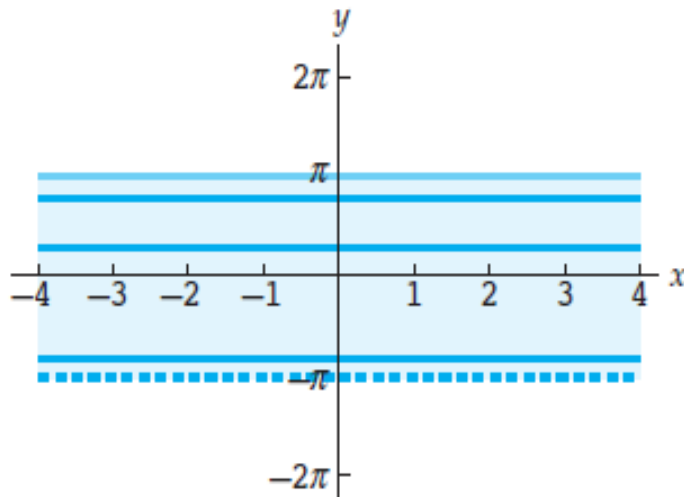
I. Fonction exponentielle complexe

I.3. Transformations sous e^z :

Cas 2 : z est une ligne horizontale : $z = t + ib$; $b = \text{Cte.}$ et $-\infty < t < \infty$

Donc sous $e^z = e^t \cdot e^{ib} \rightarrow s = e^t$ avec $0 < s < \infty$

Les images $w = f(z) = s \cdot e^{ib}$ ce sont des segments droits de longueur $s = e^t$ et qui sont portés sur une direction définie par l'argument b .



Transformation de lignes horizontales sous $\exp(z)$

I. Fonction exponentielle complexe

I.3. Transformations sous e^z :

On résume les propriétés des transformations sous e^z comme suit :

(i) $w = e^z$ transforme la région fondamentale $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$ en un ensemble $|w| > 0$.

(ii) $w = e^z$ transforme le segment vertical : $x = a, -\pi < y \leq \pi$ en un cercle $|w| > e^a$.

(iii) $w = e^z$ transforme la ligne horizontale $-\infty < x < \infty, y = b$ en un rayon porté sur un angle $\arg(w) = b$.

II. Fonction logarithmique complexe

Pour un complexe non nul z on peut montrer que :

$$\text{si } e^w = z, \text{ alors : } w = \log|z| + i \arg(z)$$

A cause de l'infinité des arguments de z , l'équation ci-dessus donne une fonction multivaluée (à valeurs multiples) $w = G(z)$ qui est donnée par la définition suivante :

Déf.3.2.

La fonction multivaluée $\ln z$ définie par :

$\ln z = \log|z| + i \arg(z)$ Est appelée le **Logarithme Complexe** de z .

En utilisant la notation exponentielle de $z = r \cdot e^{i\theta}$, alors on peut réécrire le logarithme complexe de z dans la forme suivante :

$$\ln z = \log r + i(\theta + 2n\pi); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ avec } r > 0.$$

II. Fonction logarithmique complexe

Remarque : la notation $\log x$ est utilisée pour définir le logarithme népérien (à base de e) de la valeur réelle positive non nulle x .

Exercice 2. Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

$$(a)e^w = i; (b) e^w = 1 + i; (c)e^w = -2$$

II. Fonction logarithmique complexe

Remarque : la notation $\log x$ est utilisée pour définir le logarithme népérien (à base de e) de la valeur réelle positive non nulle x .

Exercice 2. Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

$$(a) e^w = i; (b) e^w = 1 + i; (c) e^w = -2$$

Solution :

$$(a) e^w = i \rightarrow w = \ln i \rightarrow w = \log|1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$(b) e^w = 1 + i \rightarrow w = \ln(1 + i) \rightarrow w = \log|\sqrt{2}| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$(c) e^w = -2 \rightarrow w = \ln(-2) \rightarrow w = \log|2| + i(\pi + 2n\pi)$$

II. Fonction logarithmique complexe

II.1. Les identités logarithmiques :

Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls et n un entier, alors :

$$(i) \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$(ii) \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$(iii) \ln z_1^n = n \ln z_1$$

II.2. Valeur principale du logarithme complexe :

La fonction complexe $\operatorname{Ln} z$ définie par :

$$\operatorname{Ln} z = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z);$$

$-\pi < \operatorname{Arg}(Z) \leq \pi$: est l'argument principal de z

Est appelée la valeur principale du logarithme complexe.

