Université Djilali BOUNAAMA de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

L2 Physique Fondamentale

Fonction de la variable complexe

Chapitre 1: Le plan complexe

Dr. S.E. BENTRIDI

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

Ce cours est principalement extrait de la référence:
D. G. ZILL, P. D. SHANAHAN, « a first course in complex analysis with applications, Ed. Jones & Bartlett Publishers, 2003.

Test:

- **Calculer** $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}, i^{13}, i^{14}, i^{15}, i^{16}, i^{17}$

- **Déduire une règle pour** i^n **en fonction de la parité de** n

- **Calculer :** $i^{1984}, i^{2021}, i^{2022}$

20min

Test: i^n

- Calculer $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}$

- Déduire une règle pour i^n en fonction de la parité de n

- **Solution:**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

- Donc on en déduit:

$$i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1;\ i^{4n+3} = -i$$

- **On trouve:** $i^{1984} = i^{4\times 496} = 1;\ i^{2021} = i^{(4\times 505)+1} = i;$

$$i^{2022} = -1$$

1. Propriétés des nombres complexes

- ***Définition 1.1 :*** *un nombre complexe est tout nombre qui s'écrit sous la forme :* $z = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$*. Où* a *et* b *sont des réels,* i *est le nombre imaginaire unitaire.*
- $\boldsymbol{a = Re(z)}$ *: est appelé* ***partie réelle*** *de* z *;*
- $\boldsymbol{b = Im(z)}$ *: est appelé* ***partie imaginaire*** *de* z *.*

1. Propriétés des nombres complexes

- ***Définition 1.2 : égalité.*** *On dit que les nombres complexe* $z_1 = a_1 + ib_1$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$ *sont égaux, si :*
- $a_1 = Re(z_1) = a_2 = Re(z_2)$

  et
- $b_1 = Im(z_1) = b_2 = Im(z_2)$

1.1. Opérations arithmétiques

Soient $z_1 = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_1}$ $et\ z_2 = \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_2}$:

- Addition :

$$z_1 + z_2 = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_1}) + (\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) + i(\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2})$$

- Soustraction :

$$z_1 - z_2 = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_1}) - (\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2}) + i(\boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{b_2})$$

- Multiplication :

$$z_1 . z_2 = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_1}).(\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2}) + i(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{b_2})$$

- Division :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b_2})} = \frac{(\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2})}{\boldsymbol{a_2^2} + \boldsymbol{b_2^2}} + i\,\frac{(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{b_2})}{\boldsymbol{a_2^2} + \boldsymbol{b_2^2}}$$

Avec $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$

1.1. Opérations arithmétiques

- Règle de commutation : $\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 . z_2 = z_2 . z_1 \end{cases}$

- Règle d'association : $\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3 \end{cases}$
- Règle de distribution : $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$

1.1. Opérations arithmétiques

Exercice: Simplifier les calculs suivants:

(a) $(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})+\mathbf{3}\boldsymbol{i}$; ***(b)*** $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})$; ***(c)*** $(\mathbf{5}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})-(-\mathbf{1}+\mathbf{8}\boldsymbol{i})$;

(d) $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})/(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})$ ***(e)*** $(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})-{}^{(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{i})}/_{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}$

1.1. Opérations arithmétiques

Exercice: Simplifier les calculs suivants:

(a) $(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})+\mathbf{3}\boldsymbol{i}$; ***(b)*** $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})$; ***(c)*** $(\mathbf{5}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})-(-\mathbf{1}+\mathbf{8}\boldsymbol{i})$;

(d) $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})/(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})$ ***(e)*** $(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})-{}^{(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{i})}/_{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}$

(a) $(1+2i)+3i=1+5i$

(b) $(1+i)(1-i)=1+1+i-i=2$

(c) $(5+2i)-(-1+8i)=6-6i=6(1-i)$

(d) $\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{1-1}{1^2+(-1)^2}+i\,\frac{1-(-1)}{1^2+(-1)^2}=0+i\,\frac{2}{2}=i$

(e) $(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})-{}^{(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{i})}/_{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}=(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})-\left(\frac{-\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}\right)=\mathbf{2}+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}=\mathbf{2}+\mathbf{2}\boldsymbol{i}$

1.2. L'élément neutre, unitaire, conjugué et l'inverse :

- On définit le nombre complexe ***nul*** (zéro) par : $0 + i0$; tel que :

$$z + (0 + i0) = (a + ib) + (0 + i0) = a + ib = z$$

C'est l'élément **neutre** pour l'opération **d'addition**.

- On définit le nombre complexe ***unitaire*** par : $1 + i0$; tel que :

$$z.(1 + i0) = (a + ib)(1 + i0) = a + ib = z$$

C'est l'élément **neutre** pour l'opération de **multiplication**.

- On définit **le conjugué** d'un nombre complexe par :

$$\bar{z} = z^* = \overline{(a + ib)} = a - ib$$

1.2. L’élément neutre, unitaire, conjugué et l’inverse :

- Il faut noter que la conjugaison est distributive :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ ; \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\ ;$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}\ ; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ ; \overline{\overline{z}} = z$$

- On remarquera également que :

- $\boldsymbol{z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2Re(z) \rightarrow Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}}$
- $\boldsymbol{z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2Im(z) \rightarrow Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}}$
- $\boldsymbol{z.\overline{z} = (a + ib).(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2}$

- On revient sur la division pour remarquer que :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{a_2^2 + b_2^2}$$

avec: $a_2 \neq 0\ ou\ b_2 \neq 0$

1.2. L’élément neutre, unitaire, conjugué et l’inverse :

- Dans le système des nombres complexes chaque nombre z possède un unique inverse par rapport l’addition z' tel que :

$$z + z' = 0 \rightarrow z' = -z$$

- Egalement par rapport la multiplication, chaque $z \neq 0$ possède un inverse unique z'' tel que :

$$z.z'' = 1 \rightarrow z'' = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

- z^{-1} est appelé aussi le réciproque de z

1.2. L'élément neutre, unitaire, conjugué et l'inverse :

Exercice:

- Résoudre les équations: (a) $z + 2 - i = 3$; (b) $3z - 6i + 12 = 0$
- Donner le conjugué pour les nombres suivants:

(a) $1 + i$; (b) $-1 + i$; (c) $3 + 5i$; (d) ${}^{(1+2i)}/_{(-1+i)}$; (e) $(2 + i)i$

- Simplifier les nombres complexes suivants:

(a) ${}^{2+i}/_{1-i}$; (b) ${}^{i}/_{1+i}$; (c) ${}^{i(3+i)}/_{2+i}$

1.2. L'élément neutre, unitaire, conjugué et l'inverse :

Exercice:

- Résoudre les équations: (a) $z+2-i=3$; (b) $3z-6i+12=0$

(a) $z=-2+i$; (b) $3z=-12+i6 \rightarrow z=-4+i2$

- Donner le conjugué pour les nombres suivants:

(a) $1+i$; (b) $-1+i$; (c) $3+5i$; (d) ${}^{(1+2i)}/_{(-1+i)}$; (e) $(2+i)i$

(a) $\overline{1+i}=1-i$; (b) $\overline{-1+i}=-1-i$; (c) $\overline{3+i5}=3-i5$;

(d) $\overline{\left({}^{(1+2i)}/_{(-1+i)}\right)}=\frac{\overline{1+2i}}{\overline{-1+i}}=\frac{1-2i}{-1-i}$; (e) $\overline{(2+i)i}=(2-i)(-i)$

