

Série n01 : Le plan complexe
Solutions des exercices

1. résoudre les équations suivantes, pour tout $z = a + ib$:

$$2z = i(2 + i9) ; z^2 = i ; z - 2\bar{z} + 7 - i6 = 0 ; z +$$

$$2\bar{z} = \frac{2-i}{1+i3}$$

$$2z = i(2 + i9) \Leftrightarrow 2a + 2ib = 2i - 9$$

$$\Rightarrow a = -\frac{9}{2} ; b = \frac{1}{2}$$

$$z^2 = i \Rightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 0 + i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow 2a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} :$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} ; z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z - 2\bar{z} + 7 - i6 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + ib - 2a + 2ib + 7 - i6 = 0$$

$$\Rightarrow (-a + 7) + i(3b - 6) = 0 \Rightarrow a = 7 ; b = 2 ;$$

$$z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+i3} \Leftrightarrow 3a - ib = \frac{-1-i7}{10} \Rightarrow$$

$$a = \frac{-1}{30} ; b = \frac{7}{10}$$

2. Trouver la limite supérieure pour le module de $3z^2 + 2z + 1$ si $|z| \leq 1$.

$$|3z^2 + 2z + 1| \leq |3z^2| + |2z + 1|$$

$$\leq |3z^2| + |2z| + |1|$$

$$|3z^2 + 2z + 1| \leq 3|z|^2 + 2|z| + 1 = 6$$

3. Vérifier les inégalités suivantes :

(a) $|z + 6 + i8| \leq 13$, si $|z| = 2$

(b) $1 \leq |z^2 - 3| \leq 4$, si $|z| = 1$

4. Quel est le nombre z qui vérifie l'équation suivante :

a) $|z| - z = 2 + i$; b) $|z|^2 + 1 + i12 = 6z$

$$|z| - z = 2 + i \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - a - ib = 2 + i$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + ib + 2 + i \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + 2 + i(b + 1) \Rightarrow b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = a + 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = a^2 + 4a + 4 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$z = -\frac{3}{4} - i ;$$

$$|z|^2 + 1 + i12 = 6z \Leftrightarrow |z|^2 = 6z - 1 - i12 \Rightarrow a^2 + b^2 = 6a - 1 + i(6b - 12) \Rightarrow 6b - 12 = 0$$

$\Rightarrow$

$$b = +2 ; a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 5) = 0$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow z_1 = 1 + i2$$

$$a_2 = 5 \Rightarrow z_2 = 5 + i2$$

5. (a) Trouver la racine cubique de $z=i$;

(b) Trouver la racine d'ordre 4 de $z=1+i$

On utilise la formule de la n ème racine d'un nombre complexe notée w_n :

$$w_n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left[\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] + i \sin \left[\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] \right)$$

$$K=0, 1, \dots, n-1$$

$$i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -i$$

(b) Trouver la racine d'ordre 4 de $z=1+i$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) ;$$

$$\sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right) ;$$

$$\sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right) ;$$

$$\sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right)$$

6. (a) Vérifiez que : $(4 + i3)^2 = 7 + i24$;

(b) En utilisant le résultat précédent, trouver les valeurs de $(7 + i24)^{1/2}$.

$$(4 + i3)^2 = (16 - 9 + 24i) = 7 + i24$$

$$(7 + i24)^{1/2} = (4 + i3) ; (-4 - i3)$$

7. Trouver la n -ième racine des nombres complexes suivants :

$$(8)^{1/3} ; (-1)^{1/4} ; (i)^{1/2} ; (-1 + i)^{1/3} ; \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^{1/6}.$$

$$(8)^{1/3} = 2 ; 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) ;$$

$$2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$(-1)^{1/4} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$; \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right); \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$(i)^{1/2} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$(-1 + i)^{1/3} = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{1/3} =$$

$$2^{1/6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); 2^{1/6} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$2^{1/6} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^{1/6} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} \right)^{1/6} = \left(\frac{e^{i\pi/12}}{\sqrt{2}} \right)^{1/6} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{\pi}{72} + i \sin \frac{\pi}{72} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{25\pi}{72} + i \sin \frac{25\pi}{72} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{49\pi}{72} + i \sin \frac{49\pi}{72} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{73\pi}{72} + i \sin \frac{73\pi}{72} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{97\pi}{72} + i \sin \frac{97\pi}{72} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{109\pi}{72} + i \sin \frac{109\pi}{72} \right)$$

8. Donner les nombres complexes suivants dans la forme exponentielle :

(a) $-10 = 10e^{i\pi}$;

(b) $-2\pi i = 2\pi e^{i3\pi/2}$;

(c) $-4 - i4 = 4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$;

(d) $\frac{2}{1+i} = 1 - i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$;

(e) $(3 - i)^2 = 8 - i6 = 10e^{1.79\pi}$;

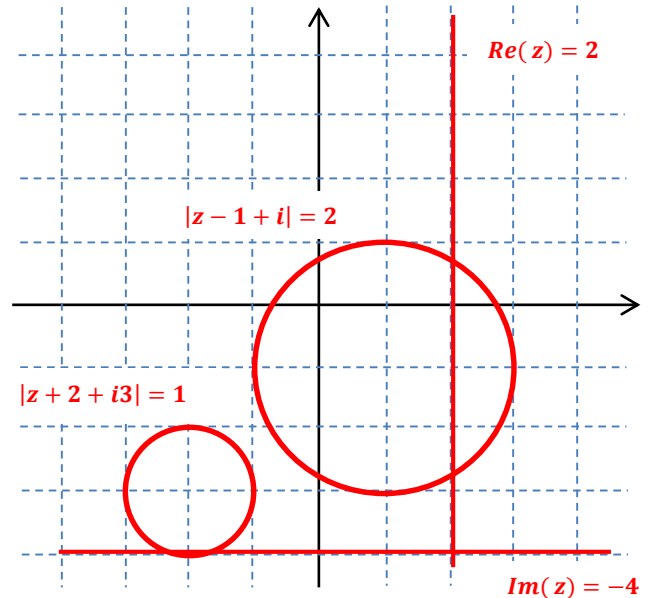
(f) $(1 + i)^{20} = 2i^{10} = -1024 = 1024e^{i\pi}$

9. Tracez graphiquement l'équation suivante :

a) $|z - 1 + i| = 2$; b) $|z + 2 + i3| = 1$;

c) $\operatorname{Re}(z) = 2$;

e) $\operatorname{Im}(z) = -4$



10. Tracez l'ensemble des points S dans le plan complexe, satisfaisant l'inégalité suivante et déterminer si cet ensemble est : a) ouvert, b) fermé, c) un domaine, d) limité ou e) connexe.

$$\operatorname{Re}(z) < -3 ; \operatorname{Im}(z) > 4 ;$$

$$-5 \leq \operatorname{Im}(z - 1) < -3 ; 1 \leq |z - 1 - i| \leq 2$$