II. Fonction logarithmique complexe

Exercice 3. Calculer les valeurs principales du logarithme complexe $\text{Ln} z$ pour :

(a) $e^w = i$; (b) $e^w = 1 + i$; (c) $e^w = -2$

II. Fonction logarithmique complexe

Exercice 3. Calculer les valeurs principales du logarithme complexe $\text{Ln} z$ pour :

$(a) e^w = i; (b) e^w = 1 + i; (c) e^w = -2$

Solution :

$(a) e^w = i \rightarrow w = \text{Ln } i \rightarrow w = \log|1| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

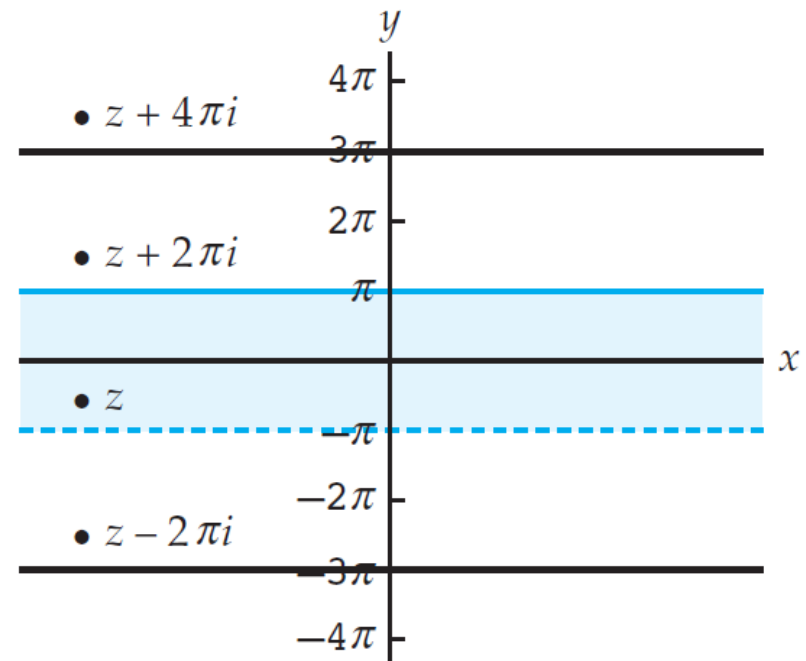
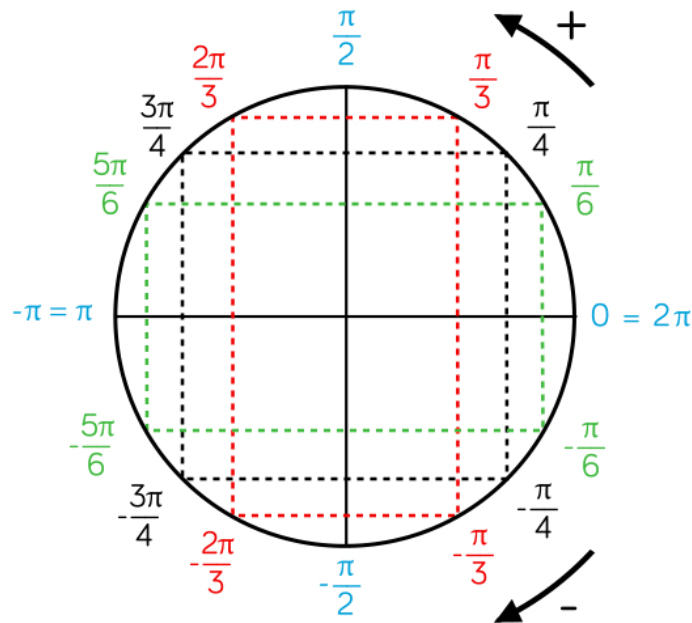
$(b) e^w = 1 + i \rightarrow w = \text{Ln } (1 + i) \rightarrow w = \log|\sqrt{2}| + i\frac{\pi}{4}$