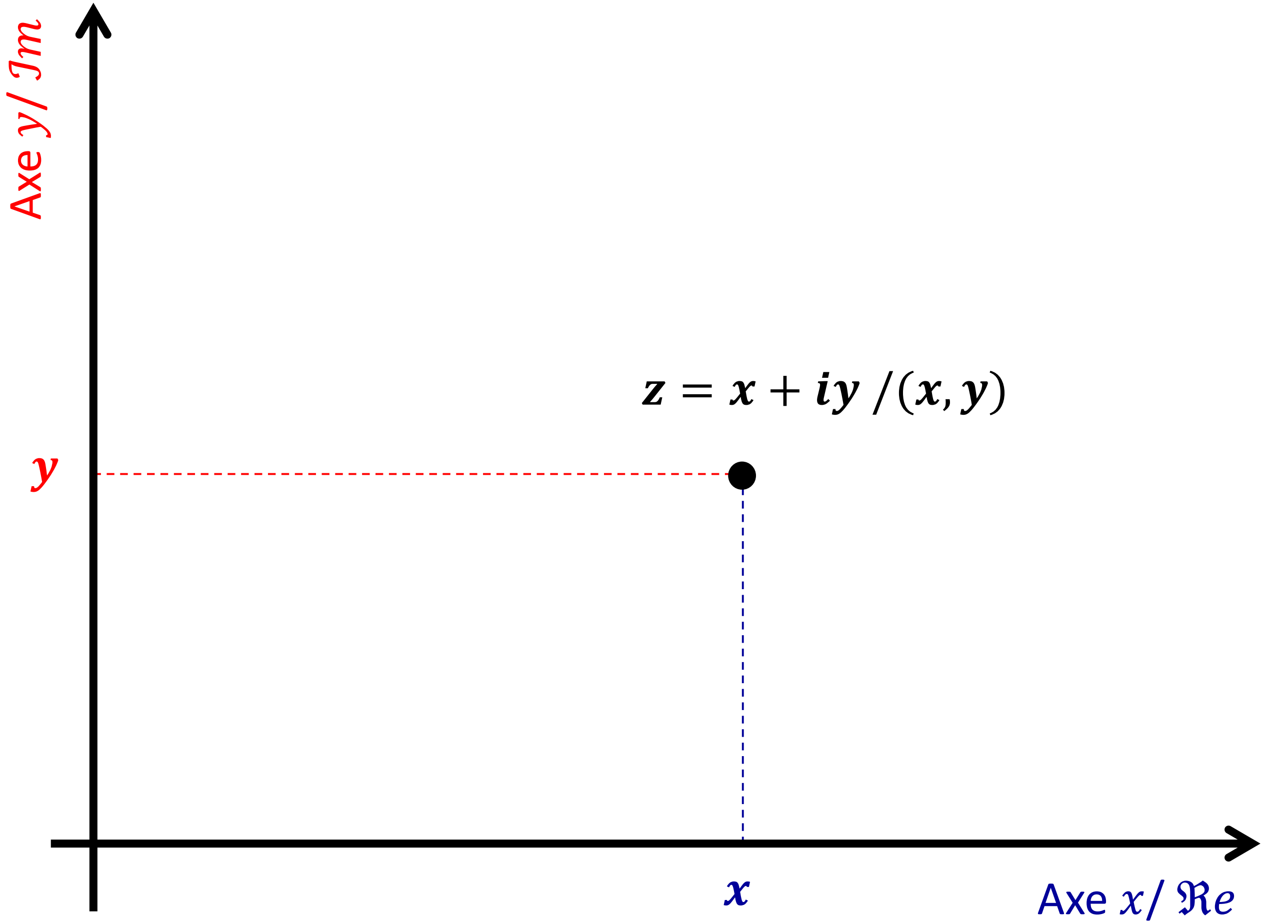
- Simplifier les nombres complexes suivants:

(a) ${}^{2+i}/_{1-i}$; (b) ${}^{i}/_{1+i}$; (c) ${}^{i(3+i)}/_{2+i}$

(a) ${}^{2+i}/_{1-i}=\frac{2+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{2-1+3i}{1+1}=\frac{1+i3}{2}$; (b) ${}^{i}/_{1+i}=\frac{i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1+i}{2}$;

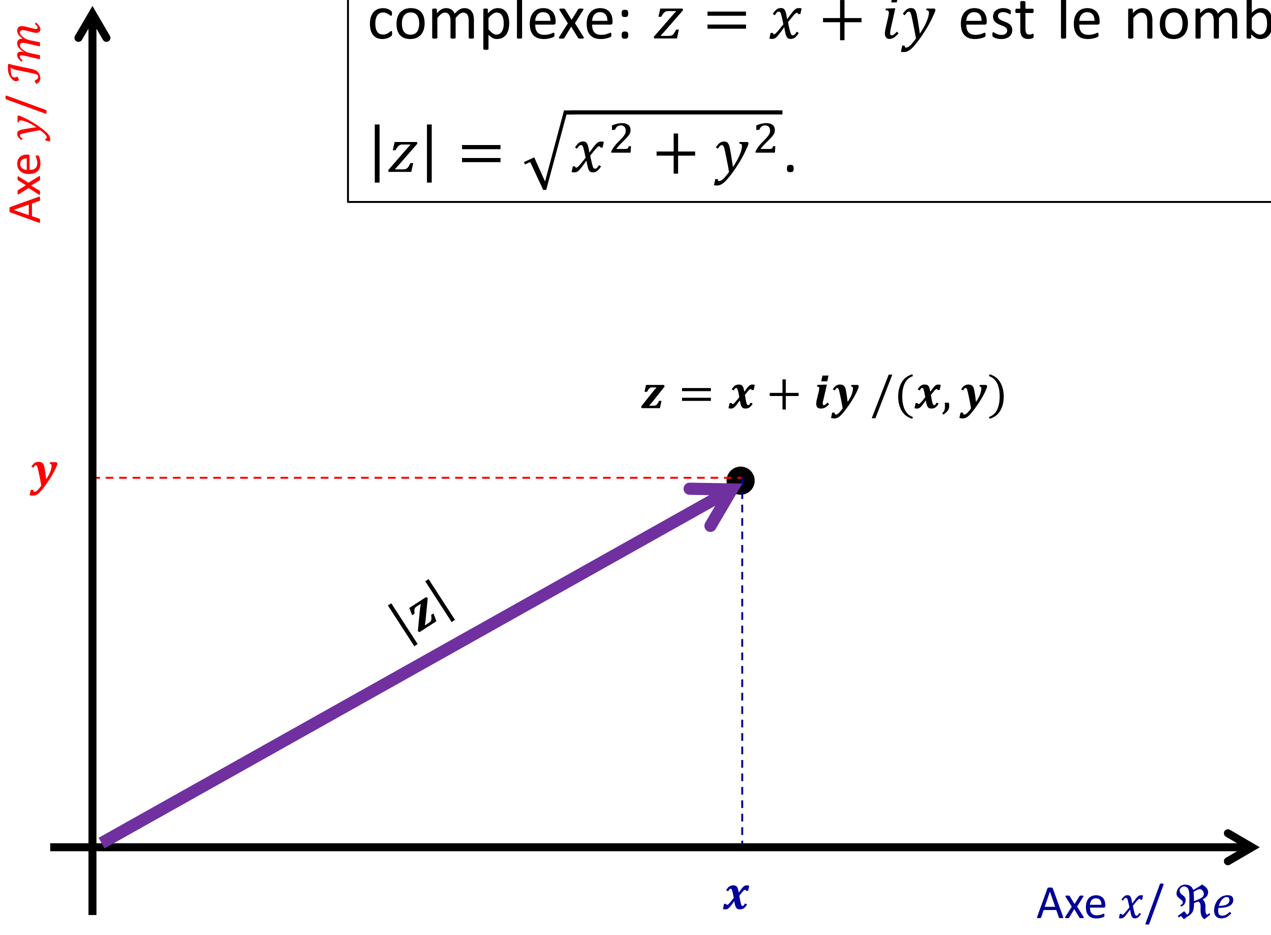
(c) ${}^{i(3+i)}/_{2+i}=\frac{i(3+i)}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{2+i7}{5}$

2. Le plan complexe



2.1. Représentation vectorielle

Définition 1.3 : Le module d'un nombre complexe: $z = x + iy$ est le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



2.2. Propriétés

Pour tout nombre complexe: $z = x + iy$ dont le module est défini : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on peut écrire les propriétés suivantes:

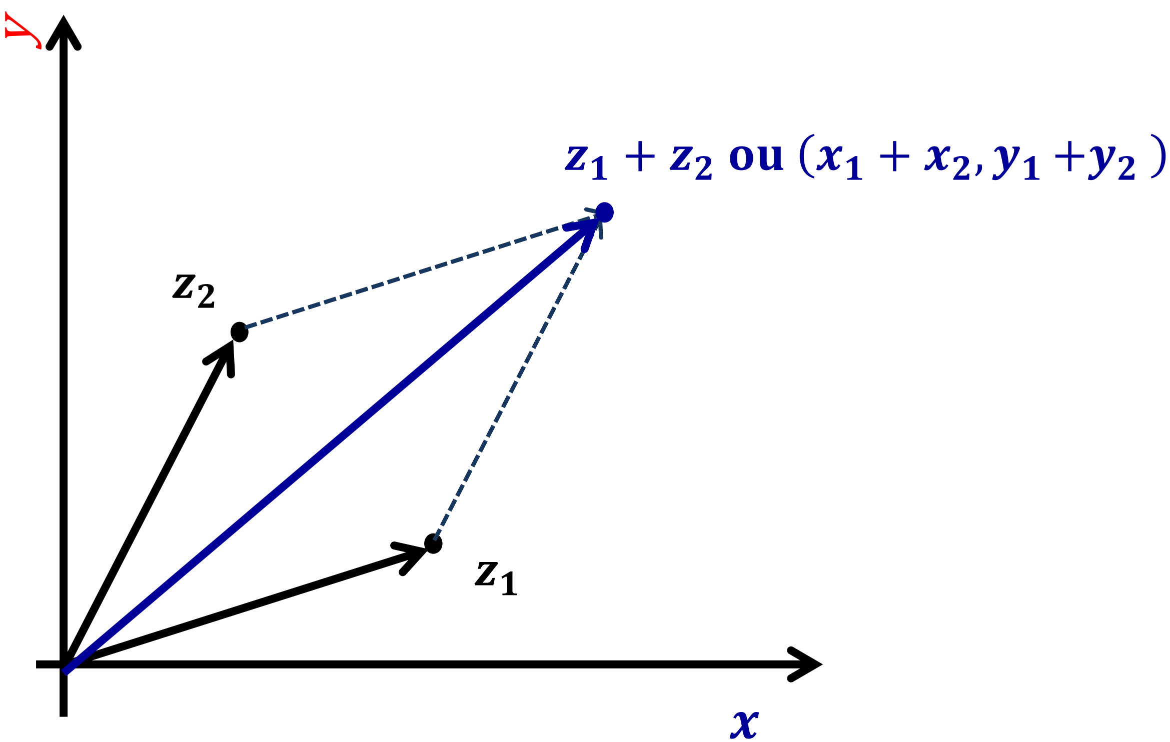
- $|z|^2 = z.\bar{z}$
- $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$
- $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

