

Rappel sur les nombres complexes

On définit le nombre imaginaire i tel que :
 $i^2 = -1$. Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$
est défini par les couplets :

$$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \rightarrow z = x + iy$$

$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$

1. Simplifier les nombres complexes suivants sous
la forme $a+ib$:

$2i^3 - 3i^2 + 5i$:

$$2i^3 - 3i^2 + 5i = 2i(-1) - 3(-1) + 5i = 3 + i3$$

$3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$:

$$3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9 = 3i - 1 - 7i + 10 = -i4$$

$\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$:

$$\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}} = -i5 + i2 + 20 = 20 - i3$$

$2i^2 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-6} - 12i$:

$$2i^2 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-6} - 12i = -2 - 8i - 5 = -7 - i8$$

2. Simplifier ce qui suit ; sous la forme $a+ib$:

a) $i(5+i7)$:

$$i(5+i7) = -7 + i5$$

b) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3} + i\frac{5}{3}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3} + i\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{12} + i\frac{8}{12} = \frac{3}{4} + i\frac{2}{3}$$

c) $3i + \frac{1}{2-i}$:

$$3i + \frac{1}{2-i} = 3i + \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2}{5} + i\frac{16}{5}$$

d) $\frac{10-i5}{6+i2}$:

$$\frac{10-i5}{6+i2} = \frac{10-i5}{6+i2} \times \frac{6-i2}{6-i2} = \frac{50-i50}{40} = \frac{5}{4}(1-i)$$

e) $\frac{(5-i4)-(3+i7)}{(4+i2)+(2-i3)}$:

$$\frac{(5-i4)-(3+i7)}{(4+i2)+(2-i3)} = \frac{2-i11}{6-i} = \frac{23-i64}{37}$$

f) $\frac{(4+i5)+2i^3}{(2+i)^2}$:

$$\frac{(4+i5)+2i^3}{(2+i)^2} = \frac{4+i3}{3+i4} = \frac{24-i7}{25}$$

g) $(1+i)^2(1-i)^3$:

$$(1+i)^2(1-i)^3 = 4(1-i)$$

3. Trouver $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ pour les nombres
suivants :

$z = \left(\frac{i}{3-i}\right)\left(\frac{1}{2+3i}\right)$:

$$z = \left(\frac{i}{3-i}\right)\left(\frac{1}{2+3i}\right) = \frac{i}{9+i7} = \frac{7+i9}{130} = \frac{7}{130} + i\frac{9}{130}$$

$z = \frac{1}{(1+i)(1-i2)(1+i3)}$:

$$z = \frac{1}{(1+i)(1-i2)(1+i3)} = \frac{1}{(3-i)(1+i3)} = \frac{1}{6+i8} = \frac{6-i8}{100} = \frac{6}{100} - i\frac{8}{100}$$

4. En interprétant z_1 et z_2 comme des vecteurs,
représentez z_1 , z_2 ainsi que leur somme et
différence comme c'est indiqué ci-dessous :

a) $z_1 = 1+i2; z_2 = -1+i; z_1 + z_2; z_1 - z_2$

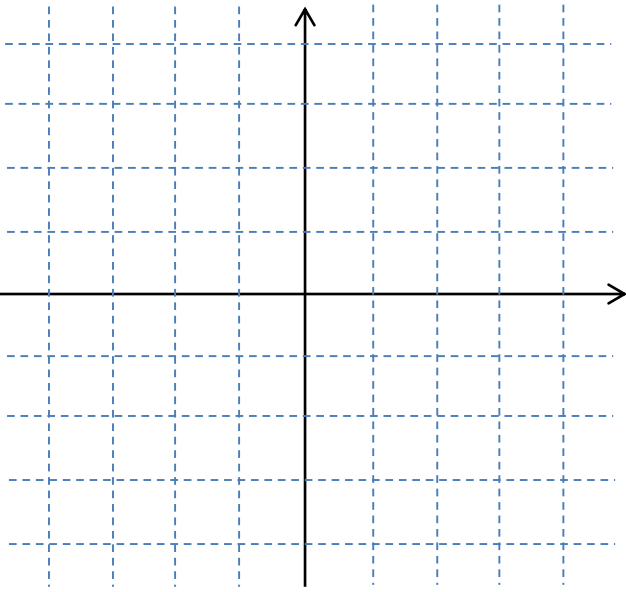
$z_1 + z_2 = i3; z_1 - z_2 = 2 - i$

b) $z_1 = 1-i; z_2 = 1+i; z_1 + z_2; z_1 - z_2$

$z_1 + z_2 = 2; z_1 - z_2 = -i2$

c) $z_1 = -i3; z_2 = -2+i; z_1 + z_2; z_1 - z_2$

$$z_1 + z_2 = -2 - i2; z_1 - z_2 = 2 - i4.$$



$$c) 1+i : 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$d) -\sqrt{3} + i : -\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$e) -2 - i2\sqrt{3} :$$

$$-2 - i2\sqrt{3} = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$f) \frac{3}{-1+i} : \frac{3}{-1+i} = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$g) -12-i15 : \begin{aligned} -12-i15 &= -3(4+i5) \\ &= 19,2(\cos 4,04 + i \sin 4,04) \end{aligned}$$

5. trouvez les modules des nombres complexes suivants :

$$a) (1-i)^2 :$$

$$|(1-i)^2| = 2$$

$$b) i(2-i) - 4(1+i0,25) :$$

$$|i(2-i) - 4(1+i0,25)| = \sqrt{10}$$

$$c) \frac{2i}{3-i} :$$

$$\left| \frac{2i}{3-i} \right| = \frac{|2i|}{|3-i|} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$d) \frac{1-i2}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} :$$

$$\left| \frac{1-i2}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} \right| = |1-i| = \sqrt{10}$$

6. Ecrire les nombres complexes suivants, dans la forme polaire :

$$a) 2 : 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$b) -10 : -10 = 10(\cos \pi + i \sin \pi)$$

7. Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$:

$$a) 2e^{i\frac{\pi}{8}} : \dots\dots\dots$$

$$2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 1,84 + i0,76$$

$$b) 4e^{i\frac{3\pi}{2}} : \dots\dots\dots$$

$$4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 1,53 + i3,7$$

$$c) \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}} : \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 + i2$$

$$d) \sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{3}} : \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 1,673 + i0,448$$