$(c) e^w = -2 \rightarrow w = \text{Ln } (-2) \rightarrow w = \log|2| + i\pi$

II. Fonction logarithmique complexe

II.3. La fonction $\text{Ln} z$ inverse de la fonction e^z :

Si la fonction exponentielle complexe $f(z) = e^z$ est définie sur la région fondamentale $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$, donc $f(z)$ est une fonction univoque (un-à-un) et la fonction inverse de $f(z)$ est la valeur principale du logarithme complexe : $f^{-1}(z) = \text{Ln } z$.



II. Fonction logarithmique complexe

II.4. Analyticité du logarithme complexe :

D'après la définition de la fonction logarithme complexe principale comme étant une fonction inverse de e^z : $f(z) = e^z \rightarrow f^{-1}(z) = \text{Ln } z$.

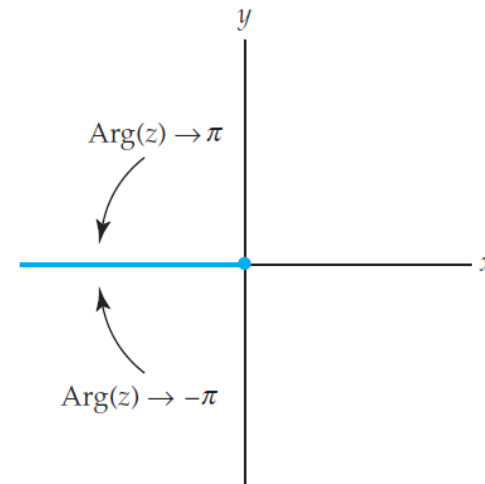
En plus de la définition : $\text{Ln } z = \log|z| + i\text{Arg}(z)$

Il est possible ainsi de calculer la valeur de $\text{Ln}(e^{-i\pi})$ avec les deux méthodes (Sachant que $e^{-i\pi} = -1$):

$$1^\circ) \text{Ln}(e^{-i\pi}) = -i\pi$$

$$2^\circ) \text{Ln}(e^{-i\pi}) = \text{Ln}(-1) = i\pi$$

Donc $1^\circ) \neq 2^\circ)$



Ce résultat peut être généralisé à tous les nombres négatives $x \in]-\infty, 0]$

D'où la définition de la branche principale du $\text{Ln } z$

II. Fonction logarithmique complexe

II.4. Analyticité du logarithme complexe :

On définit une fonction logarithmique complexe définie sur le domaine $\mathbb{C} - \{]-\infty, 0]\}$ ou $\mathbb{C} - \{Re(z) \leq 0\}$. On dit que la fonction logarithme complexe constitue une **Branche Principale** de $f(z) = \ln z$. Cette branche est définie comme :

$$f_1(z) = \log|z| + iArg(z) = \log r + i\theta \text{ avec } -\pi < Arg(z) = \theta < \pi$$

Ce qui exclut tout $x \in]-\infty, 0]$.

