Chapitre 4

Sous Variétés de $\mathbb{R}^n$

.

4.1 Plongement

Définition 4.1.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. f est dite plongement si*

1. *f est une immersion sur U.*
2. *f est injective.*

Remarque 4.1.1. *Si f est un plongement, alors d'après le théorème du rang constant, il existent un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$, un difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que :*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

Définition 4.1.2. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. f est dite plongement régulier si*

1. *f est une immersion sur U.*
2. *f est injective.*
3. *$f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme.*

où $f(U)$ est muni de la topologie $\mathcal{T}(f(U))$ induite par celle de $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{T}(f(U)) = \{\theta \cap f(U); \quad \theta \ \texttt{ouvert de}\ \mathbb{R}^m\}$$

Exemple 4.1.1.

$$\begin{array}{rcl} f :]0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

f est un plongement régulier.

Exemple 4.1.2.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

f est une immersion non injective.

Exemple 4.1.3. *Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 1\}$*

$$\begin{array}{rcl} f : D & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

f est un est un plongement régulier sur $S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z > 0\}$.

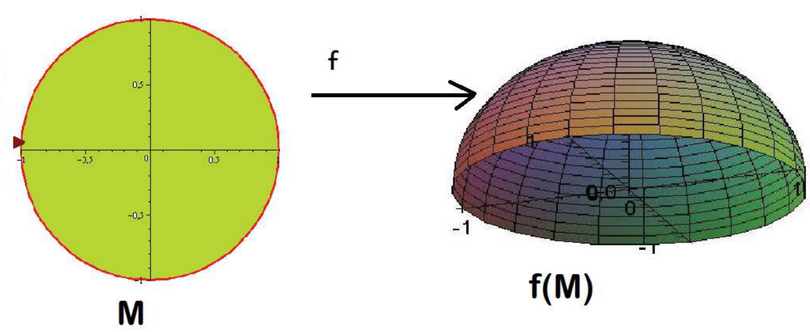

FIGURE 4.1 – Plongement régulier

Exemple 4.1.4. *Considérons géométriquement les courbes suivantes :*
a)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\pi, \pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & ((2cos(s) - 1)sin(s), (2cos(s) - 1)cos(s)) \end{array}$$

f est une immersion non injective $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{-\pi}{3}) = (0, 0)$.

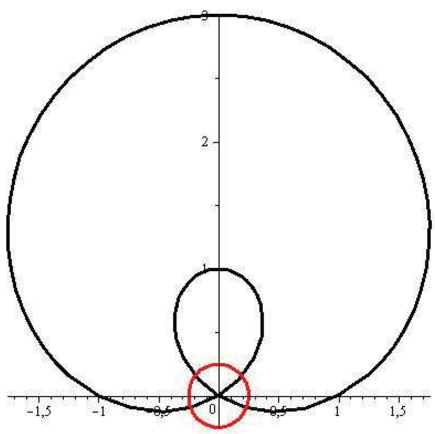

FIGURE 4.2 – Immersion non injective

b)

$$
\begin{array}{rcl}
f :]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}[& \to & \mathbb{R}^2 \\
s & \mapsto & (10sin(3s)cos(s), 5sin(3s)sin(s))
\end{array}
$$

f est un plongement non régulier (f n'est pas ouverte au voisinage de $f(0) = (0,0)$).

Remarque : *$f(]-\varepsilon, +\varepsilon[$ n'est pas un ouvert de $f(]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[)$ pour la topologie induite.*

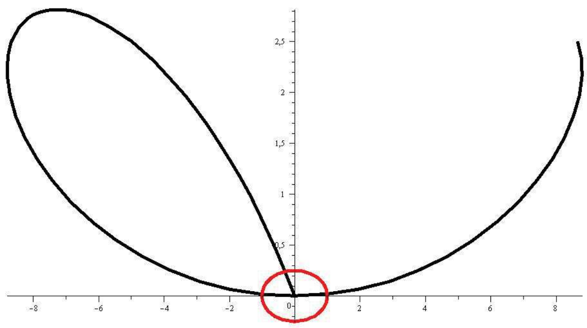

FIGURE 4.3 – Plongement non régulier

c)

$$
\begin{array}{rcl}
f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}[& \to & \mathbb{R}^2 \\
s & \mapsto & (sin(2s)cos(s), cos^2(s))
\end{array}
$$

f est un plongement régulier.