2.3. la distance dans le plan complexe

soient: $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$:

- Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \leftrightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



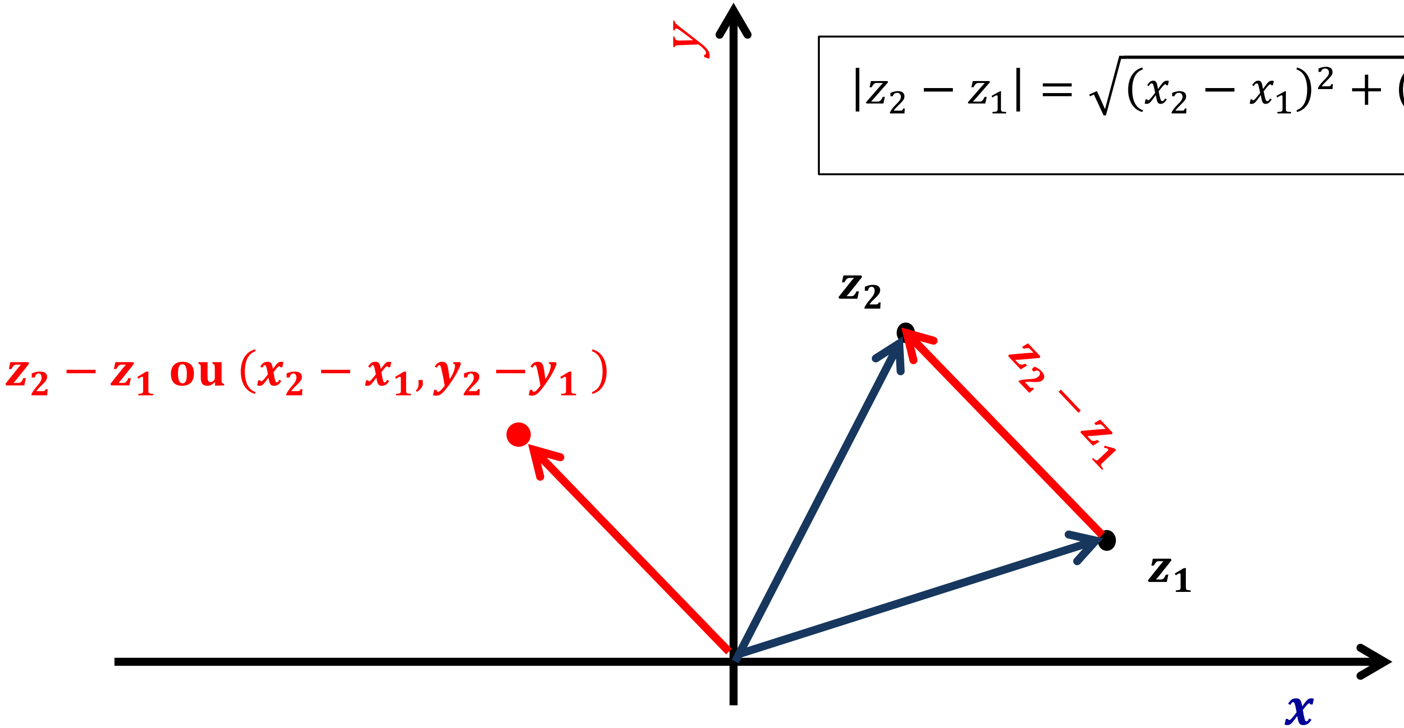
2.3. la distance dans le plan complexe

soient: $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$:

- Soustraction:

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) \leftrightarrow (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\boxed{|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



2.4. Les inégalités

On a toujours : $|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}| \leq |\,\boldsymbol{z_1}| + |\,\boldsymbol{z_2}|$ **....(1)**

- A partir de : $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ on peut écrire:

$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |\,z_1 + z_2| + |-z_2|$; avec $|-z_2| = |\,z_2|$

On déduit alors: $|z_1 + z_2| \geq |\,z_1| - |\,z_2|$

Et comme $|z_1 + z_2| = |\,z_2 + z_1| \geq |\,z_2| - |\,z_1|$ *alors:*

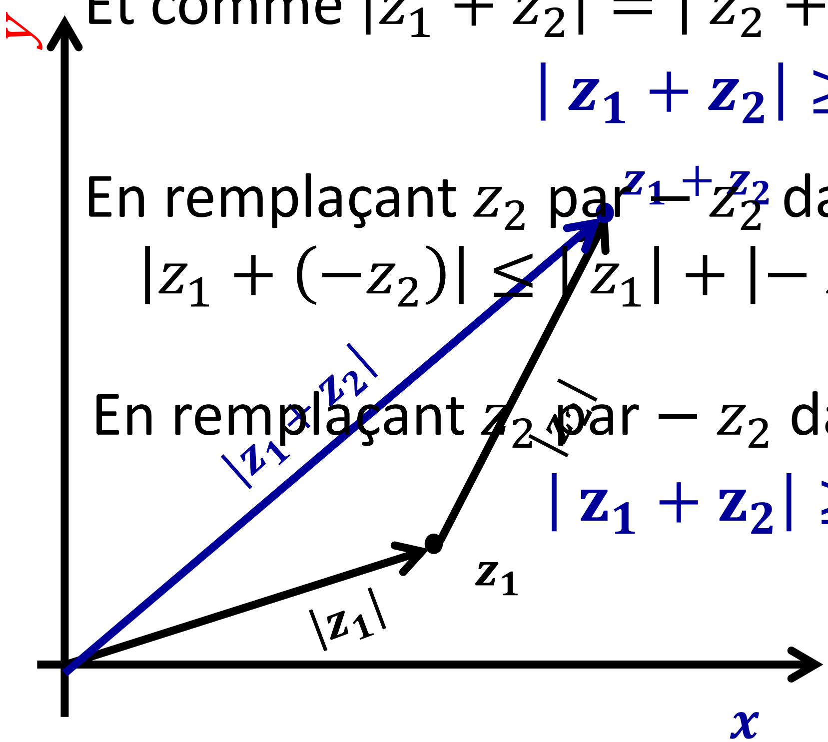
$$|\,\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}| \geq \big||\,\boldsymbol{z_1}| - |\,\boldsymbol{z_2}|\big| \quad \textbf{....(2)}$$

En remplaçant z_2 par $-z_2$ dans (1) on obtient:

$$|z_1 + (-z_2)| \leq |\,z_1| + |-z_2| \rightarrow |\,\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}| \leq |\,\mathbf{z_1}| + |\,\mathbf{z_2}| \textbf{...(3)}$$

En remplaçant z_2 par $-z_2$ dans (2) on obtient:

$$|\,\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}| \geq \big||\,\mathbf{z_1}| - |\,\mathbf{z_2}|\big| \textbf{...(4)}$$



2.4. Les inégalités

Les quatre inégalités peuvent être résumées :

$$\big||\boldsymbol{z_1}| - |\boldsymbol{z_2}|\big| \le |\boldsymbol{z_1} \pm \boldsymbol{z_2}| \le |\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_2}|$$

On peut écrire d'une manière générale, l'inégalité

suivante :

$$|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} + \cdots + \boldsymbol{z_n}| \le |\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_2}| + \cdots + |\boldsymbol{z_n}|$$

