

Université Djilali BOUNAAMA de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

L2 Physique Fondamentale

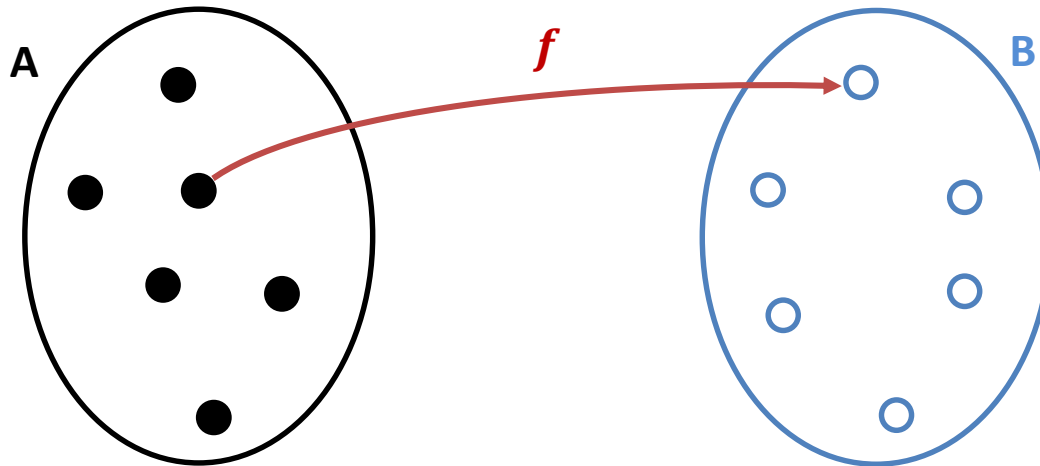
Fonction de la variable complexe

Chapitre 2: Les fonctions analytiques

Dr. S.E. BENTRIDI

1. Fonction de la variable complexe

Rappel : « une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B , est une application qui fait correspondre à chaque élément de A , un seul et unique élément en B »



1. Fonction de la variable complexe

Déf.2.1 :

La fonction complexe est la fonction f dont le domaine de définition et l'intervalle des valeurs sous des sous-ensembles du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

Une fonction complexe est également appelée, Fonction à valeurs complexes ou Fonction de la variable complexe.

$w = f(z)$ pour la fonction complexe de la variable complexe z
 $y = f(x)$ pour la fonction réelle de la variable réelle x .

1. Fonction de la variable complexe

Si on considère : $w = f(z)$ l'image de $z = x + iy$:

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- $u(x, y)$: la partie réelle
- $v(x, y)$: la partie imaginaire

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

1. Fonction de la variable complexe

Exemple 2: Ecrire la fonction complexe: $f(z) = z^2$ sous la forme:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ [trouver u et v]

$$w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$$

Par identification :

- $u(x, y) = x^2 - y^2$
- $v(x, y) = 2xy$

1.1. La fonction exponentielle complexe

Déf. 2.2 :

La fonction e^z définie par :

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

Est appelée **la fonction exponentielle complexe**.
Les propriétés de cette fonction dans le chapitre 03

On rappellera ici qu'un nombre complexe s'écrit en notation exponentielle : $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$

1.1. La fonction exponentielle complexe

Une fonction complexe peut être exprimée dans le système de coordonnées polaires: $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

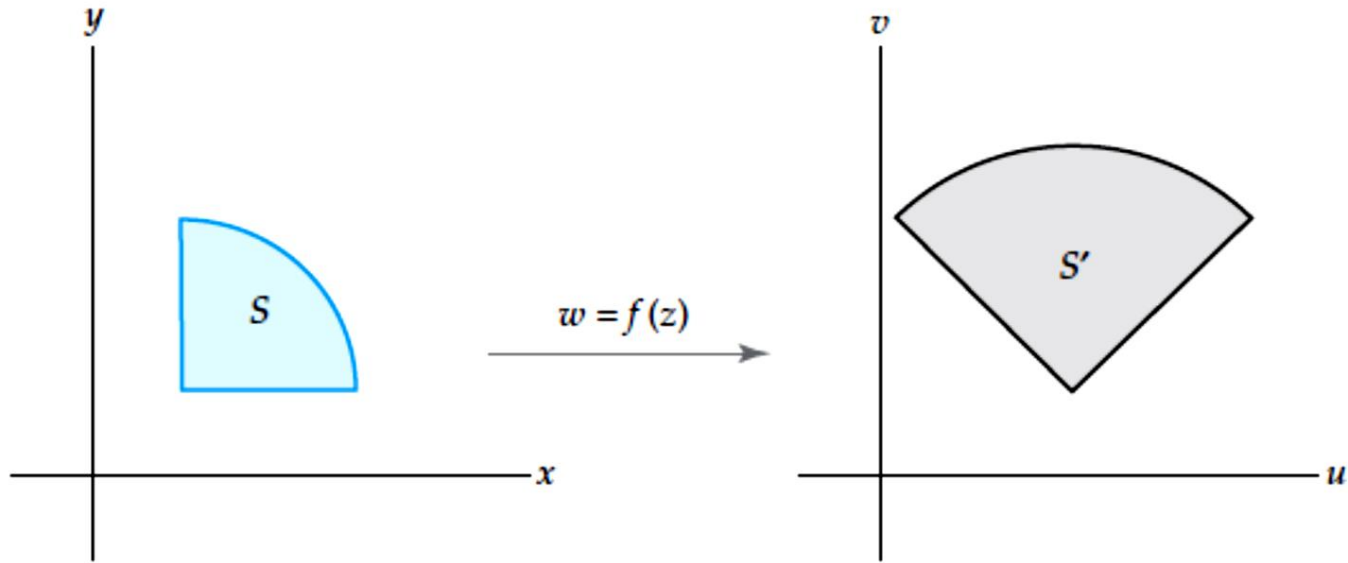
Exemple 3: la fonction complexe: $f(z) = z^2$ peut-être réécrite en fonction de ses deux parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} w = f(z) = z^2 &= (r \cdot e^{i\theta})^2 = r^2 \cdot e^{i2\theta} \\ &= r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta = u + iv \end{aligned}$$

Par identification :

- $u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$
- $v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta$

2.1. f comme transformation complexe (mapping)