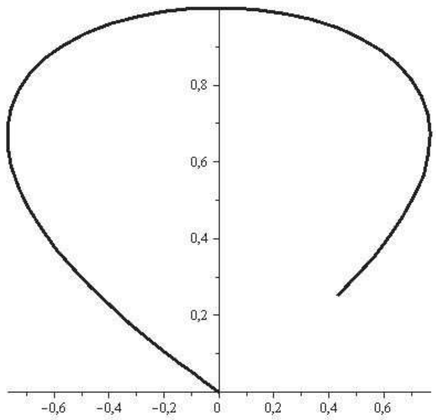

FIGURE 4.4 – Plongement régulier

4.2 Sous Variété

Définition 4.2.1. *Soient $M \subseteq \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}$ $(p \leq n)$. On dit que M est une sous variété de dimension p si pour tout $x_0 \in M$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \tag{4.1}$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big) \tag{4.2}$$

Remarque 4.2.1. *Dans la formule (4.2) on peut considérer une permutation des fonctions φ_i :*

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{i_1}(x) = ... = \varphi_{i_{n-p}}(x) = 0\Big) \tag{4.3}$$

Exemple 4.2.1. *:*

$M = \mathbb{R}^p \equiv \mathbb{R}^p \times \{0\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* p *(ici* $\varphi = Id$*).*

Exemple 4.2.2. *:*
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\}$ *est une sous variété de dimension* 2*. En effet, soient* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 1\}$, $U = D \times \mathbb{R}$ *et*

$$\begin{array}{rcl} f : U & \rightarrow & U \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

On a $M \subset U$ *et*

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc f *est un difféomorphisme de* U*, tels que*

$$f(M) = D \times \{0\} \equiv D, \quad i.e. \quad ((x, y, z) \in M) \Leftrightarrow (f_3(x, y, z) = z - \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0).$$

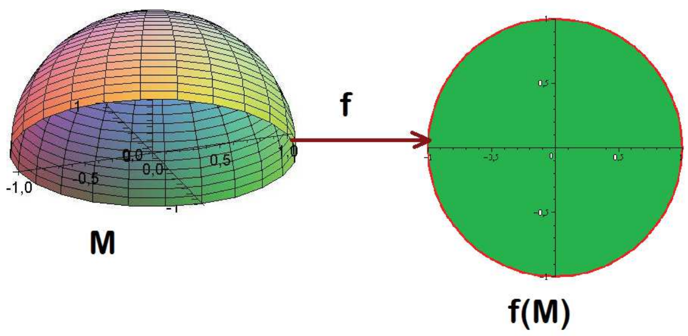

FIGURE 4.5 – Sous Variété

Exemple 4.2.3. $M = \{(sin(2s)cos(s), cos^2(s)) \in \mathbb{R}^2; \quad s \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}[\}$ *(voir figure 4.4).* M *est une sous variété de dimension* 1*.*

Exemple 4.2.4. *$M = \{((2cos(s) - 1)sin(s), (2cos(s) - 1)cos(s)); \quad s \in]-\pi, \pi[\} \subset \mathbb{R}^2$ (voir figure 4.2). M n'est pas une sous variété, au voisinage de $(0,0)$ pour tout difféomorphisme locale $\varphi : U \to V$ on a $\varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}) \neq M \cap U$*

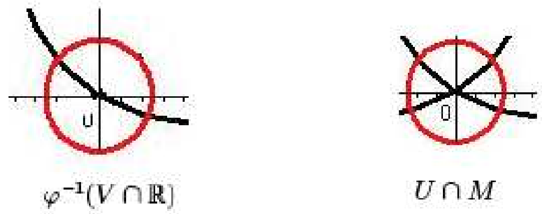

FIGURE 4.6 – M n'est pas une sous variété

Exemple 4.2.5. *:*

$M = \{(10sin(3s)cos(s), 5sin(3s)sin(s)); \quad s \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}[\} \subset \mathbb{R}^2$ (voir figure 4.2). M n'est pas une sous variété, au voisinage de $(0,0)$; $(s = 0)$. Pour tout difféomorphisme locale $\varphi : U \to V$ on a $\varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}) \neq M \cap U$