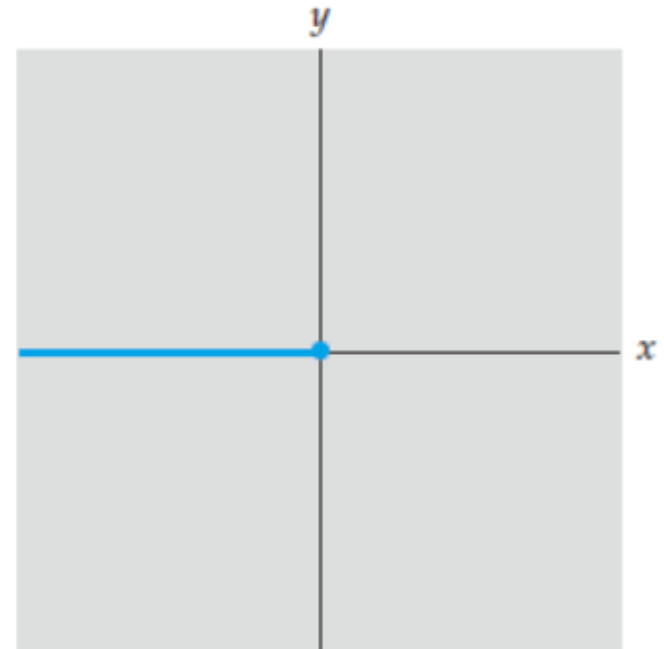
Il faut faire également attention en utilisant les identités logarithmiques (qui ne sont pas des égalités)

Exemple:

$$1^\circ) \operatorname{Ln}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$$

$$2^\circ) \operatorname{Ln}(-i) = \operatorname{Ln}(-1 \times i) = \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(i) = i\pi + i\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(-i) = i\frac{3\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2} + i2\pi \neq -i\frac{\pi}{2}$$



II. Fonction logarithmique complexe

II.4. Analyticité du logarithme complexe :

Pour cela on établit les relations entre les arguments comme suit :

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2\pi N_+$$

$$\text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) + 2\pi N_-$$

Avec:

$$N_{\pm} = \begin{cases} +1; \text{ si } \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) > \pi \\ 0; \text{ si } -\pi < \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \leq \pi \\ -1; \text{ si } \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \leq -\pi \end{cases}$$

Ceci impliquera pour le $\text{Ln } z$:

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) + 2\pi N_+$$

$$\text{Ln}(z_1/z_2) = \text{Ln}(z_1) - \text{Ln}(z_2) + 2\pi N_-$$

$$\text{Ln}(z^n) = n. \text{Ln } z + 2\pi N_n; N_n = \left[\frac{1}{2} - \frac{n. \text{Arg}(z)}{2\pi} \right]: \text{ Le plus grand entier}$$

II. Fonction logarithmique complexe

II.4. Analyticité du logarithme complexe :

Ceci nous permet d'obtenir une fonction analytique sur ce domaine : continue et dérivable qui vérifie le théorème suivant :

Théorème 3.2. Analyticité de la branche principale de $\ln z$

La branche principale f_1 du logarithme complexe définie par :

$$f_1(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \log r + i\theta \text{ avec } -\pi < \operatorname{Arg}(z) = \theta < \pi$$

Est une fonction analytique et sa dérivée est donnée par :

$$f_1'(z) = \frac{df_1}{dz} = \frac{1}{z}$$

Exercice 4. Trouver les dérivées des fonctions suivantes dans le domaine approprié : (a) $z \cdot \operatorname{Ln} z$; (b) $\operatorname{Ln}(z + 1)$

II. Fonction logarithmique complexe

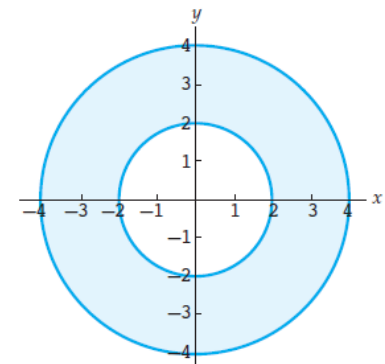
II.5. Transformations sous $\text{Ln } z$:

Comme la fonction $\text{Ln } z$ constitue une fonction inverse de l'exponentielle complexe e^z on peut déduire les propriétés de transformation suivantes sous une fonction logarithmique complexe :

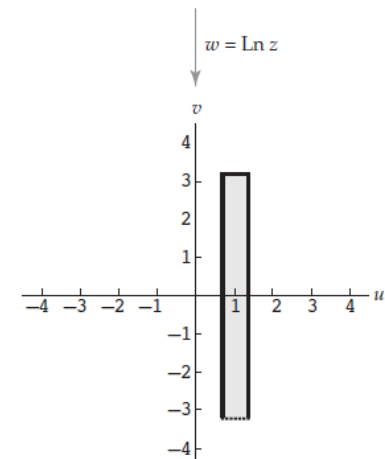
(i) $w = \text{Ln } z$ transforme l'ensemble $|z| > 0$ en une région $-\infty < u < \infty, -\pi < v < \pi$.