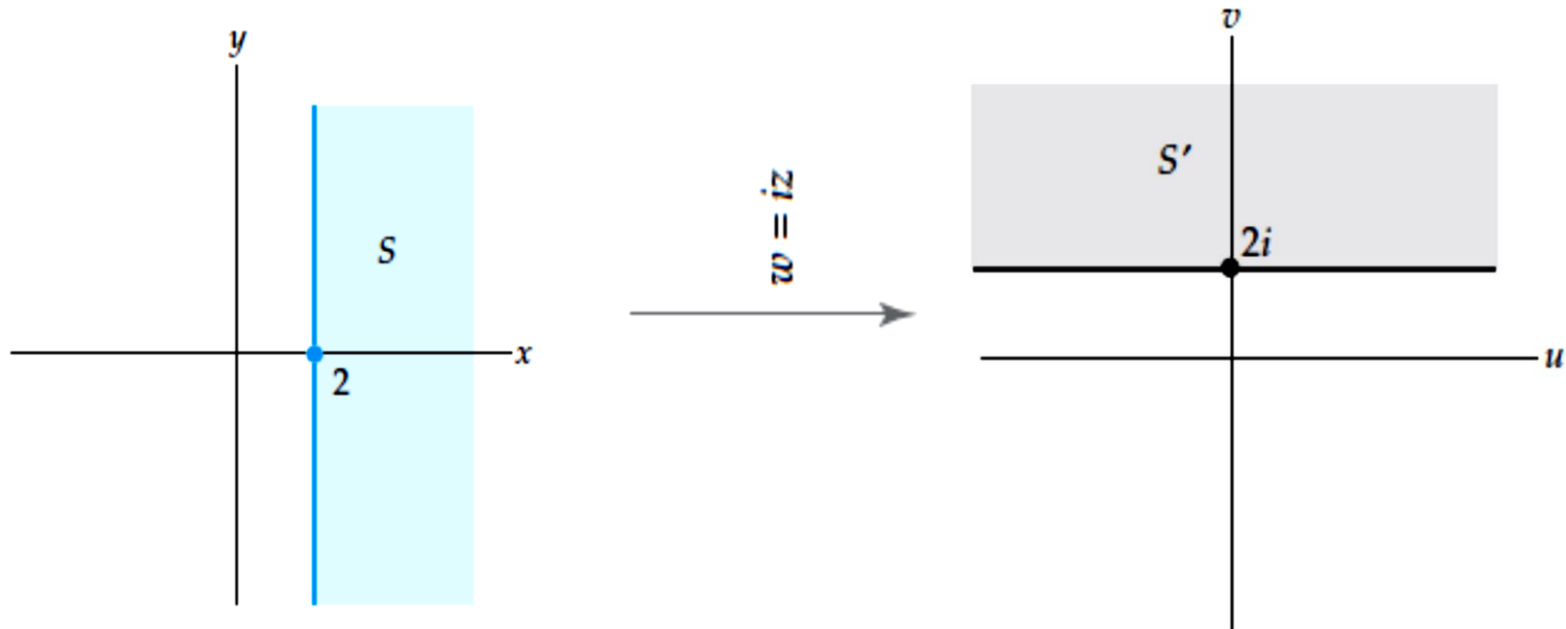


Soit un ensemble S de points z dans le plan complexe.

Si $w = f(z)$ est une transformation complexe, alors S' est l'ensemble des images des points de S par la fonction complexe f

2.1. f comme transformation complexe (mapping)

Exemple 4: trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Re}(z) \geq 2$ sous le mappage complexe $w = f(z) = iz$ et représenter le résultat.



2.2. Les courbes paramétriques dans le plan complexe :

Déf. 2.3 :

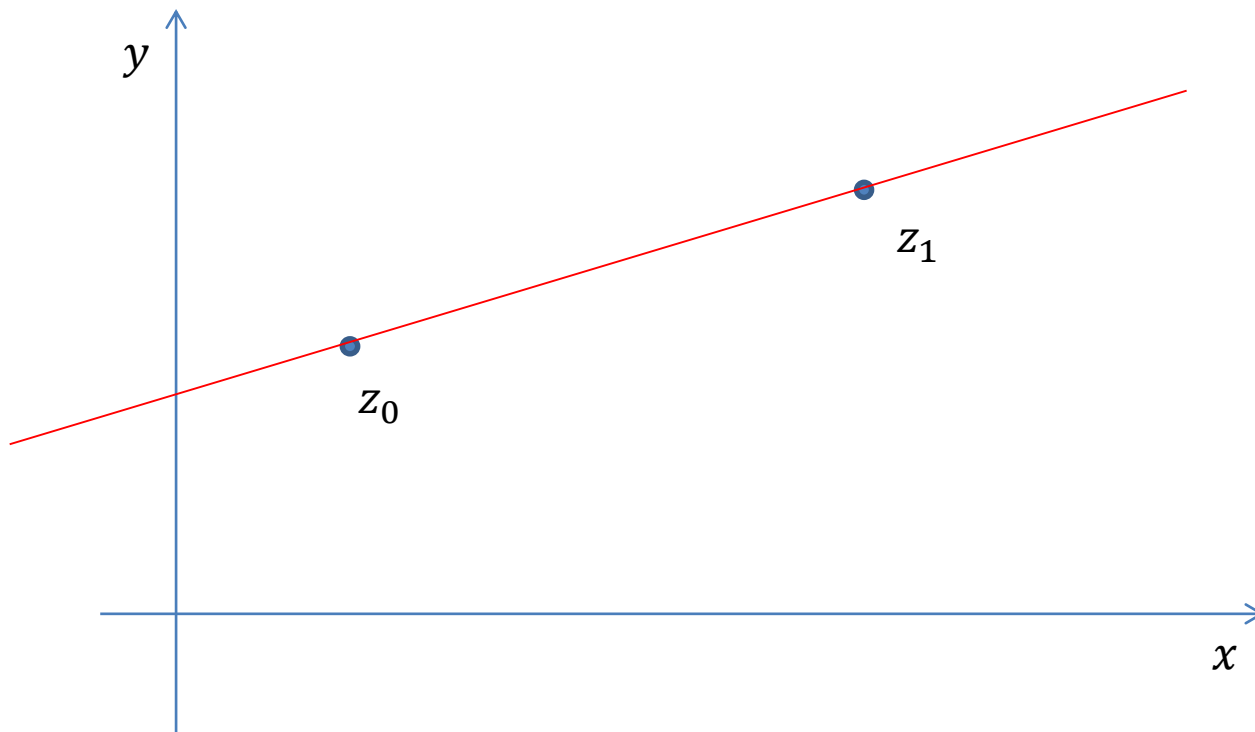
Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle t , alors l'ensemble C formé de tous les points $z(t) = x(t) + iy(t)$; $a \leq t \leq b$, est appelé **une courbe paramétrique complexe**. La fonction complexe du réel $t : z(t) = x(t) + iy(t)$ est appelée **la paramétrisation** de C .