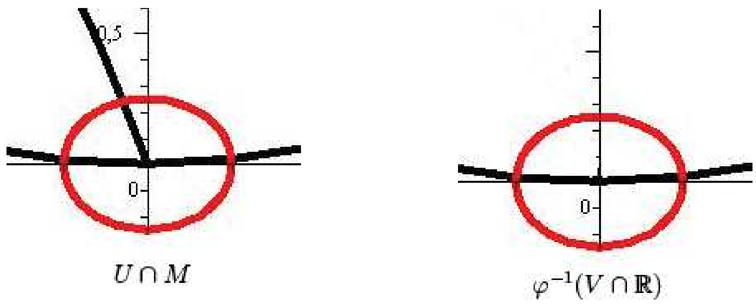

FIGURE 4.7 – M n'est pas une sous variété

Exemple 4.2.6. *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. La courbe*

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; \quad x \in I\}$$

est une sous variété de dimension 1. En effet, si on pose

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y - f(x)) \end{aligned}$$

alors φ est une application injective de classe C^1 telle que

$$D_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

donc φ est un difféomorphisme de $U = I \times \mathbb{R}$ sur $\varphi(U)$ et on a :

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow \varphi_2((x, y)) = y - f(x) = 0$$

Exemple 4.2.7. *Dans le cas général, si $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^1, alors la partie*

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}; \quad x \in V\}$$

est une sous variété de dimension p. En effet, si on pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^{p+q} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$$

alors φ est une application injective de classe C^1 telle que

$$D_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ -D_x f & Id_q \end{pmatrix}$$

donc φ est un difféomorphisme de $U = V \times \mathbb{R}$ sur $\varphi(U)$ et on a :

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}((x, y)), ..., \varphi_{p+q}((x, y))) = y - f(x) = 0$$

4.3 Equation Paramétrique d'une Sous Variété

Théorème 4.3.1. *Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p \leq n$). Alors localement M est définie par un plongement régulier, i.e. pour tout $x_0 \in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ voisinage de 0, $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0 et un plongement régulier $\psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(\widetilde{U}) = M \cap U$.*

Preuve D'après la définition 4.2.1, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ y & \mapsto & (\varphi_1(y), ..., \varphi_n(y)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$:

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cong V \cap \mathbb{R}^p$$

Si on pose $\widetilde{U} = V \cap \mathbb{R}^p$,

$$\begin{array}{rcl} i : \widetilde{U} & \to & V \\ z = (z_1, ..., z_p) & \mapsto & i(z) = (z, 0, .., 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi = \varphi^{-1} \circ i : \widetilde{U} & \to & U \\ z = (z_1, ..., z_p) & \mapsto & \varphi^{-1}((z, 0, .., 0)). \end{array}$$

Alors ψ est une application de classe C^1, injective et ouverte sur M. Comme φ^{-1} est un difféomorphisme, alors

$$D_z\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\varphi^{-1})_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_1}{\partial z_p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial(\varphi^{-1})_p}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_p}{\partial z_p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial(\varphi^{-1})_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_n}{\partial z_p} \end{bmatrix}_{(z,0)}$$

est une matrice de rang p (les colones sont linéarement indépendants). Donc ψ est une immersion par suite un plongement régulier et on a

$$\psi(\widetilde{U}) = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap M = U \cap M.$$

■

Remarque 4.3.1. *:*

1. *ψ est une composition d'une bijection φ^{-1} et une injection i, donc ψ est injective.*
2. *= Puis que $\psi(\widetilde{U}) = U \cap M$, alors ψ est une application ouverte sur M munie de la topologie induite.*

Théorème 4.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. Si f est un plongement régulier alors $M = f(U)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension n ($n \leq m$).*

$M = f(U)$ est dite sous variété définie par le parramétrage f .