3. Forme polaire et exponentielle

3.1. Forme polaire de z

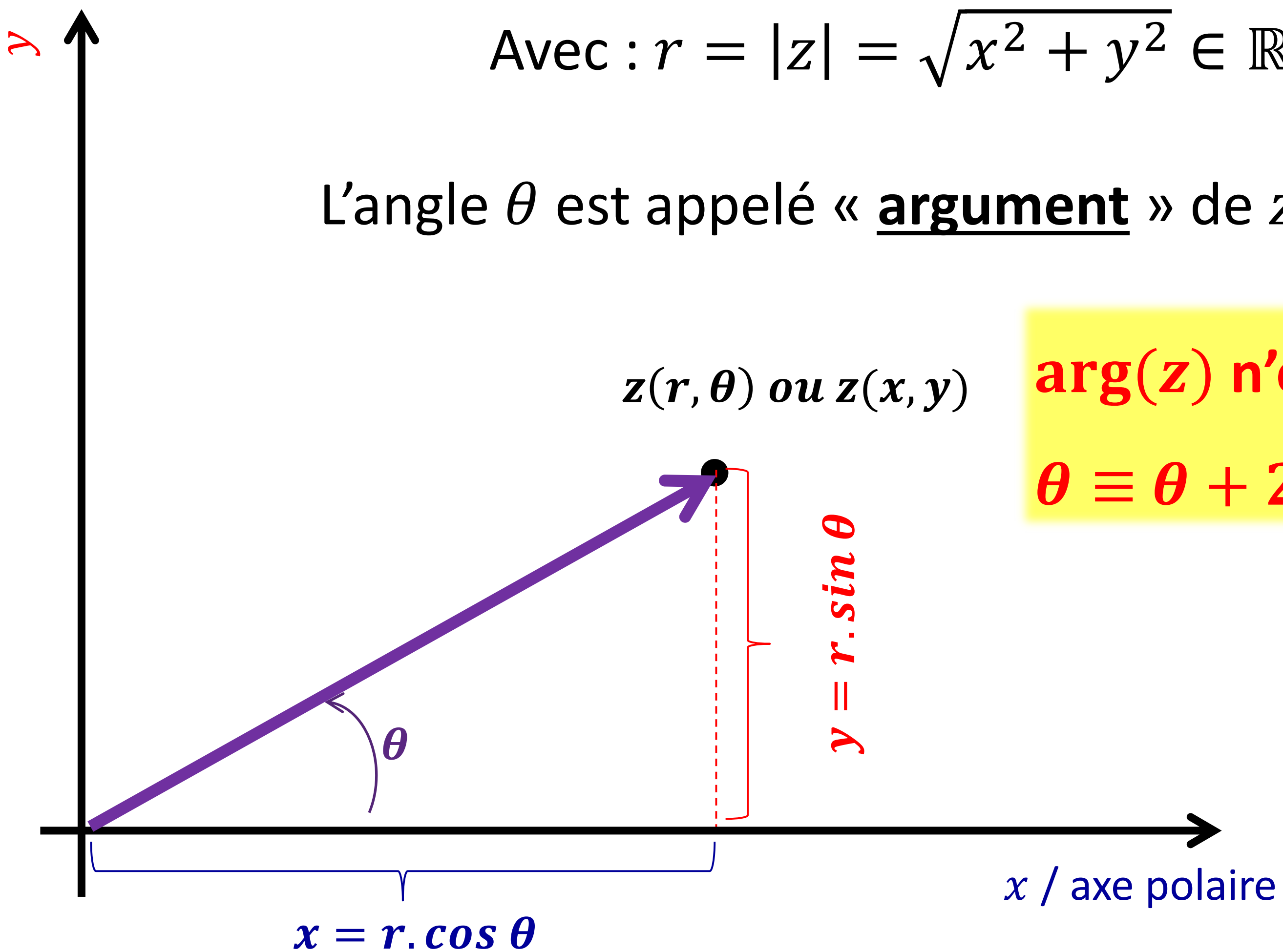
$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \leftrightarrow z = r.\cos\theta + ir.\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Avec : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$; $-\pi \leq \theta < \pi$

L'angle θ est appelé « **argument** » de z : $\theta = \arg(z)$

$\arg(z)$ n'est pas unique:

$$\boldsymbol{\theta \equiv \theta + 2k\pi}$$



3. Forme polaire et exponentielle

3.1. Forme polaire de z

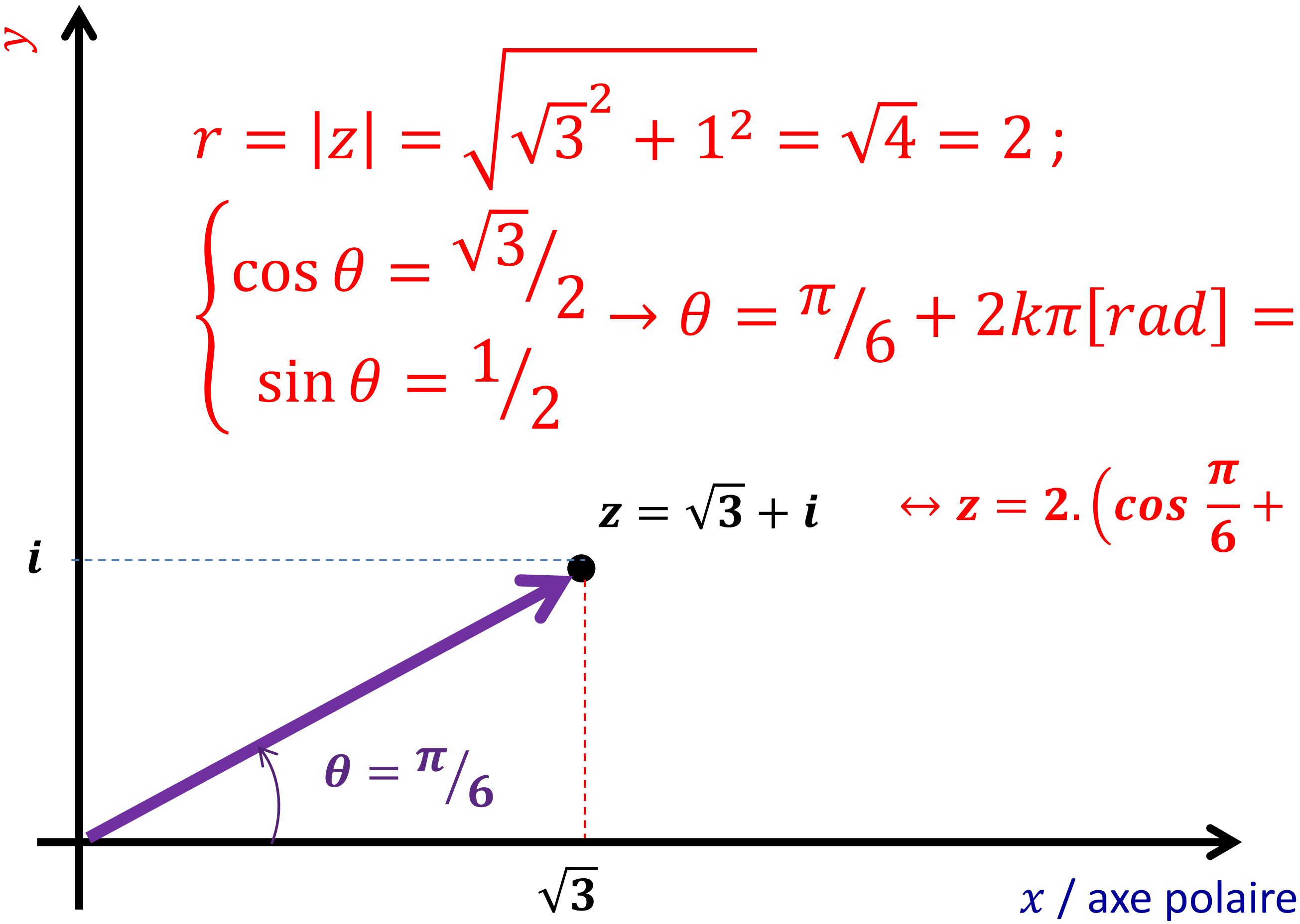
Exercice : écrire sous la forme polaire : $z = \sqrt{3} + i$

Solution:

$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2\ ;$$

$$\begin{cases} \cos\theta = {}^{\sqrt{3}}/_{2} \\ \sin\theta = {}^{1}/_{2} \end{cases} \rightarrow \theta = {}^{\pi}/_{6} + 2k\pi[rad] = 30° + 2k\pi$$

$$\leftrightarrow z = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



3. Forme polaire et exponentielle
3.2. Argument principal

$$z = r.\cos\theta + ir.\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Comme $arg(z)$ n'est pas unique à cause de la périodicité des

fonctions sinus et cosinus ($\theta \equiv \theta + 2k\boldsymbol{\pi}$**)**

Alors on définit l'Argument unique qui correspond à $-\pi \leq \theta < \pi$

Il est appelé **Argument Principal**: $\theta = \mathbf{A}\mathrm{rg}(z)$

3. Forme polaire et exponentielle
3.3. Multiplication et division

Soient : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Calculons le produit : $z_1 . z_2$

$$z_1 . z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) . r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

Et pour tout $z_2 \neq 0$, le rapport z_1/z_2 donnera :