2.2. Les courbes paramétriques dans le plan complexe :

Quelques courbes paramétriques élémentaires :

Ligne : qui contient les deux points z_0 et z_1 :

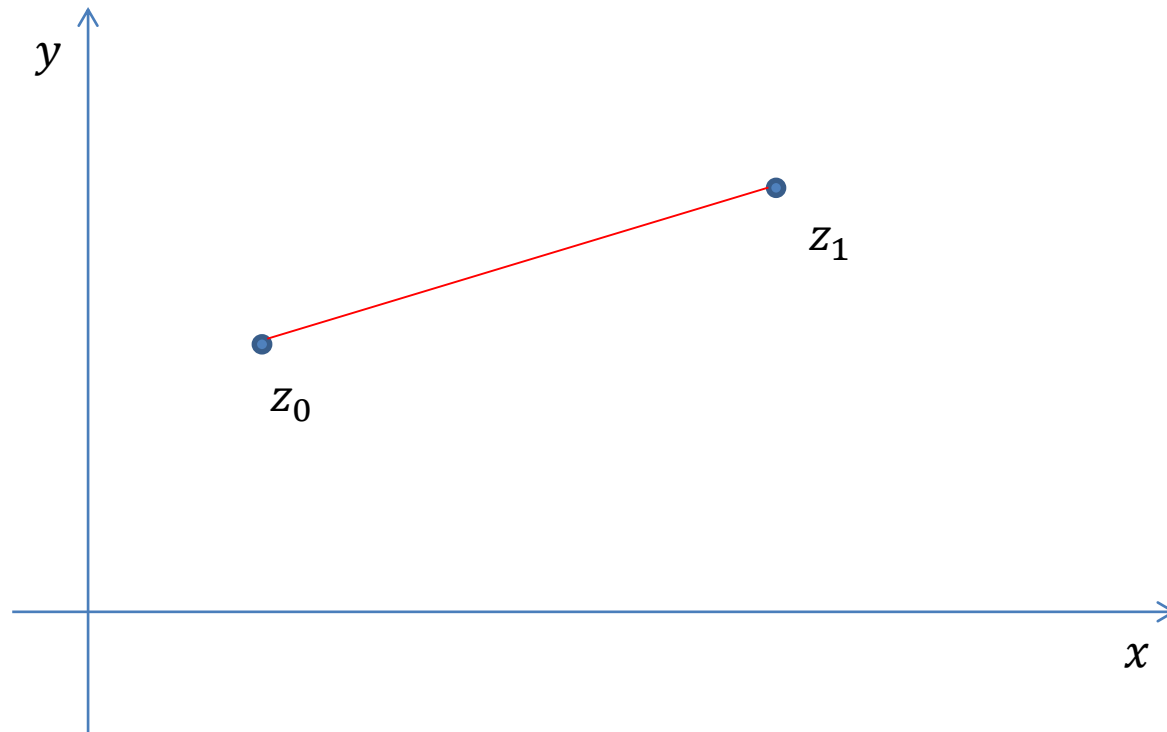
$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t ; -\infty < t < +\infty$$



2.2. Les courbes paramétriques dans le plan complexe :

Segment droit : entre deux points z_0 et z_1 :

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t ; 0 \leq t \leq 1$$



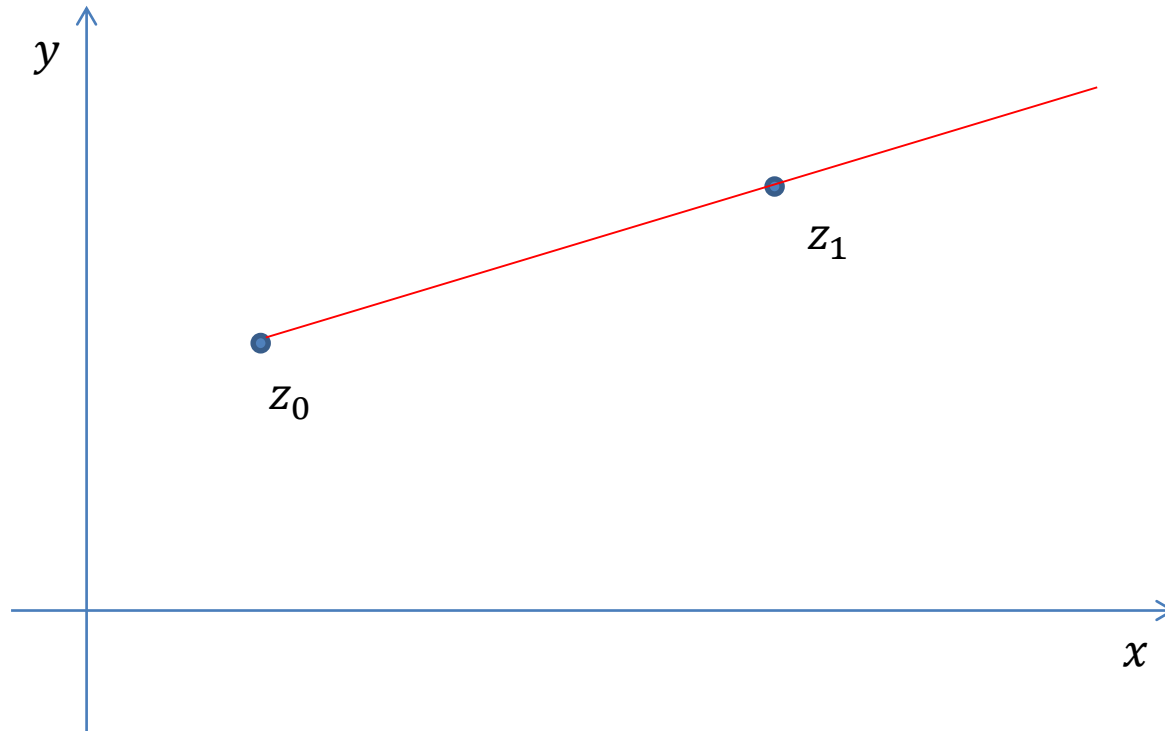
2.2. Les courbes paramétriques dans le plan complexe :

Rayon : qui parte d'un point z_0 et qui contient z_1 :

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t ; 0 \leq t < +\infty$$

Cercle : centré en z_0 avec un rayon r :

$$z(t) = z_0 + r \cdot (\cos t + i \sin t) \text{ ou } z(t) = z_0 + r \cdot e^{it} \text{ avec } 0 \leq t \leq 2\pi$$



2.3. Image d'une courbe paramétrique sous une transformation complexe :

Si $w = f(z)$ est une transformation complexe et si C est une courbe paramétrique donnée par la paramétrisation $z(t), a \leq t \leq b$ alors :