Preuve f est une immersion, donc f est de rang constant égale à n sur U. D'après le théorème du rang constant (Théorème 3.3.1), pour $x_0 \in U$ ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de x_0, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de $f(x_0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1,...y_p,y_{p+1}....,y_m)) = (y_1,...y_p,0....,0)$$

Comme f est un plongement régulier, alors $f(V) = f(U)\cap W$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme et

$$\begin{aligned}
(z\in f(V)) &\Leftrightarrow (\exists! x\in V: \quad z = f(x))\\
&\Leftrightarrow \Big((\exists! x\in V),(\exists! y\in\varphi(V)): \quad x=\varphi^{-1}(y),\, z=f(x)\Big)\\
&\Leftrightarrow \Big((\exists! y\in\varphi(V)),\, z=f(\varphi^{-1}(y))\Big)\\
&\Leftrightarrow \Big((\exists! y\in\varphi(V)),\, \psi(z)=\psi(f(\varphi^{-1}(y)))\Big)\\
&\Leftrightarrow \Big((\exists! y\in\varphi(V)),\, \psi(z)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(y))\Big)\\
&\Leftrightarrow \Big((\exists! y\in\varphi(V)),\, \psi(z)=(y_1,....,y_n,0,...,0))\Big)\\
&\Leftrightarrow \Big(\psi_{n+1}(z)=....=\psi_m(z)=0.\Big)
\end{aligned}$$

■

Du Théorème 4.3.1 et le Théorème 4.3.2, on déduit le théorème suivant.

Théorème 4.3.3. *$M\subset\mathbb{R}^n$ une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p\leq n$), si et seulement M est localement définie par un plongement régulier ouvert sur M muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.*

i.e. pour tout $x\in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U}\subset\mathbb{R}^p$ voisinage de 0 et un plongement régulier $\psi:\widetilde{U}\to\mathbb{R}^n$ tel que $\psi(0)=x$, $\psi:\widetilde{U}\to M$ est une application ouverte pour la topologie induite sur M par celle de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas il existe , $U\subset\mathbb{R}^n$ voisinage de x tel que $\psi(\widetilde{U})=U\cap M$. On dit alors que la sous variété M est définie localelement au voisinage de x par le paramétrage ψ.

Exemple 4.3.1. *Une droite dans le plan est une sous variété de dimension 1 définie par une immersion. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2_*$ et f une application définie par*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\\ t &\to (at+c,bt+d)\end{aligned}$$

On a $D_{(x,y)}f = (a,b)^t \neq (0,0)^t$ *donc* f *est une immersion (plongement régulier) et* $M = f(\{\mathbb{R}\}) = \{t(a,b) + (c,d) \in \mathbb{R}^2; \quad t \in \mathbb{R}\}$ *est une sous variété de dimension* 1.

Dans le cas général on considère l'equation parametrique d'une droite M *dans l'espace affine* $\mathbb{R}^n$ *définie par le plongement régulier*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & ta + b \end{array}$$

où $a \in \mathbb{R}^n_*$, $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $M = \{ta + b\,; \quad t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 4.3.2. *Soit* $S^1 = \{((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\,; \quad t \in \mathbb{R}\}$ *le cercle de rayon* 1 *et de centre* $(0,0)$ *dans le plan affine* $\mathbb{R}^2$*. Alors* S^1 *est une sous variété de dimension* 1 *définie par le paramétrage*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & \Big((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\Big) \end{array}$$

Remarque : f *est une immersion non injective (non un plongement) ce qui montre que la condition "plongement régulier" dans le Théorème 4.3.2 n'est pas nécessaire.*

Exemple 4.3.3. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval ouvert et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivablement continue. Alors* $M = \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension 2. En effet, si on note par*

$$\begin{array}{rcl} g : I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (t, f(t)) \end{array}$$

alors g *est une immersion injective, de plus si* K *et* J *sont des intervals ouverts tels que* $K \subset I$*, alors*

$$\begin{array}{rcl} (K \times J) \cap M & = & (K \times J) \cap g(I) \\ & = & (K \times J) \cap \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\} \\ & = & \{(t, f(t))\,; \quad t \in K,\, f(t) \in J\} \\ & = & (K \times J) \cap g(K) \end{array}$$

ce qui montre que g *est une application ouverte sur* $g(I)$ *muni de sa topologie induite. Du Théorème 4.3.2 on déduit que* $M = g(I)$ *est une sous variété de dimension* 1.

