

### Série n02-B : les fonctions analytiques

1. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes et calculer les limites aux points indiqués :

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 - \bar{z})$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} (|z|^2 - i\bar{z})$$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} (z + 1/z)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} e^z$$

$$\lim_{z \rightarrow i} ze^z$$

$$\lim_{z \rightarrow 2+i} (e^z + z)$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$$

2. Montrer que la fonction  $f$  est continue au point indiqué :

(a)  $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i$ ;  $z_0 = 2 - i$  ; (b)  $f(z) = z^3 - \frac{1}{z}$ ;  $z_0 = 3i$  ; (c)  $f(z) = \frac{z^3}{z^3 + 3z^2 + z}$ ;  $z_0 = i$

(d)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{z + iz}$ ;  $z_0 = e^{i\pi/4}$

3. Montrer que la fonction  $f$  n'est pas continue au point indiqué:

(a)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + i}$ ;  $z_0 = -i$  ; (b)  $f(z) = \frac{1}{|z| - 1}$ ;  $z_0 = i$

4. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction, calculer  $f'(z)$  :

(a)  $f(z) = 9iz + 2 - 3i$  ; (b)  $f(z) = iz^3 - 7z^2$  ; (c)  $f(z) = z - \frac{1}{z}$  ;

(d)  $f(z) = \frac{1}{z}$  ; (e)  $f(z) = z^3$

- Utiliser les règles de la dérivation pour calculer  $f'(z)$  :

(a)  $f(z) = (2 - i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$

(b)  $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$

(c)  $f(z) = -5iz^2 + \frac{2+i}{z^2}$

5. Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \frac{z^4 + 16}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$$

6. Quelles sont les fonctions qui vérifient les équations C-R ? conclure

(a)  $f(z) = z^3$  ; (b)  $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$  ; (c)  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  ;

(d)  $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$  ; (e)  $f(z) = x^2 + y^2$  ; (f)  $f(z) = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}$  ;

7. Vérifier que la fonction  $u(x, y)$  est harmonique. Trouver sa fonction harmonique conjuguée :

(a)  $u(x, y) = x$  ; (b)  $u(x, y) = 2x - 2xy$  ; (c)  $u(x, y) = x^2 - y^2$  ;

(d)  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  ; (e)  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin x)$  ;

(f)  $u(x, y) = -e^x \sin y$  ;