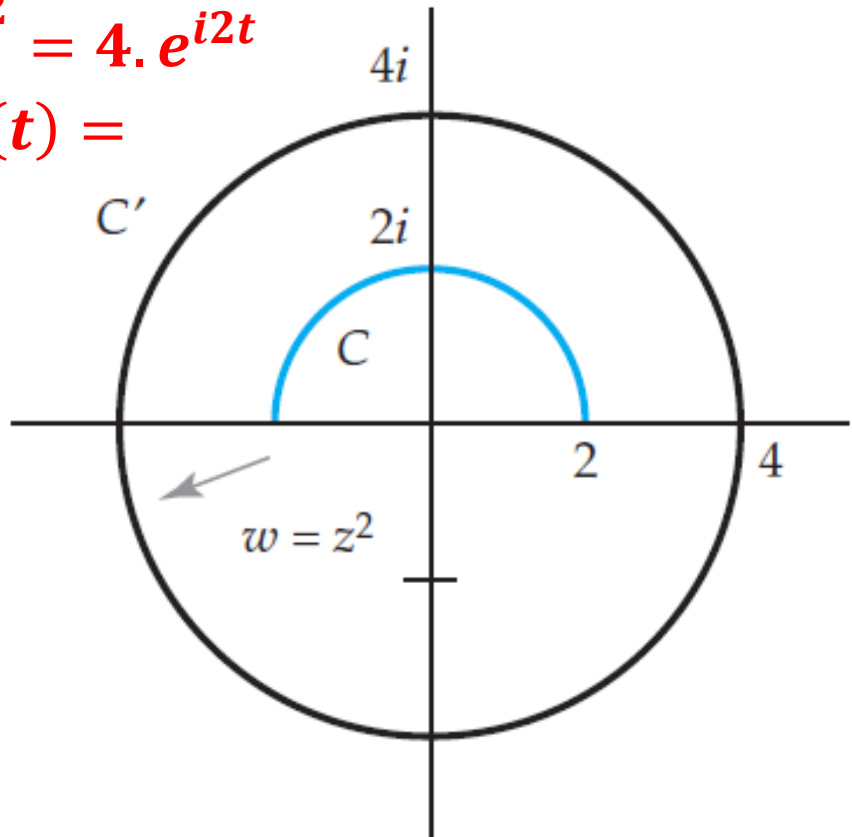
$$w(t) = f(z(t)), a \leq t \leq b$$

Est la paramétrisation de C' est l'image de C sous $w = f(z)$

2.3. Image d'une courbe paramétrique sous une transformation complexe :

Exemple 5: sous $w = z^2$, trouver l'image du demi-cercle défini par : $z(t) = 2 \cdot e^{it}$ avec $0 \leq t \leq \pi$

**sous $w = z^2$, $w = z^2 = (2 \cdot e^{it})^2 = 4 \cdot e^{i2t}$
 $z(t) = 2 \cdot e^{it}$ avec $0 \leq t \leq \pi \rightarrow w(t) = 4 \cdot e^{i2t}$: $0 \leq 2t \leq 2\pi$**



3. Transformation linéaire :

On rappelle qu'une fonction réelle de la forme
 $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$, est appelée une fonction linéaire.
Dans le même raisonnement on définit en analyse complexe ;
une fonction complexe linéaire qui est de la forme :
 $f(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}$.

Translation : une fonction linéaire complexe du type :

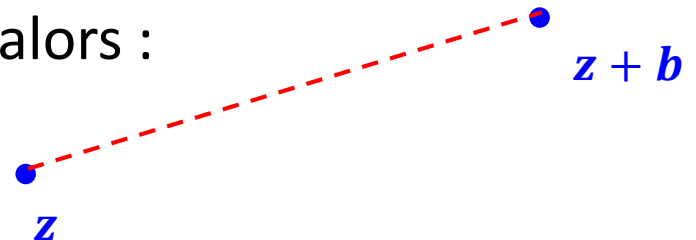
$$T(z) = z + b, b \neq 0$$

Est appelée une Translation.

Elle déplace l'image du point z vers le nouveau point $w = T(z)$.

Si on pose : $z = x + iy$ et $b = x_0 + iy_0$, alors :

$$w = z + b = (x + x_0) + i(y + y_0).$$



3. Transformation linéaire :

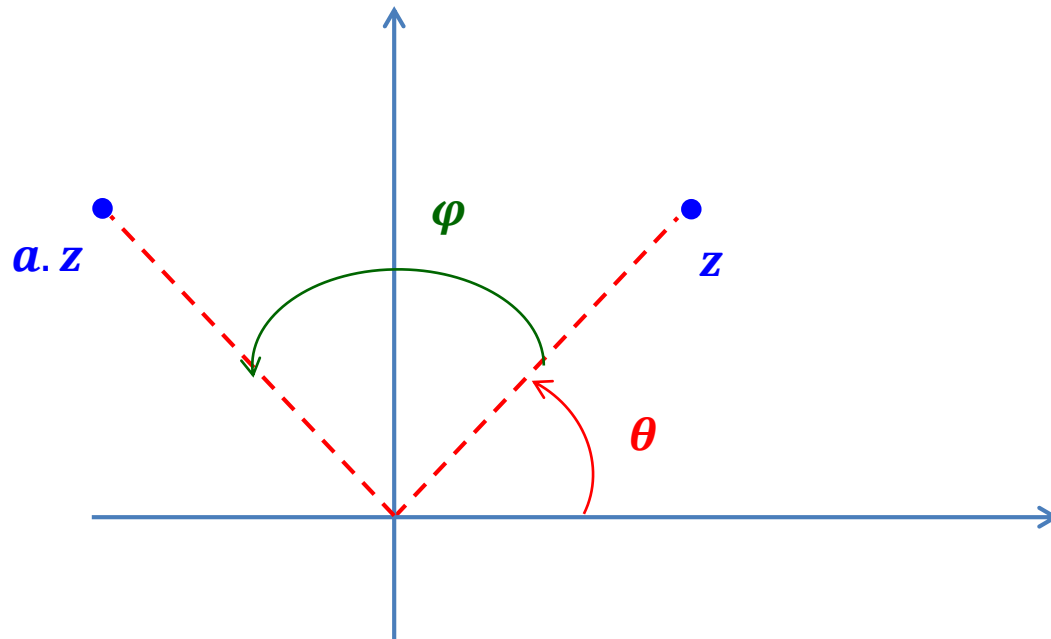
Rotation : une fonction linéaire complexe du type :

$$R(z) = az, |a| = 1$$

Est appelée une Rotation. Si on pose en notation complexe :

$z = r.e^{i\theta}$ et $a = 1.e^{i\varphi}$ alors on trouve :

$$w = R(z) = r.e^{i\theta} \times 1.e^{i\varphi} = r.e^{i(\theta+\varphi)}.$$



3. Transformation linéaire :

Homothétie : une fonction linéaire complexe du type :

$$H(z) = az, a \in \mathbb{R}^+$$

Est appelée Homothétie. On trouve :

$$w = H(z) = r \cdot e^{i\theta} \times a = ar \cdot e^{i\theta}$$

On retiendra deux cas possibles :