(ii) $w = \text{Ln } z$ transforme un cercle définie par $|z| = r$ en une un segment de ligne verticale $u = \log r, -\pi < v < \pi$.

(iii) $w = \text{Ln } z$ transforme un rayon $\arg(z) = \theta$ en une ligne horizontale $-\infty < u < \infty, v = \theta$.



(a) The annulus $2 \leq |z| \leq 4$



II. Fonction puissance complexe

Def. 3.3 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la puissance complexe z^α est définie comme : $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln z}$

Lorsqu'il s'agit d'un exposant complexe comme c'est le cas pour z^α on parle ici d'une ***fonction puissance complexe*** multivaluée.

Les puissances complexes définies plus haut, vérifient les propriétés suivantes qui sont analogues dans le cas des puissances réelles :

$$(i) z^{\alpha_1} \cdot z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$(ii) z^{\alpha_1} / z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$(iii) (z^\alpha)^n = z^{n\alpha}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

II. Fonction puissance complexe

Def. 3.3 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la puissance complexe z^α est définie comme : $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln z}$

Exercice 5. Trouver les valeurs des puissances complexes suivantes : $(a)i^{2i}, (b)(1+i)^i$

II. Fonction puissance complexe

Def. 3.3 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la puissance complexe z^α est définie comme : $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln z}$

Exercice 5. Trouver les valeurs des puissances complexes suivantes : (a) i^{2i} , (b) $(1+i)^i$

Solution :

$$(a) \ i^{2i} = e^{2i \cdot \ln(i)} = e^{2i \cdot (i\frac{\pi}{2} + i2k\pi)} = e^{-\pi} \cdot e^{-4k\pi}$$

$$(b) \ (1+i)^i = e^{i \cdot \ln(1+i)} = e^{i \cdot (\log(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{i0,346} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-2k\pi}$$

II. Fonction puissance complexe

III.1. Valeur principale d'une puissance complexe :

On peut définir une valeur principale d'une puissance complexe en utilisant la valeur principale du logarithme complexe :

Déf. 3.4 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la fonction définie par :

$z^\alpha = e^{\alpha \cdot \text{Ln } z}$ est appelée ***La valeur principale de la puissance complexe z^α***

Exercice 6. Trouver les valeurs principales des puissances complexes suivantes : (a) $(-3)^{i/\pi}$, (b) $(2i)^{1-i}$

II. Fonction puissance complexe

Exercice 6. Trouver les valeurs principales des puissances complexes suivantes : (a) $(-3)^{i/\pi}$, (b) $(2i)^{1-i}$

Solution :

$$(a) \quad (-3)^{i/\pi} = e^{\frac{i}{\pi} \operatorname{Ln}(-3)} = e^{\frac{i}{\pi} (\log 3 + i\pi)} = e^{(-1 + i\frac{1}{\pi})} = 0,367(0,94 + i0,34)$$

$$(-3)^{i/\pi} = 0,345 + i0,124$$

$$(b) \quad (2i)^{1-i} = e^{(1-i) \operatorname{Ln}(2i)} = e^{(1-i) (\log 2 + i\frac{\pi}{2})} = e^{(2,263 + i0,877)} = 9,611(0,64 + i0,77)$$

$$(2i)^{1-i} = 0,615 + i7,4$$

II. Fonction puissance complexe

III.2. Analyticité de la fonction puissance complexe :