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

On utilisera les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos(A \pm B) = \cos A . \cos B \mp \sin A . \sin B$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A . \cos B \pm \cos A . \sin B$$

3. Forme polaire et exponentielle
3.3. Multiplication et division

On pourra simplifier le produit et le rapport comme suit :

$$\boldsymbol{z_1.z_2} = \boldsymbol{r_1 r_2}[\cos(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2}) + i\sin(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2})]$$

Tel que :

$$r = r_1 r_2 \text{ et } \arg(\boldsymbol{z_1.z_2}) = \arg(\boldsymbol{z_1}) + \arg(\boldsymbol{z_2})$$

De même pour la division:

$$\boldsymbol{z_1/z_2} = \frac{\boldsymbol{r_1}}{\boldsymbol{r_2}}[\cos(\boldsymbol{\theta_1} - \boldsymbol{\theta_2}) + i\sin(\boldsymbol{\theta_1} - \boldsymbol{\theta_2})]$$

Avec:

$$r = r_1/r_2 \text{ et } \arg(\boldsymbol{z_1/z_2}) = \arg(\boldsymbol{z_1}) - \arg(\boldsymbol{z_2})$$

3. Forme polaire et exponentielle
3.4. Puissance entière de z: z^n

Depuis le produit $z_1.z_2$:

$$z_1.z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

En mettant : $z_1 = z_2 = z$ on obtient :

$$z_1.z_2 = z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$$

De même on peut déduire $z^3 = z^2.z = r^3[\cos(3\theta) +$

3. Forme polaire et exponentielle

3.5. Racine entière de z: $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$

Soit: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et cherchons $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

tel que : $w^n = z \rightarrow \boldsymbol{\rho^n}(\cos \boldsymbol{n\varphi} + i\sin \boldsymbol{n\varphi}) = \boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\theta} + i\sin\boldsymbol{\theta})$

Par identification on trouve:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho^n}$ et $\cos\boldsymbol{\theta} + i\sin\boldsymbol{\theta} = \cos\boldsymbol{n\varphi} + i\sin\boldsymbol{n\varphi}$; et la solution:

$\boldsymbol{\rho} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r}}$ et $\boldsymbol{\varphi_k} = \dfrac{\boldsymbol{\theta+2k\pi}}{\boldsymbol{n}}$; $k = 0,1,2,\ldots n-1$

Il faut remarquer que pour $\boldsymbol{k = n}$: $\boldsymbol{\varphi_n = \dfrac{\theta+2n\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi \equiv \dfrac{\theta}{n} = \varphi_0}$

On obtient ainsi n racines distincts:

$$\boldsymbol{w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]; k = 0, 1, \ldots n-1}$$

Pour $\boldsymbol{k = 0}$ on a une racine unique $\boldsymbol{w_0}$, qu'on appellera:

Racine principale tel que: $\boldsymbol{\varphi_0 = Arg(w_0)}$

3. Forme polaire et exponentielle

3.5. Racine entière de z: $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$

Exercice : trouver les racines d'ordre 4 : $\boldsymbol{\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1+i}}$

Solution : $\boldsymbol{\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1+i}}$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right) = \rho^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

$$\rho = \left(\sqrt{2}\right)^{1/4} = 2^{1/8} = \mathbf{1.09050773266526} \cong \mathbf{1.09}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi/4 + 0 \times 2\pi}{4} = \frac{\pi}{16} \rightarrow w_0 = 1.09\left(\cos\frac{\pi}{16} + i.\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi/4 + 1 \times 2\pi}{4} = \frac{9\pi}{16} \rightarrow w_1 = 1.09\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i.\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi/4 + 2 \times 2\pi}{4} = \frac{17\pi}{16} \rightarrow w_2 = 1.09\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i.\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi/4 + 3 \times 2\pi}{4} = \frac{25\pi}{16} \rightarrow w_3 = 1.09\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i.\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

3. Forme polaire et exponentielle
3.6. formulation exponentielle

Partant du développement limité des fonctions sinus et cosinus:

$$cos\,\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + \frac{\theta^{2n}}{2n!}(-1)^n; n = 0,1, \ldots$$

$$sin\,\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n; n = 0,1, \ldots$$

Et sachant que :

$$\boldsymbol{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}(-1)^{2n}; n = 0, 1, \ldots}$$

On peut démontrer que :

$$\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

Ainsi tout nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous sa forme exponentielle (polaire): $\boldsymbol{z = r.e^{i\theta}}; r = |z|\; et\; \theta = \arg(z)$

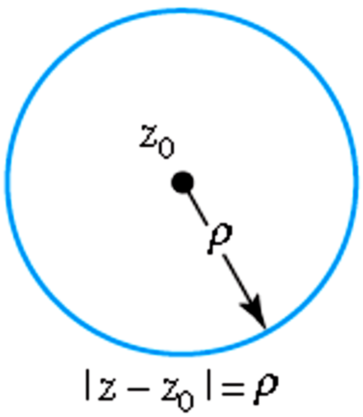
Indication: *remplacer $x = i\theta$ et faire l'identification*

4. Ensemble de points dans un plan complexe

4.1. Le cercle:

$|z - z_0| = \rho, \rho > 0$

Centre z_0 et de rayon ρ



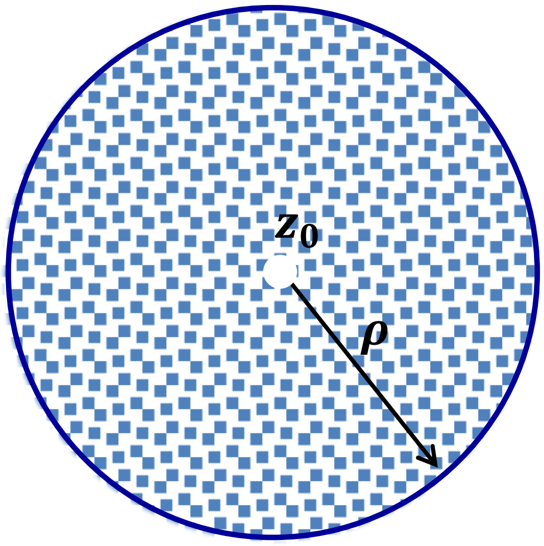
4.2. Disque et voisinage:

$|z - z_0| \leq \rho$: disque

$|z - z_0| < \rho$: ***voisinage***

$0 < |z - z_0| < \rho$: ***voisinage***

avec exclusion (z_0 **exclu**)



4. Ensemble de points dans un plan complexe

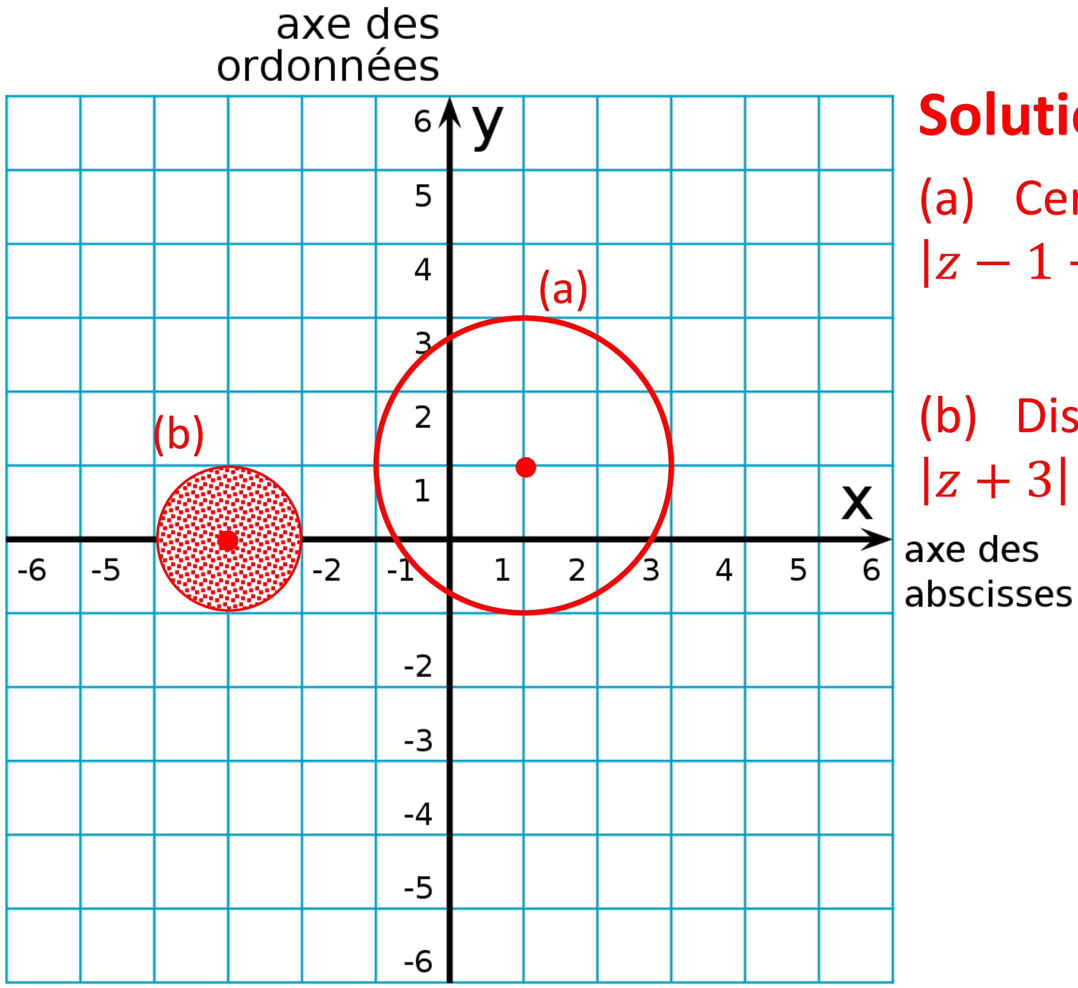
Exercice : Tracer les ensembles de points suivants:

(a) $|z - 1 - i| = 2$; **(b)** $|z + 3| \leq 1$

4. Ensemble de points dans un plan complexe

Exercice : Tracer les ensembles de points suivants:

(a) $|z - 1 - i| = 2$; **(b)** $|z + 3| \leq 1$



Solution :

(a) Cercle:

$|z - 1 - i| = 2 \rightarrow z_0 = 1 + i; \rho = 2$

(b) Disque:

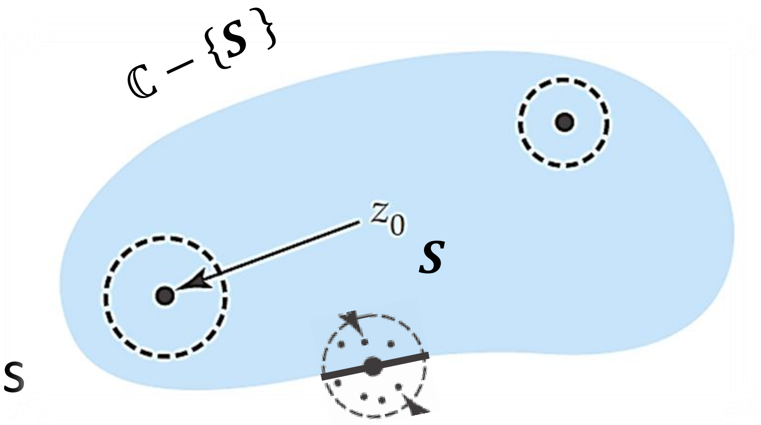
$|z + 3| \leq 1 \rightarrow z_0 = -3; \rho = 1$

4. Ensemble de points dans un plan complexe

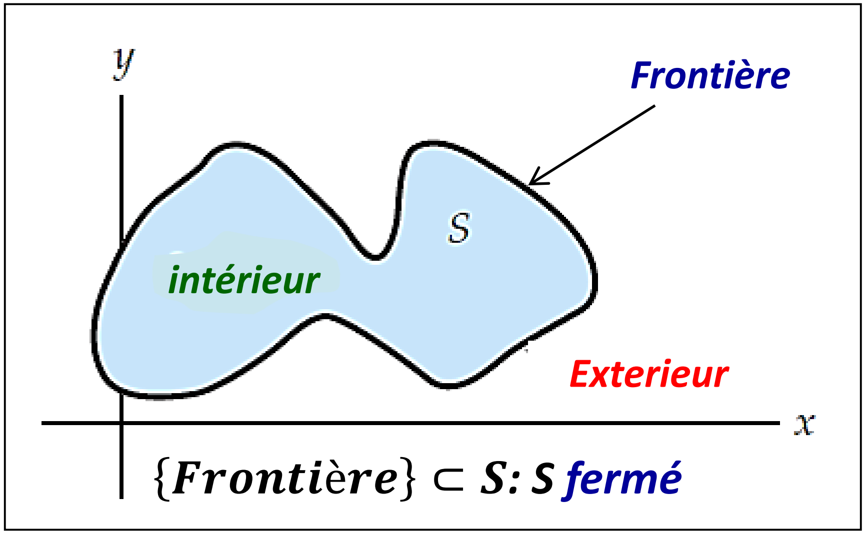
4.3. Ensemble ouvert:

$|z - z_0| < \rho \subset S$: point intérieur

$\forall z \in S, z$ est ***intérieur*** $\rightarrow S$: ***ouvert***



Si $|z - z_0| < \rho \subset S$ contient au moins $z_1 \in S$ et au moins $z_2 \in \mathbb{C} - \{S\} \rightarrow$ $\boldsymbol{z_0}$ ***est un point limite***



Un ensemble de points limites forment ***une frontière***

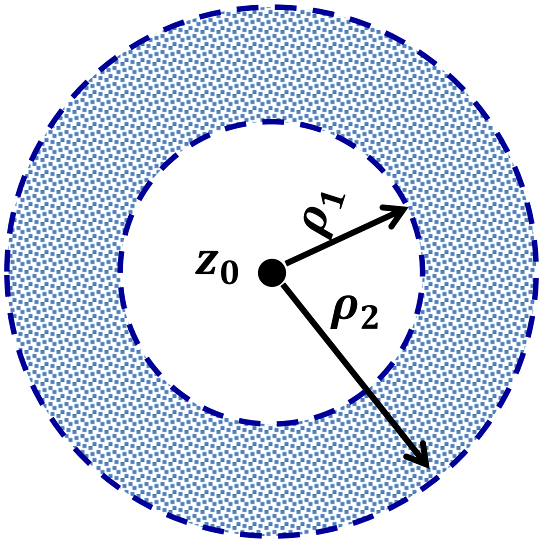
Tout $z \notin \{S \cup Frontière\}$: ***exterieur***

4. Ensemble de points dans un plan complexe

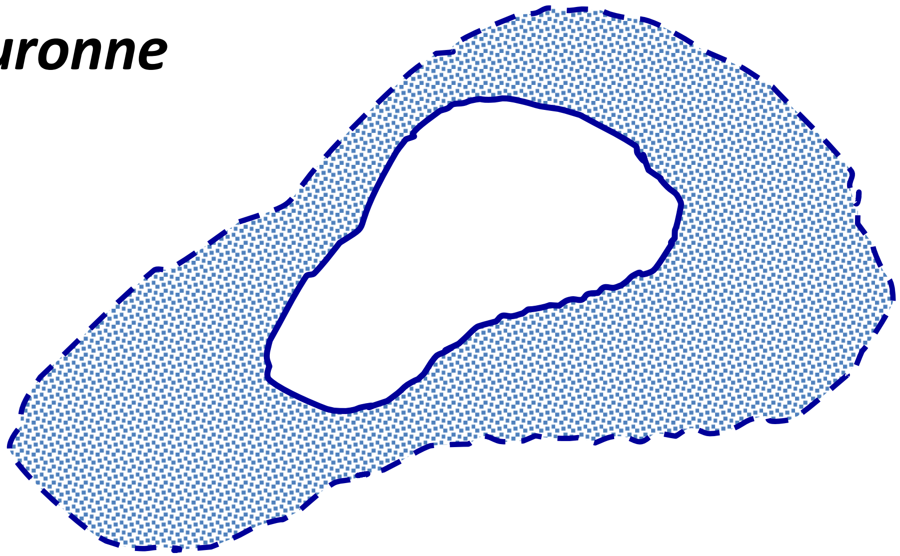
4.4. Couronne:

$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$: ***Couronne circulaire ouverte***

Si $\rho_1 = 0$ alors $0 < |z - z_0| < \rho_2$: ***Voisinage avec exclusion de*** $\boldsymbol{z_0}$



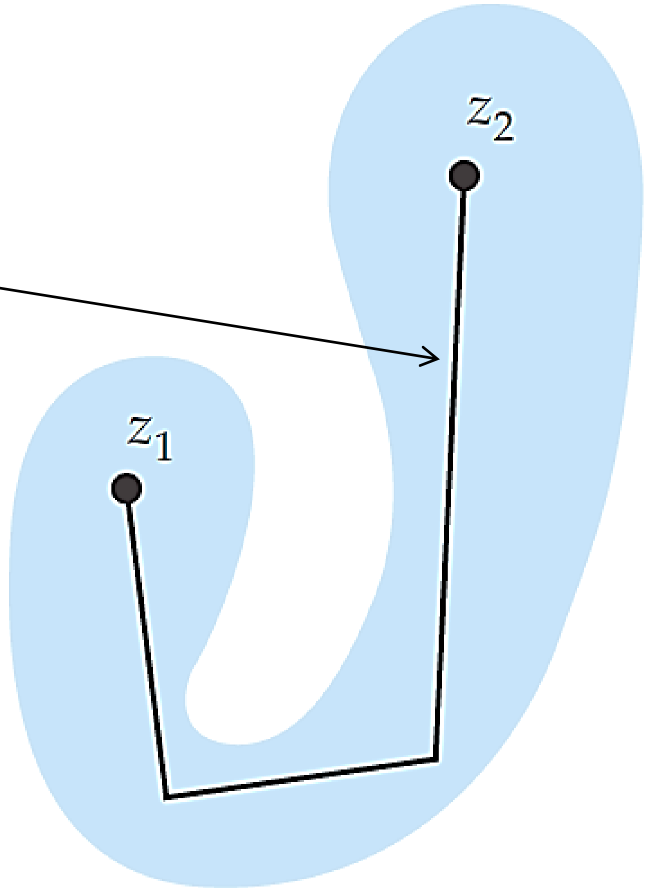
Tout autre ensemble de forme irrégulière et annulaire est appelé: ***Couronne***