Si $a > 1$: alors $ar > r$ on parle dans ce cas d'Agrandissement

Si $a < 1$: alors $ar < r$ on parle dans ce cas de Réduction



réduction



agrandissement

3. Transformation linéaire :

On en déduit d'une manière générale: $f(z) = az + b; \{a \neq 0, b \neq$

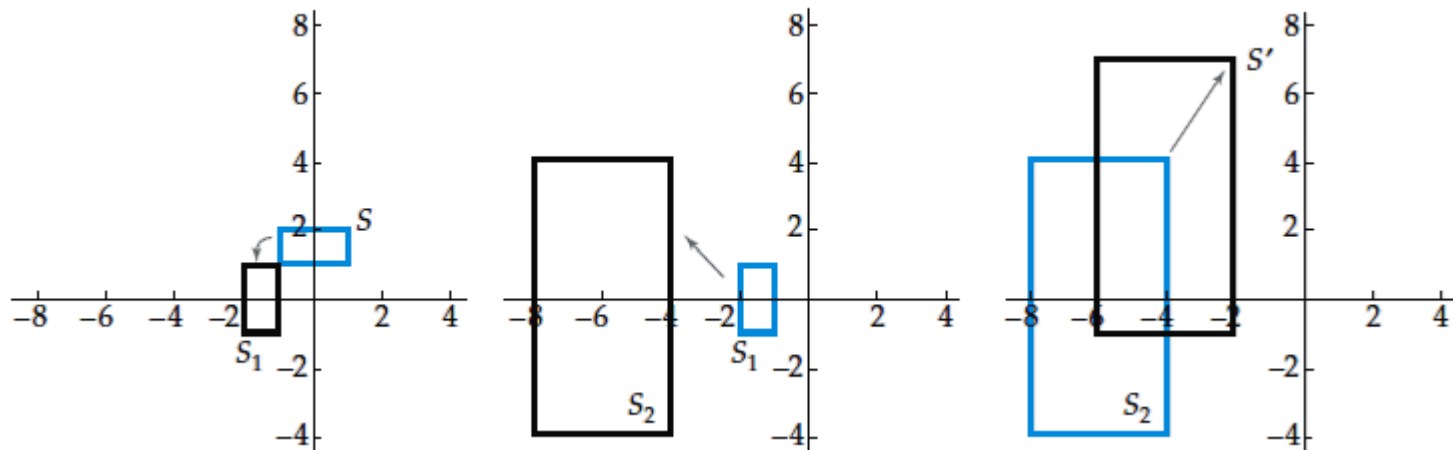
3. Transformation linéaire :

Exemple 6: Trouver l'image du rectangle défini par les sommets : $S = \{-1 + i, 1 + i, 1 + 2i, -1 + 2i\}$ sous la transformation : $f(z) = 4iz + 2 + i3$.

L'image de S sous la transformation $f(z) = 4iz + 2 + i3$:

$$f(-1 + i) = -2 - i; f(1 + i) = -2 + 7i;$$

$$f(1 + 2i) = -6 + 7i; f(-1 + 2i) = -6 - i$$



4. Transformation non-linéaire :

On définit une **fonction polynomiale complexe** de la forme :

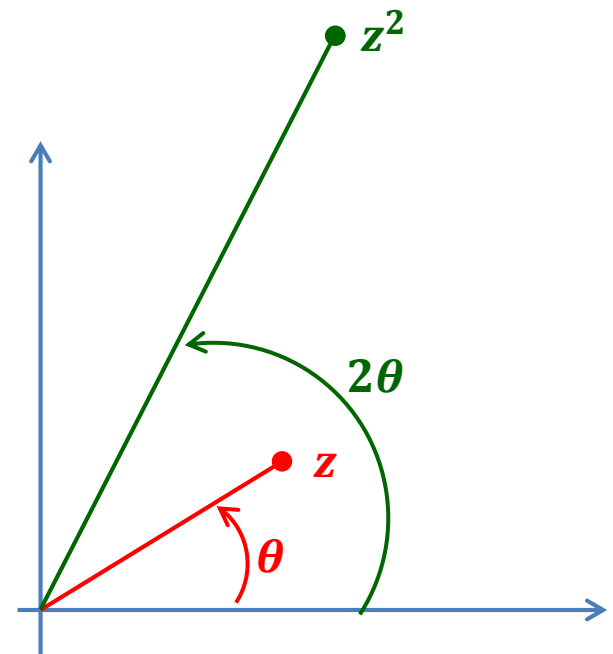
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0; n$$

$$\in \mathbb{N} \text{ et } \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\} \in \mathbb{C}$$

4.1. Fonctions puissances spéciales

4.1.1. La fonction z^2

Pour tout $z = x + iy \rightarrow w = f(z) = z^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$, qu'on peut écrire sous forme exponentielle :



$$z = r \cdot e^{i\theta} \rightarrow w = f(z) = z^2 = (r \cdot e^{i\theta})^2 = r^2 \cdot e^{i2\theta}$$

4.1.1. La fonction z^2 :

Exemple 7: Trouver l'image (C') de l'arc (C) défini par:

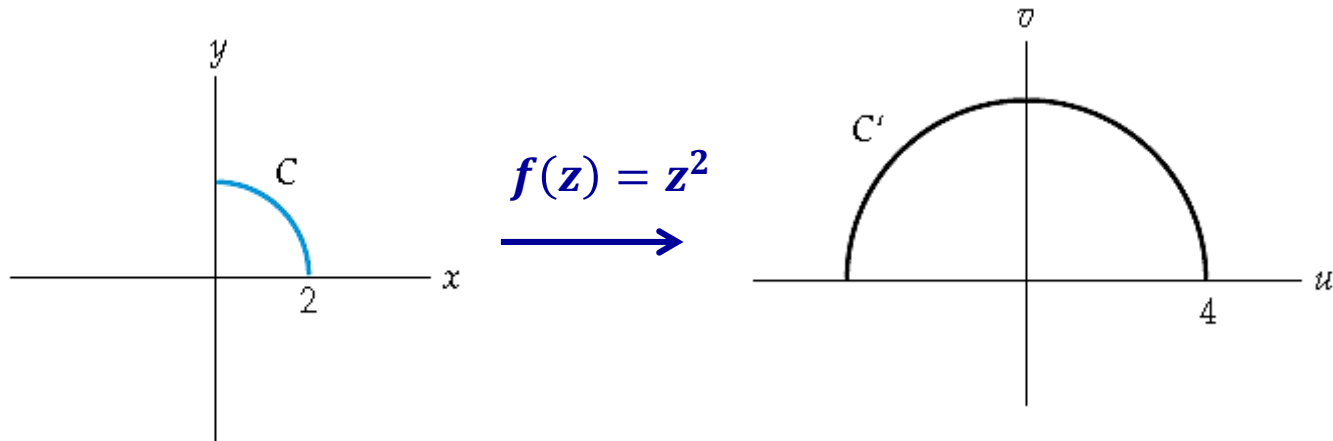
$$|z| = 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$$

Sous la transformation : $w = f(z) = z^2$.

Solution: L'image de C sous la transformation $f(z) = z^2$

$$C: |z| = 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \rightarrow z = 2 \cdot e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$C': w = z^2 = (2 \cdot e^{i\theta})^2 = 4 \cdot e^{i2\theta}, 0 \leq 2\theta \leq \pi$$



4. Transformation non-linéaire :

4.1. Fonctions puissances spéciales

4.1.2. La fonction $z^n, n > 2$

avec le même raisonnement pour $n > 2$ la fonction polynomiale dans sa forme exponentielle :

$$z = r \cdot e^{i\theta} \rightarrow w = f(z) = z^n = (r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$$

Ou le module de z est agrandi (contracté) de r^n et son argument est augmenté pour devenir $n\theta$.