Etant définie avec la fonction logarithme complexe et l'exponentielle complexe, la fonction puissance complexe est définie analytique sur le domaine : $D = \mathbb{C} - \{]-\infty, 0]\}$ et on parle dans ce cas de la ***fonction branche principale de la puissance complexe*** :

$$f_1(z) = z^\alpha = e^{\alpha \cdot (\log r + i\theta)}, \quad -\pi < \theta < \pi$$

Cette fonction analytique (continue et dérivable) sur D et sa dérivée est définie par :

$$f_1'(z) = \frac{d}{dz} e^{\alpha \cdot \text{Ln } z} = e^{\alpha \cdot \text{Ln } z} \cdot \frac{d}{dz} [\alpha \cdot \text{Ln } z] = e^{\alpha \cdot \text{Ln } z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$$

Exercice 7. Calculer la dérivée de la valeur principale de z^i dans le point $z = 1 + i$

II. Fonction puissance complexe

Exercice 7. Calculer la dérivée de la valeur principale de z^i dans le point $z = 1 + i$

Solution :

$$\frac{d}{dz} z^i = i z^{i-1} \rightarrow f'(1+i) = i(1+i)^{i-1} = i \cdot e^{(i-1)\text{Ln}(1+i)} = i \cdot e^{(i-1)(\log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4})}$$

$$f'(1+i) = i \cdot e^{(i-1)(\log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4})} = i \cdot e^{(i-1)(0,346 + i0,785)} = i \cdot e^{(-1,131 + i0,439)}$$

$$f'(1+i) = 0,322i \cdot (\cos 0,439 + i \sin 0,439) = -0,136 + i0,291$$

III. Fonctions trigonométriques complexes

Déf. 3.5 :

Les fonctions complexes **Sinus** et **Cosinus** sont définies par :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

On définit également à partir de là les fonctions trigonométriques complexes qui ont découlent de la définition du Sinus et Cosinus, d'une manière analogue aux fonctions trigonométriques réelles :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \sec z = \frac{1}{\cos z}; \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Séc : sécante, csc ; cosécante

III. Fonctions trigonométriques complexes

Exercice 8. : Dans chaque partie, exprimer les fonctions trigonométriques données ci-dessous sous la forme $a + ib$:

$(a) \cos i, (b) \sin(2 + i), (c) \tan(\pi - 2i)$

III. Fonctions trigonométriques complexes

Exercice 8. : Dans chaque partie, exprimer les fonctions trigonométriques données ci-dessous sous la forme $a + ib$:

(a) $\cos i$, (b) $\sin(2 + i)$, (c) $\tan(\pi - 2i)$

Solution :

On rappelle : $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$$(a) \cos i = \frac{e^{i(i)} + e^{-i(i)}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = 1,543$$

$$(b) \sin(2 + i) = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i2} - e^{1-i2}}{2i} = \frac{0,367(-0,416 + i0,91) - 2,71(-0,416 - i0,91)}{2i} =$$

$$\sin(2 + i) = -1,4 + i0,487$$

$$(c) \tan(\pi - 2i) = -i \frac{e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}}{e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}} = -i \frac{e^2 e^{i\pi} - e^{-2} e^{-i\pi}}{e^2 e^{i\pi} + e^{-2} e^{-i\pi}} = -i \frac{-e^2 + e^{-2}}{-e^2 - e^{-2}} = i \frac{-7,38 + 0,135}{0,738 + 0,135} = -i0,8$$

IV. Fonctions trigonométriques complexes

IV.1. Identités trigonométriques :

Comme les fonctions trigonométriques réelles, les fonctions trigo. Complexes vérifient les identités suivantes :

$$(i) \sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$$

$$(ii) \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$(iii) \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

$$(iv) \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$(v) \sin 2z = 2 \cdot \sin z \cdot \cos z, \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

$$(vi) \sin(z + 2\pi) = \sin z, \cos(z + 2\pi) = \cos z$$

IV. Fonctions trigonométriques complexes

IV.4. Analyticité :

les fonctions trigonométriques complexes, sont définies et analytiques sur tout l'ensemble $\mathbb{C}$ et leurs dérivées respectives sont définies comme suit:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \cdot \tan z$$

$$\frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cdot \cot z$$

V. Fonctions hyperboliques complexes

Déf. 3.6. :

Les fonctions hyperboliques complexes sont définies par :

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ et } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

On en déduit également les autres fonctions hyperboliques :

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

Il faut également remarquer que les fonctions hyperboliques $\sinh z$ et $\cosh z$ sont entières car e^z l'est déjà.

