

Corrigé Série n02-A : les fonctions complexes

1. Evaluer les applications complexes dans les points donnés :

- (a) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z} - 2i$; $z = \{2i; 1 + i; 3 - 2i\}$
 (b) $f(z) = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(iz) + z$;
 $z = \{3 - 4i; 2 - i; 1 + 2i\}$
 (c) $f(z) = \log_e |z| + i\operatorname{Arg}(z)$; $z = \{1; 4i; 1 + i\}$
 (d) $f(z) = (xy - x^2) + i(3x + y)$;
 $z = \{3i; 4 + i; 3 - 5i\}$
 (e) $f(z) = e^z$; $z = \left\{2 - \pi i; \frac{\pi}{3}i; \log_e 2 - \frac{5\pi}{6}i\right\}$

- (a) $f(2i) = 6i$; $f(1 + i) = +2$; $f(3 - 2i) = 27 - i10$
 (b) $f(3 - i4) = 22 - i4$; $f(2 - i) = 3 - i$; $f(1 + i2) = 4 - i2$
 (c) $f(1) = i2\pi$; $f(4i) = 1.38 + i\frac{\pi}{2}$; $f(1 + i) = 0.46 + i\frac{\pi}{4}$
 (d) $f(3i) = 3i$; $f(4 + i) = -12 + i13$; $f(3 - i5) = 6 + i4$
 (e) $f(2 - i\pi) = 7.39$; $f\left(\frac{\pi}{3}i\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\log_e 2 - \frac{5\pi}{6}i\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

2. Trouver la partie réelle u et imaginaire v des fonctions complexes suivantes :

- (a) $f(z) = 6z - 5 + 9i$; (b) $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i$
 (c) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$; (d) $f(z) = e^{2z+i}$

- (a) $f(z) = 6z - 5 + 9i = (6x - 5) + i(6y + 9)$
 (b) $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i = -x - i5y$
 (c) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1} = \frac{x(x+1)-y^2-i(2xy+y)}{(x+1)^2+y^2}$
 (d) $f(z) = e^{2z+i} = e^{2x} \cos(2y + 1) + i e^{2x} \sin(2y + 1)$

3. Trouver la partie réelle u et imaginaire v en fonction de r et θ pour les fonctions complexes suivantes :

- (a) $f(z) = \bar{z}$; (b) $f(z) = z^4$; (c) $f(z) = e^z$
 (d) $f(z) = z + \frac{1}{z}$
 (a) $f(z) = \bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta$
 (b) $f(z) = z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 \cos 4\theta + r^4 i \sin 4\theta$
 (c) $f(z) = e^z = e^{r \cos \theta} \cdot \cos(r \cdot \sin \theta) + ie^{r \cos \theta} \cdot \sin(r \cdot \sin \theta)$
 (d) $f(z) = z + \frac{1}{z} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$

4. Donner le domaine de définition des applications suivantes :

- (a) $f(z) = 2\operatorname{Re}(z) - iz^2$; (b) $f(z) = \frac{iz}{|z-1|}$
 (c) $f(z) = \frac{iz}{|z|-1}$; (d) $f(z) = \frac{3z+2i}{z^3+4z^2+z}$

- (a) $D_f = \mathbb{C}$
 (b) $D_f = \mathbb{C} - \{1\}$
 (c) $D_f = \mathbb{C} - \{|z| - 1 = 0\}$
 (d) $D_f = \mathbb{C} - \{0, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}$

5. Quel est l'intervalle de valeurs des applications complexes suivantes :

- (a) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$; $|z| \leq 2$
 (b) $f(z) = |z|$; $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$
 (c) $f(z) = \bar{z}$; *demi-plan* $\operatorname{Im}(z) > 0$

- (a) $D_R(f(z)) = \{-2i \leq v(x, y) \leq 2i\}$
 (b) $D_R(f(z)) = \{0 \leq u(x, y) \leq 1\}$
 (c) $D_R(f(z)) = \{\text{demi-plan } v(x, y) < 0\}$

6. Pour la fonction $f(z) = e^z$, montrer que :

- (a) $|e^z| = e^x$
 (b) $e^{z+2\pi i} = e^z$; déterminer la période
 (c) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

- (a) $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x$
 (b) $e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+i2\pi} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x e^{iy} = e^{x+iy}$; période $i2\pi$
 (c) $e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^x \cos y - ie^x \sin y = \overline{e^x \cos y + ie^x \sin y} = \overline{e^z}$

7. Trouver l'image S' de l'ensemble S sous la transformation complexe $w = f(z)$:

- (a) $f(z) = \bar{z}$; S : ligne horizontale $y = 3$
 (b) $f(z) = 3z$; S : *demi-plan* $\operatorname{Im}(z) > 2$
 (c) $f(z) = (1 + i)z$; S : ligne verticale $x = 2$
 (d) $f(z) = iz + 4$; S : *demi-plan* $\operatorname{Im}(z) \leq 1$

- (a) ligne horizontale $y = -3$
 (b) *demi-plan* $\operatorname{Im}(z) > 6$
 (c) ligne oblique à $\pi/4$
 (d) *demi-plan* $\operatorname{Re}(z) \geq -1$

8. Dans ce qui suit, tracer et commenter en premier la courbe paramétrique C suivants. Ensuite, trouver la courbe paramétrique C', image de C (tracer et commenter) :