4.1.2. La fonction z^n :

Exemple 8: Trouver l'image (C') du disque (C) défini par:

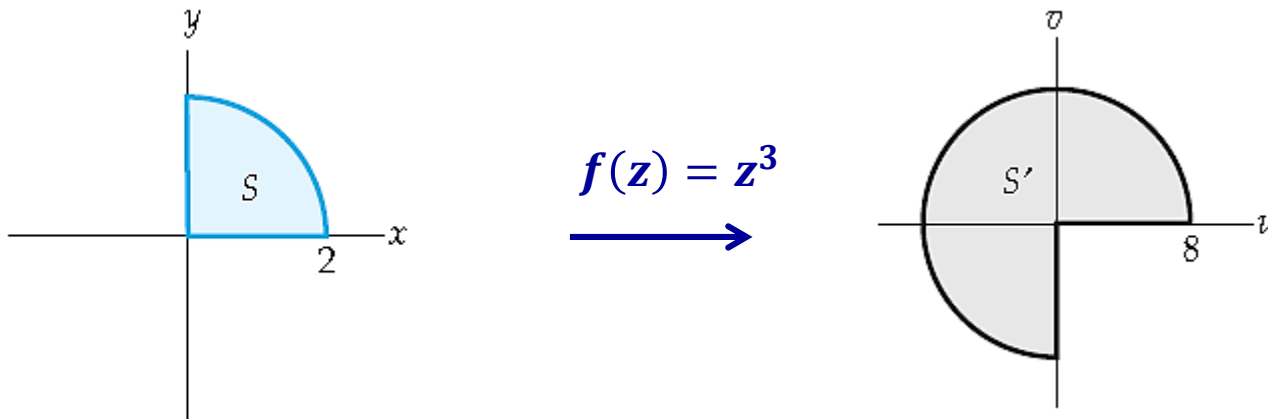
$$|z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$$

Sous la transformation : $w = f(z) = z^3$.

Solution: L'image de C sous la transformation $f(z) = z^3$

$$C: |z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \rightarrow z = r \cdot e^{i\theta}, r \leq 2, ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$C': w = z^3 \rightarrow (r \cdot e^{i\theta})^3 = r^3 \cdot e^{i3\theta}, r^3 \leq 8; 0 \leq 2\theta \leq 3\pi/2$$



5. La fonction multivaluée :

Pour différencier entre une fonction « au sens propre » (application bijective) et une fonction multivaluée, on réservera la notation suivante :

fonction : $f(z), g(z); h(z) \dots$

Fonction multivaluée ou Multifonction : $F(z), G(z), H(z), \dots$

A titre d'exemple, l'application $z^{1/3}$:

- la fonction $g(z) = z^{1/3}$ fait référence à la **racine cubique principale** ($k = 0$),
- alors que $G(z) = z^{1/3}$ représente la multifonction qui assigne les trois racines cubiques à la valeur de z donnée ($k = 0, 1, 2$)

6. Limite et continuité :

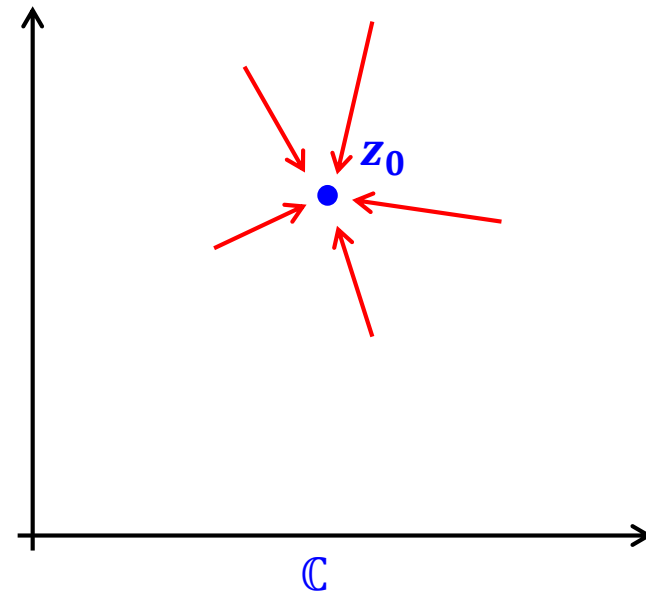
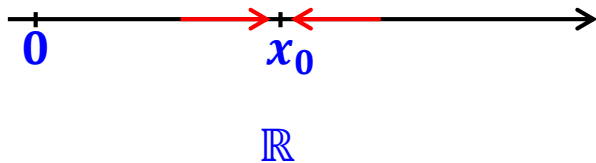
Remarque:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} ; \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

Une différence majeure existe entre les deux notions de limites réelle et complexe :

- $L \in \mathbb{R}$: ***on approche x_0 par deux directions : à gauche et à droite ;***
- $L \in \mathbb{C}$: ***on peut approcher z_0 avec une infinité de directions,***

tout en donnant la même valeur de la limite L de la fonction $f(z)$.



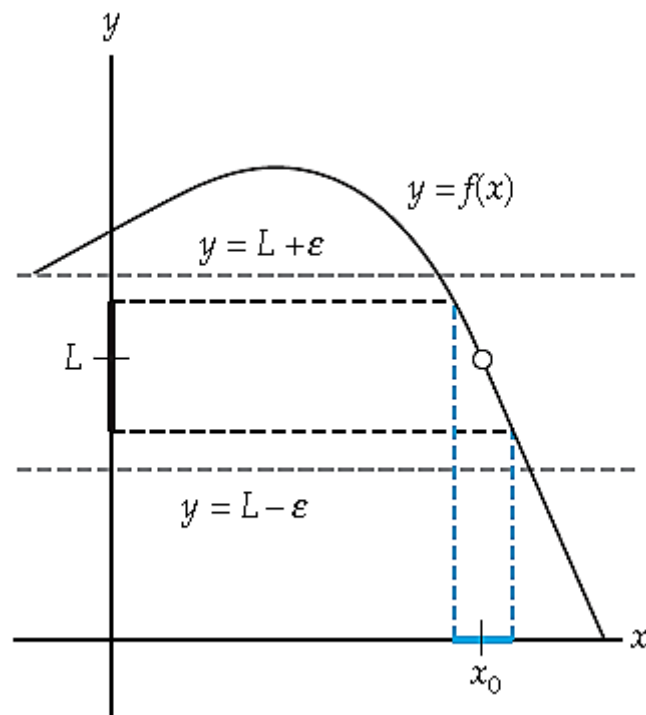
6. Limite et continuité :

6.1.1. Les limites réelles :

Pour une fonction $f(x)$, on dit que la limite de f lorsque x tend vers x_0 , existe et elle est égale à L :

si pour chaque $\varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ tel que : $|f(x) - L| < \varepsilon$

Tant que $0 < |x - x_0| < \delta$



6. Limite et continuité :

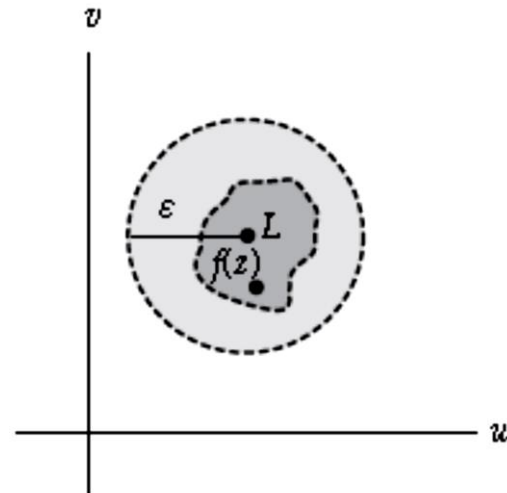
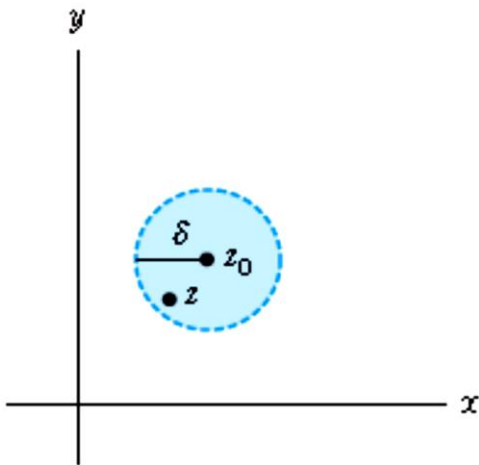
6.1.2. Les limites complexes :