V. Fonctions hyperboliques complexes

V.1. Dérivées des fonctions hyperboliques complexes :

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \cdot \tanh z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \cdot \coth z$$

V. Fonctions hyperboliques complexes

V.2. Relations avec les fonctions trigonométriques complexes :

Remplaçons z par iz dans la déf. 2.6 et on obtient :

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = i \sin z$$

Ou, autrement :

$$\sin z = -i \sinh(iz)$$

$$\cos z = \cosh(iz)$$

$$\sinh z = -i \sin(iz)$$

$$\cosh z = \cos(iz)$$

$$\tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh z}{\cosh z} = i \tanh z$$

V. Fonctions hyperboliques complexes

V.3. Identités des fonctions hyperboliques complexes :

$$(i) \sinh(-z) = -\sinh z$$

$$(ii) \cosh(-z) = \cosh z$$

$$(iii) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$(iv) \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cdot \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \cdot \sinh z_2$$

$$(v) \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cdot \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \cdot \sinh z_2$$

$$(vi) \sinh 2z = 2 \cdot \sinh z \cdot \cosh z$$

$$(vii) \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

VI.1. Fonctions trigonométriques inverses :

En cherchant de trouver des solutions à l'équation $\sin w = z$, on en a besoin de définir la fonction inverse tel que : $z = \sin^{-1} w$. Pour cela ; partant de la définition d'une fonction sinus complexe :

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \text{ ou autrement : } e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

Et là on est ramené à résoudre une équation quadratique en e^{iw} :

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2} \rightarrow iw = \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

Et là on est ramené à résoudre une équation quadratique en e^{iw} :

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2} \rightarrow iw = \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$$

$$\text{Ou : } w = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$$

Ceci nous conduit à définir **les fonctions inverses** ($\ln \rightarrow$ fonction multivaluée) :

$$\sin^{-1} z = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}] : \textbf{Sinus inverse}$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln[z + i(1 - z^2)^{1/2}] : \textbf{Cosinus inverse}$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left[\frac{i+z}{i-z} \right] : \textbf{Tangente inverse}$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

Les dérivées de ces fonctions sont définies uniquement sur D :

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

VI.2. Fonctions hyperboliques inverses :

De la même manière que précédemment ($\sinh w = z$), :

$$\sinh^{-1} z = \ln[z + (z^2 + 1)^{1/2}] : \text{Sinus Hyperbolique inverse}$$

$$\cosh^{-1} z = \ln[z + i(z^2 - 1)^{1/2}] : \text{Cosinus Hyperbolique inverse}$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+z}{1-z} \right] : \text{Tangente hyperbolique inverse}$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

VI.2. Fonctions hyperboliques inverses :

Pour des branches de ces fonctions définies sur un domaine D où elles sont continues et dérivables, on a :

$$\frac{d}{dz} \sinh^{-1} z = \frac{1}{(z^2 + 1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}$$

VI. Fonctions trigo. Et hyperb. inverses

Exercice 9. :

- 1. Trouver toutes les valeurs de : $\sin^{-1} \sqrt{5}$**
- 2. Trouver la valeur de la dérivée de $\sin^{-1} z$ dans le point $z = i$ (vérifier que ce point appartient au domaine de définition).**
- 3. Admettant que $\cosh^{-1} z$ représente une branche du cosinus hyperbolique inverse obtenu en utilisant comme branche de la fonction puissance quadratique complexe et le logarithme complexe : $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, 0 < \theta < 2\pi$. Trouver les valeurs suivantes : (a) $\cosh^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$, (b) $\frac{d}{dz} \cosh^{-1} z \Big|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}}$**