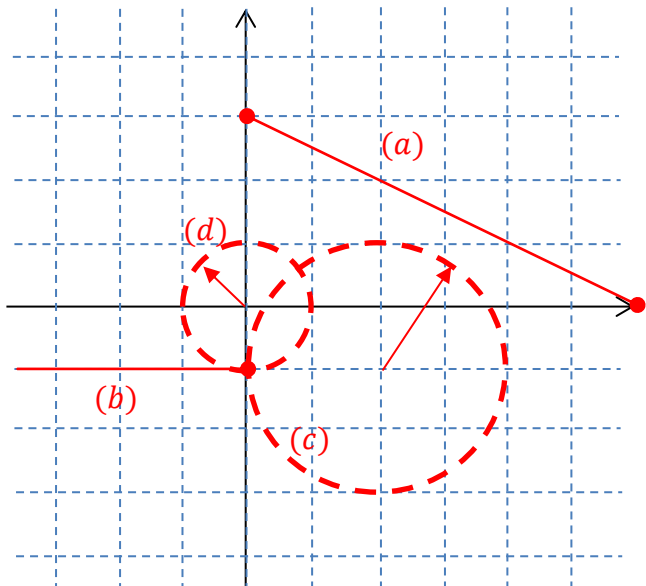
(a) $z(t) = 2(1-t) + it; 0 \leq t \leq 1; f(z) = 3z$

(b) $z(t) = i(1-t) + (1+i)t; 0 \leq t \leq \infty;$

$f(z) = -z$

(c) $z(t) = 1 + 2e^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi; f(z) = z + 1 - i$

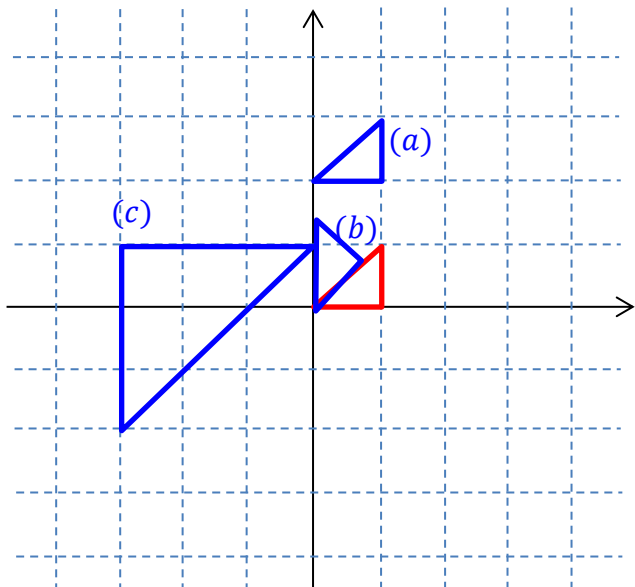
(d) $z(t) = t; 0 \leq t \leq 2; f(z) = e^{i\pi z}$



9. Trouver l'image d'un triangle de sommets $\{0, 1, i\}$ sous les transformations suivantes :

(a) $f(z) = z + 2i$; (b) $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$;

(c) $f(z) = -3z + i$



10. Exprimer les transformations linéaires suivantes comme une composition de rotation, homothétie et une translation :

(a) $f(z) = 3iz + 4$; (b) $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i\sqrt{3}$

(a) $f(z) = 3iz + 4 = R \circ H \circ T, R = iz; H = 3z; T =$

$z' + 4$

(b) $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i\sqrt{3} = R \circ H \circ T, R =$

$-z; H = 0.5z; T = z' + 1 - i\sqrt{3}$

11. Trouver l'image des ensembles suivants, sous la transformation $w = z^2$.

(a) la ligne $x = 3$; (b) la ligne $y = -1/4$;

(a) $z = 3 + iy; w = 9 - y^2 + i6y = u + iv \rightarrow y =$

$\frac{v}{6} \rightarrow u = 9 - \frac{v^2}{36}$ (parabole avec un sommet à (0,9) et

coupe l'axe X en -18 et +18)

(b) $z = x - i0.25; w = x^2 - 0.125 - i0.5x = u +$

$iv \rightarrow x = 2v \rightarrow u = 4v^2 - 0.125$ (parabole avec un sommet à (0, -0.125) et coupe l'axe X en -0.176 et +0.176)

12. Donner la valeur de la racine principale pour les fonctions puissances suivantes, dans les points donnés :

(a) $z^{1/2}; z = -i$; (b) $z^{1/2}; z = 2 + i$;

(c) $z^{1/3}; z = -1$; (d) $z^{1/4}; z = -1 + i\sqrt{3}$

(a) $(-i)^{1/2} = (1e^{i3\pi/2})^{1/2} = 1.e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}/2$

(b) $(2 + i)^{1/2} = (\sqrt{5}e^{i0.46})^{1/2} = 1.49.e^{i0.23}$

(c) $(-1)^{1/3} = (1e^{i\pi})^{1/3} = 1.e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(d) $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4} = (2e^{i2\pi/3})^{1/4} = 1.19.e^{i\pi/6} = 0.595 + i1.03$

13. Trouver l'image de l'ensemble donné sous la transformation réciproque $w = 1/z$:

(a) le cercle $|z| = 5$

(b) demi-cercle $|z| = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$

(c) le rayon $\arg(z) = \pi/4$

(d) la ligne $y = 4$

(a) $z = 5 \cdot e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi) \rightarrow w = \frac{1}{z} \rightarrow w = \frac{1}{5} \cdot e^{-i\theta}$:

cercle de rayon 1/5

(b) $z = 0.5 \cdot e^{i\theta} \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \rightarrow w = \frac{1}{z} \rightarrow w =$

$2 \cdot e^{-i\theta}$: demi-cercle de rayon 2

(c) $z = r \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} (0 < r < +\infty) \rightarrow w = \frac{1}{r} e^{-i\pi/4}$: Rayon

porté sur un angle $-\frac{\pi}{4}$

(d) $z = x + i4 \rightarrow w = \frac{1}{x+i4} = \frac{x-i4}{x^2+16}$