Déf. 2.8 :

On suppose que la fonction complexe f est définie dans un voisinage avec exclusion de z_0 et on suppose également que L est un nombre complexe. **La limite de f lorsque z tend vers z_0 est égale à L** , notée :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : |f(z) - L| < \varepsilon$ pour tout $z : 0 < |z - z_0| < \delta$.

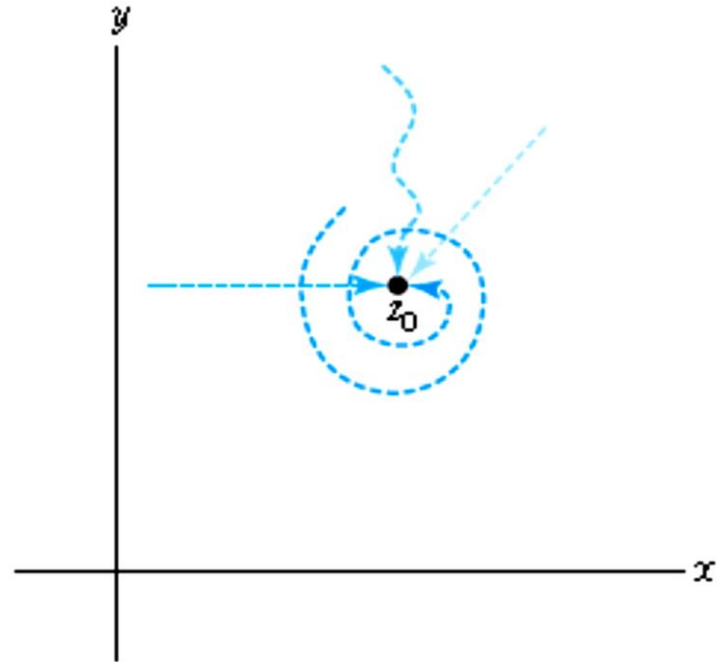


6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Critère de non existence de la limite :

Si f approche les deux nombres complexes $L_1 \neq L_2$ par deux courbes ou chemins différents passant par z_0 , alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ est non-existante (ou n'existe pas)



6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Exemple 16: Montrer que la $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas

Solution:

Si on approche z_0 sur l'axe x , on considère alors des $z = x + i0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + i0}{x - i0} = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1$$

Si on approche z_0 sur l'axe y , on considère alors des $z = 0 + iy$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = \lim_{z \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Donc la limite de $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas en $z = 0$

6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Théorème 2.1. Partie réelle et imaginaire d'une limite

Supposant que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $L = u_0 + iv_0$.

Alors on énonce que : $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \end{cases}$$

6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Exemple 17: utiliser le théorème 2.1 pour calculer :

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + i)$$

Solution:

Si on approche $f(z) = (z^2 + i) = [x^2 - y^2] + i[2xy + 1]$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + i)$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} ([x^2 - y^2] + i[2xy + 1])$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} [x^2 - y^2] + i \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} [2xy + 1]$$

$$= \mathbf{0 + i3 = i3}$$

6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Théorème 2.2. Propriétés des limites complexes

Supposant que f et g sont deux fonctions complexes. Si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$$

Alors :

On notera deux résultats de bases du théorème 2.2 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} c = c, c: \text{cte cplx}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$$

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cL, c : \text{est une constante complexe},$$

$$(ii) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M,$$

$$(iii) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M,$$

$$(iv) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

6. Limite et continuité :

6.1.2. Les limites complexes :

Exemple 18: utiliser le théorème 2.2, ainsi que ses deux résultats basiques pour calculer les limites:

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}; (b) \lim_{z \rightarrow 1+i\sqrt{3}} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - i\sqrt{3}}$$

Solution: (a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}:$

$$\lim_{z \rightarrow i} z^4 = \left(\lim_{z \rightarrow i} z \right)^4 = i^4 = 1; \lim_{z \rightarrow i} z^2 = \left(\lim_{z \rightarrow i} z \right)^2 = i^2 = -1:$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \frac{(3+i)1 - (-1) + 2(i)}{i+1} = \frac{4+i3}{i+1}$$

$$= \frac{4+i3}{i+1} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{7-i}{2}$$

6. Limite et continuité :

6.1.3. La continuité d'une fonction complexe :

Déf. 2.9. Continuité d'une fonction complexe :

Une fonction complexe f est **continue dans un point z_0** si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Critères pour la continuité :

f est continue dans un point z_0 si chacune des trois conditions est satisfaite :

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existe,}$$

$$(ii) f \text{ est définie en } z_0,$$

$$(iii) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Si f n'est pas continue dans un point z_0 , on dit alors que f est discontinue en ce point.

exemple: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$: discontinue dans les deux points i et $-i$.

6. Limite et continuité :

6.1.3. La continuité d'une fonction complexe :

Exemple 19:

Vérifier si $f(z) = z^2 - iz + 2$ est continue en $z_0 = 1 - i$.

Solution:

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} f(1-i) = \lim_{z \rightarrow 1-i} (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = -2i - i - 1 + 2 = 1 - i3$$

$$f(1-i) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - i3$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} f(1-i) = f(1-i)$$

$f(z)$ est définie et continue dans le point $1 - i$

6. Limite et continuité :

6.2.1. propriétés des fonctions continues:

Théorème 2.3. Partie réelle et imaginaire d'une fonction continue :

On suppose que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $z_0 = x_0 + iy_0$.

Alors on dit que la fonction complexe f est continue en z_0 si et seulement si les deux fonctions réelles u et v sont continues dans le point (x_0, y_0) .

Exemple 20: en utilisant le théorème 2.3, montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$

6. Limite et continuité :

6.2.1. propriétés des fonctions continues:

Théorème 2.4. Propriétés des fonctions continues :

si f et g sont deux fonctions complexes continues en z_0 , alors les fonctions suivantes le sont également dans ce même point :

$$(i) \ c.f(z), \quad c : \text{Cte cplx},$$

$$(ii) \ f(z) \pm g(z),$$

$$(iii) \ f(z).g(z),$$

$$(iv) \ \frac{f(z)}{g(z)}, \ g(z_0) \neq 0$$

6. Limite et continuité :

6.2.1. propriétés des fonctions continues:

Théorème 2.5. Continuité des fonctions polynomiales :

Les fonctions polynomiales sont continues sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$

Par exemple: $f(z) = 4i \cdot z^4 + (2 - i)z^3 - z + 5$ est continue sur $\mathbb{C}$

A l'inverse des fonctions polynomiales complexes, les fonctions fractionnelles complexes : $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ne sont pas toujours continues sur tout $\mathbb{C}$, mais elles le sont uniquement sur leur domaine de définition, tel que $q(z) \neq 0$.