4. Ensemble de points dans un plan complexe

4.5. Domaine:

Si $z_1$et z_2 $\in S$ peuvent être connectés par une $\{$***ligne polygonale***$\}$ $\in S$ alors l'ensemble S est un ***connexe***



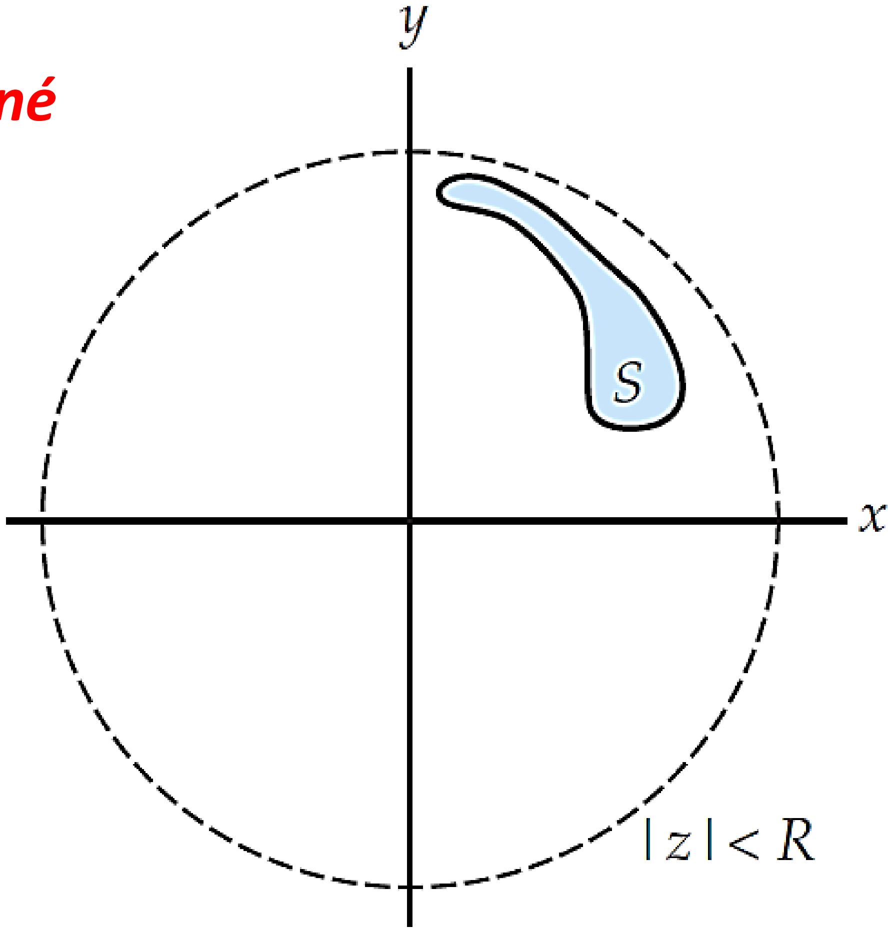
Si : $S \equiv$ ***Ouvert + Connexe = Domaine***

4. Ensemble de points dans un plan complexe

4.7. Ensemble borné:

Si $\forall z \in S, \exists R > 0$ tel que $|z| < R$ alors l'ensemble S est un ***borné***

Dans le cas contraire S: ***non borné***



4. Ensemble de points dans un plan complexe

Exercice :

Tracez l'ensemble des points S dans le plan complexe, satisfaisant les inégalités suivantes et déterminer si cet ensemble est :

a) ouvert, b) fermé, c) connexe, d)un domaine ou e) borné

$Re(z) < 1$

$Im(z) > 3$

$2 < Re(z-1) < 4$

$Re(z^2) > 0$

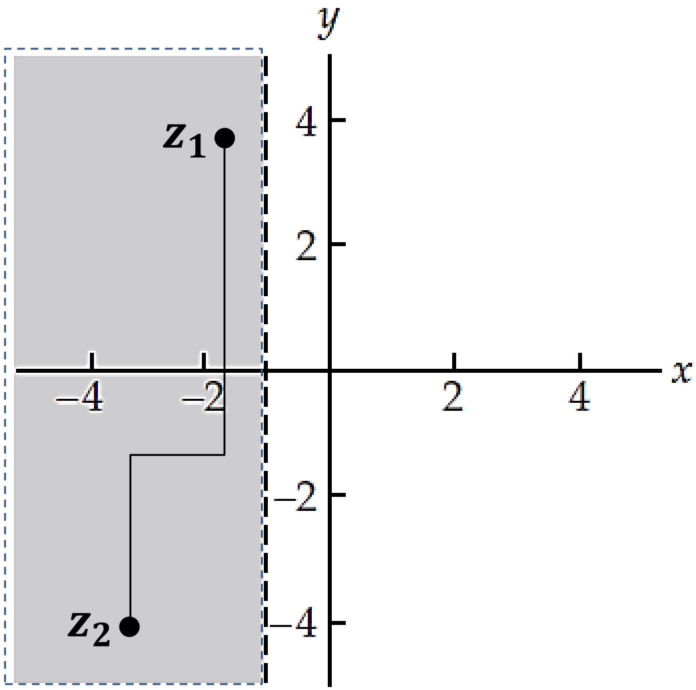
$|z-i| > 1$

$1 \leq |z-1-i| < 2$

4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice :

$$Re(z) < 1 \rightarrow x < 1; -\infty < y < +\infty$$



$\forall z \in S, z$ est ***intérieur*** $\rightarrow S$: ***ouvert***

$\{\boldsymbol{Frontière}\} \not\subset$ ***S: S*** ***non fermé***

S est un ***connexe***

$S \equiv$ ***Ouvert + connexe = Domaine***

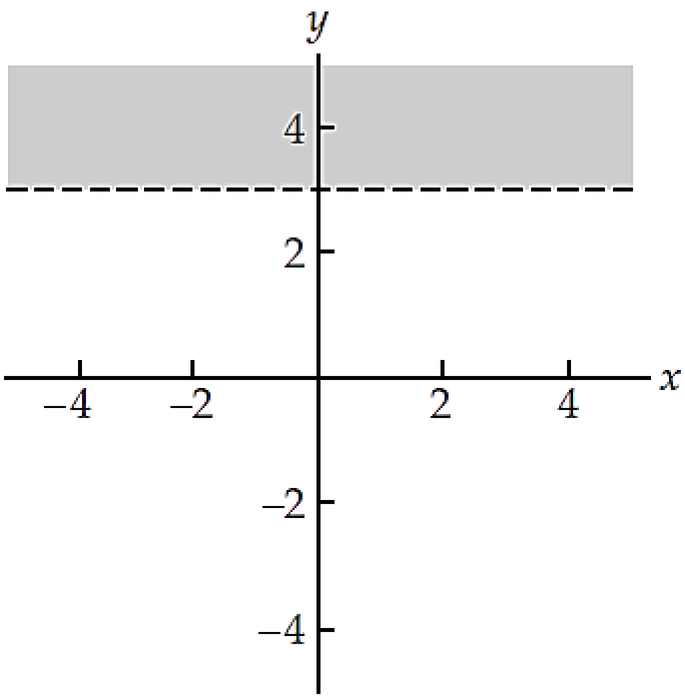
$\nexists R > 0$ tel que $|z| < R$: S est ***non borné***

4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice : (suite)

$$Im(z) > 3 \rightarrow y > 3; -\infty < x < +\infty$$

a) ouvert, b) non-fermé, c) connexe, d) un domaine et e) non-borné

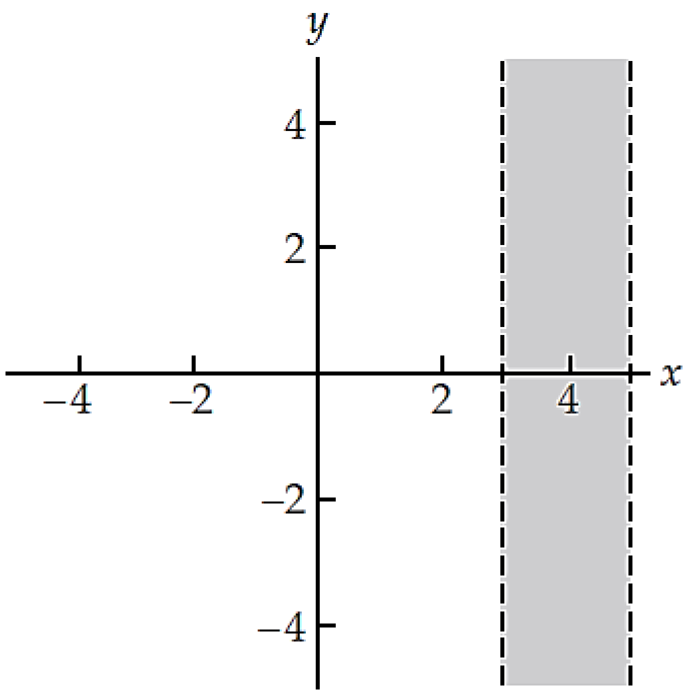


4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice : (suite)

$$2 < Re(z-1) < 4 \rightarrow 2 < x - 1 < 4 \leftrightarrow 3 < x < 5; -\infty < y < +\infty$$

a) ouvert, b) non-fermé, c) connexe, d) un domaine et e) non-borné

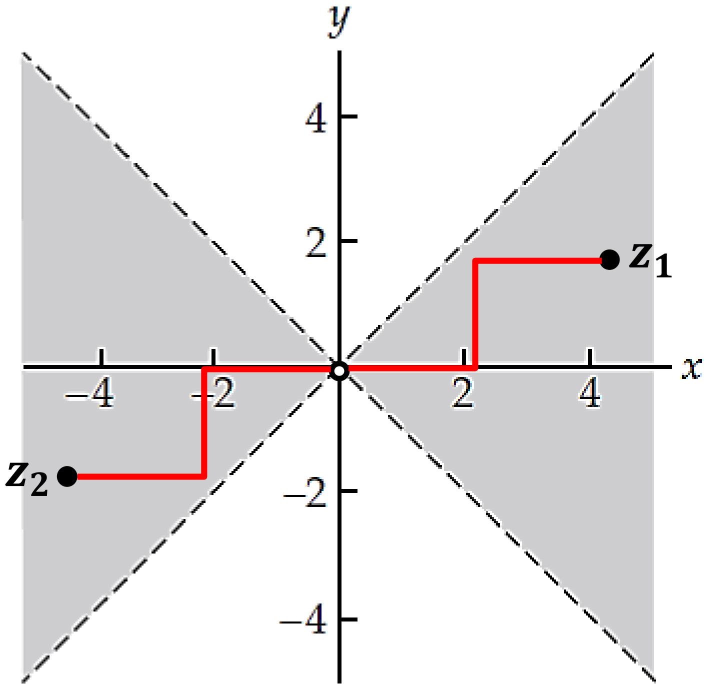


4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice : (suite)

$$Re(z^2) > 0 \rightarrow x^2 - y^2 > 0 \leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ x > -y \end{cases}$$

a) ouvert, b) non-fermé, c) pas connexe, d) pas un domaine et e) non-borné



S est ***pas un connexe***

$S \equiv$ ***Ouvert + pas connexe = pas un Domaine***

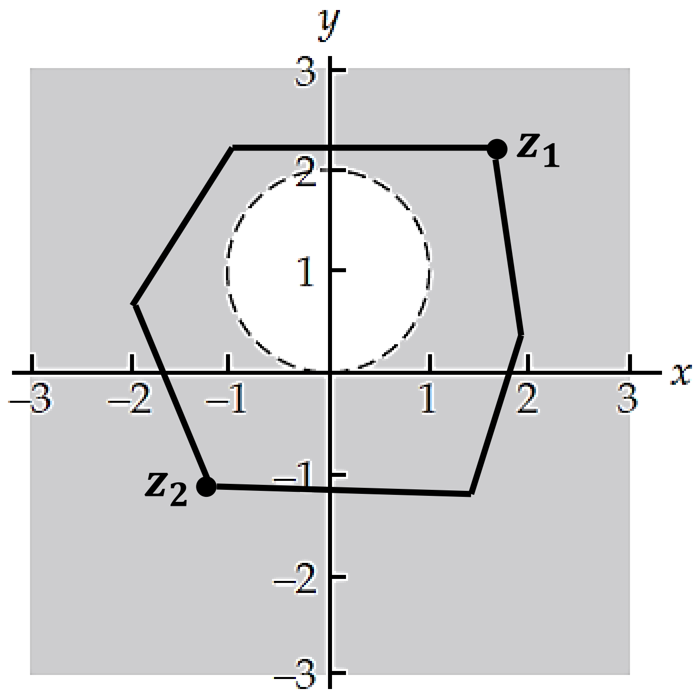
4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice : (suite)

$|z - i| > 1$: *limité par un cercle* $z_0 = i$ & $\rho = 1$

a) ***ouvert***, ***b)*** ***non-fermé***, ***c)*** ***connexe***, ***d)*** ***un domaine***, ***e)*** ***non-borné***

S est: doublement connexe

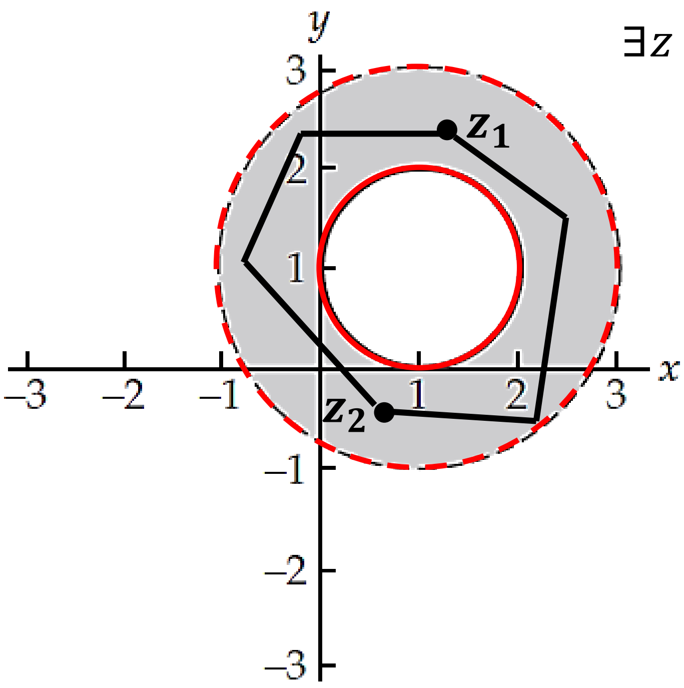


4. Ensemble de points dans un plan complexe

Solution de l'exercice : (suite)

$1 \leq |z-1-i| < 2$: $courrone\ circulaire$: $z_0 = 1+i; \rho_1 = 1 \& \rho_2 = 2$

a)* *Pas un ouvert*, *b)* *non-fermé*, *c)* *connexe*, *c)* *pas un domaine* et *d)* *borné



$\exists z \in S, z$ est ***pt limite (pas intérieur)*** $\rightarrow S$: ***pas un ouvert***

$\{\boldsymbol{Frontière\ 2}\} \not\subset$ ***S: S non fermé***

S est: doublement connexe

$S \equiv$ ***non ouvert + connexe = pas un Domaine***

$\exists R = 2 > 0$ tel que $|z-i| < 2$: S est ***borné***

5. Forme quadratique en variable complexe

Forme quadratique qui s'écrit avec des variables complexes:

$a.z^2 + b.z + c = 0\ ;\ a \neq 0$

On trouve toujours des solutions $\forall \Delta$:

$\Delta = b^2 - 4ac$

Et les solutions sont données par:

$$\boldsymbol{z_i = \frac{-b + \left(b^2 - 4ac\right)^{1/2}}{2a}}$$

Si : $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R}$

Si : $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm i\sqrt{\|b^2 - 4ac\|} \in \mathbb{C}$

5. Forme quadratique en variable complexe

Exercice :

résoudre l'équation quadratique : $\boldsymbol{z^2 + 4z + 5 = 0}$

Solution:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0 \rightarrow \sqrt{-4} = \pm i2$$

Les solutions de cette équation: $z_i = \frac{-4 \pm i2}{2} \begin{cases} z_1 = -2 + i \\ z_2 = -2 - i \end{cases}$

On peut vérifier:

$$(-2+i)^2 + 4(-2+i) + 5 = (4 - 1 - 4i) - 8 + i4 + 5 = 0$$

$$(-2-i)^2 + 4(-2-i) + 5 = (4 - 1 + 4i) - 8 - i4 + 5 = 0$$