7. La dérivée d'une fonction complexe :

Déf. 3.1. :

Supposons que la fonction complexe f est définie dans un voisinage de z_0 . La dérivée de f à z_0 , noté f' existe et elle donnée comme :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Dans ce cas la fonction f est dite **dérivable** en z_0

7. La dérivée d'une fonction complexe :

Exemple 20:

Appliquer la définition 3.1 pour trouver la dérivée de la fonction:

$$f(z) = z^2 - 5z$$

Solution:

Comme on va calculer la dérivée de f partout, donc on remplace z_0 par z :

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) = z^2 + 2z.\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z$$

$$f(z) = z^2 - 5z$$

$$\text{Donc: } f(z + \Delta z) - f(z) = 2z.\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z$$

Finalement:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z.\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z - 5$$

$$f'(z) = 2z - 5$$

7. La dérivée d'une fonction complexe :

Règles de dérivation :

$f(z)$ et $g(z)$: deux fonctions définies et dérivables en z

1. Règle de la constante: $\frac{d}{dz} c = 0$ et $\frac{d}{dz} cf(z) = cf'(z)$

2. Règle de la somme: $\frac{d}{dz} [f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$

3. Règle du produit: $\frac{d}{dz} [f(z) \cdot g(z)] = f'(z)g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

4. Règle de la division: $\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{[g(z)]^2}$

5. Règle de la composition: $\frac{d}{dz} [f(g(z))] = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

7. La dérivée d'une fonction complexe :

Exemple 21:

Utiliser les règles de dérivation pour calculer les dérivées de:

$$(a) f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z; (b) f(z) = \frac{z^2}{4z+1}$$

Solution:

$$(b) f(z) = \frac{z^2}{4z+1} \rightarrow f'(z) = \frac{2z \cdot (4z+1) - z^2 \cdot 4}{(4z+1)^2} = \frac{4 \cdot z^2 + 2z}{(4z+1)^2}$$

7.1. La fonction analytique :

Déf. 3.2: Analyticité dans un point

Une fonction complexe $w = f(z)$ est dite **analytique en un point z_0** si elle est dérivable en ce point et dans chaque point dans son voisinage.

Une fonction complexe $f(z)$ est dite analytique dans un domaine D si elle est analytique en chaque point de ce domaine.

Dans ce cas, on parle de fonction Holomorphe ou régulière

Une fonction analytique dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$ est appelée une fonction entière

7.1. La fonction analytique :

Théorème 3.1. : fonctions polynomiales et rationnelle (fractionnaire)

1. Une fonction polynomiale complexe:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0;$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ et } \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\} \in \mathbb{C}$$

Est une fonction entière

2. Une fonction rationnelle: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, est analytique dans tout

domaine D qui ne contient aucun point z_0 pour lequel $q(z_0) = 0$

$p(z)$ et $q(z)$: deux fonctions polynomiales

z_0 : est appelé **un point singulier** de $f(z)$

7.1. La fonction analytique :

Théorème 3.2. : la dérivabilité implique la continuité

Si f est dérivable dans un point z_0 dans un domaine D , alors f est forcément continue dans ce point z_0 .

Théorème 3.3. : la règle de l'Hôpital

Supposons que f et g sont deux fonctions analytiques en z_0 avec $f(z_0) = 0$ et $g(z_0) = 0$ mais $g'(z_0) \neq 0$. alors:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

7.1. La fonction analytique :

Exemple 22:

Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer la limite suivante:

$$\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$$

Solution:

Posons: $f(z) = z^2 - 4z + 5$ et $g(z) = z^3 - z - 10i$

On a bien: $f(2 + i) = 0$ et $g(2 + i) = 0 \rightarrow \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{0}{0}!$

Donc: $f'(z) = 2z - 4 \rightarrow f'(2 + i) = 2i$

et $g'(z) = 3z^2 - 1 \rightarrow g'(2 + i) = 8 + i12$

Alors: $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{f'(2+i)}{g'(2+i)} = \frac{2i}{8+i12} = \frac{3}{26} + i \frac{1}{13}$

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Théorème 3.4. : Les équations Cauchy-Riemann

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est dérivable dans un point $z = x + iy$. Alors en z , les dérivées partielles de 1^{er} ordre de u et v existent et satisfont les équations de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Exemple 23:

Vérifier que la fonction $f(z) = z^2 + z$ satisfait les équations C-R:

Solution:

$$f(z) = z^2 + z = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) :$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x \text{ et } v(x, y) = 2xy + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Critère de non-analyticité:

Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites en chaque point z dans un domaine D , alors la fonction:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ne peut être analytique sur D .

Exemple 24:

montrer que la fonction $f(z) = 2x^2 + i(y^2 - x)$ n'est analytique en aucun point.

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Critère d'analyticité:

Supposons que les fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues et possèdent les dérivées partielles de premier ordre dans un domaine D .

Si u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en chaque point de D , alors la fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique sur D .

Exemple 25:

pour $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$, donner $D = \text{Dom}(f)$ et montrer qu'elle est analytique sur D .

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Théorème 3.5:

Si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues et possèdent les dérivées partielles de premier ordre au voisinage d'un point z , et si elles satisfont les équations Cauchy-Riemann en z , alors la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est dérivable en z et sa dérivée donnée par:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

7.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Théorème 3.6: Fonctions constantes

Supposons la fonction: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique sur un domaine D .

Si $f'(z) = 0$ sur D , alors $f(z) = c$ sur D

8. Les fonctions harmoniques:

Définition 3.3:

La fonction à valeur réelle φ des deux variables x et y qui possède des dérivées partielles continues de 1^{er} et 2nd ordre sur un domaine D et satisfait l'équation suivante appelée équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Cette fonction est dite **Harmonique** sur D .

8. Les fonctions harmoniques:

Théorème 3.7:

Supposons que la fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique sur un domaine D . Alors, les fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques sur D .

Exemple 25:

pour la fonction entière $f(z) = z^2$, donner $u(x, y)$ et $v(x, y)$ et montrer qu'elles sont harmoniques sur $\mathbb{C}$.

8.1. La fonction harmonique conjuguée:

Supposons que la fonction réelle $u(x, y)$ est harmonique sur un domaine D . Alors, il est possible de trouver une autre fonction réelle harmonique $v(x, y)$, tel que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann, alors on peut construire une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui sera analytique sur le domaine D .

La fonction $v(x, y)$ est appelée l'harmonique conjuguée de $u(x, y)$

Exemple 26:

- 1. Vérifier que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ est harmonique***
- 2. Trouver la fonction harmonique conjuguée de $u(x, y)$***