Remarque : *Dans cet exemple on peut remplacer la fonction* $f : I \to \mathbb{R}^2$ *par la fonction* $f : I \to \mathbb{R}^n$.

Exemple 4.3.4. *(Equation paramétrique d'un plan dans l'espace)*

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ *tel que le système* $\{a, b\}$ *est linéairement indépendant. Alors* $M = \{sa + tb + d \in \mathbb{R}^n\,; \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* 2*. En effet il suffit de considérer le plongement régulier*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^n \\ (s,t) & \to & as + bt + d \end{array}$$

Exemple 4.3.5. *Soient* $I \subset \mathbb{R}^p$ *un ouvert connexe et* $f : I \to \mathbb{R}^m$ *une application de classe* C^1*. Alors* $M = \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^{p+m}$ *de dimension* p*. En effet, si on note par*

$$\begin{array}{rcl} g : I \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^{p+m} \\ t & \to & (t, f(t)) \end{array}$$

alors g *est une immersion injective, de plus si* $K \subset \mathbb{R}^p$ *et* $J \subset \mathbb{R}^m$ *sont des ouverts tels que* $K \subset I$*, alors*

$$\begin{array}{rcl} (K \times J) \cap M & = & (K \times J) \cap g(I) \\ & = & (K \times J) \cap \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\} \\ & = & \{(t, f(t))\,; \quad t \in K,\ f(t) \in J\} \\ & = & (K \times J) \cap g(K) \end{array}$$

ce qui montre que g *est une application ouverte sur* $g(I)$ *muni de sa topologie induite. Du Théorème 4.3.2 on déduit que* $M = g(I)$ *est une sous variété de dimension* 1*.*

4.4 Sous Variété à Bord

Définition 4.4.1. *Soient* $M \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $p \in \mathbb{N}$ $(p \leq n)$ *et Soit* $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$*. On dit que* M *est une sous variété à bord de dimension* p *si pour tout* $x_0 \in M$*, il existe* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *voisinage de* x_0*,* V *un ouvert voisinage de* 0 *dans de* $\mathbb{R}^n$ *et un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ *et*

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (H_+^p \times \{0\}) \tag{4.4}$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_p(x) \geq 0,\ \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big)$$

Le bord de la sous variété M est le sous ensemble ∂M tel que

$$\varphi(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\})$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap \partial M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big)$$

L'Intérieur de la sous variété M est l'ensemble $Int(M) = M - \partial M$.

Remarques 4.4.1. *On a :*

1) $M = \cup_\varphi(\varphi^{-1}(V \cap (H_+^p \times \{0\}))$.

2) $\partial M = \cup_\varphi(\varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}))$.

3) ∂M est une sous variété de dimension $p-1$.

4) L'intérieur $Int(M)$ ne signifie pas l'intérieur topologique (si $p < n$, alors $M^0 = \varnothing$).

5) Si $p = n$ alors $Int(M)$ est un ouvert topologique et ∂M est un fermé topologique.

Du Théorème 4.3.3, on la définition équivalente suivante :

Définition 4.4.2. *Soit $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$. Un ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ est dit sous variété variété à bord de dimension p si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U} \subset H_+^p$ voisinage de 0 et un plongement régulier $\psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(0) = x$, $\psi : \widetilde{U} \to M$ est une application ouverte pour la topologie induite sur M par celle de $\mathbb{R}^n$.*

Dans ce cas il existe , $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x tel que $\psi(\widetilde{U}) = U \cap M$. On dit que ψ est une parametrisation locale de la sous variété à bord M.

Le bord de la sous variété M est l'ensemble :

$$\partial M = \{\psi((x_1, ..., x_{p-1}, 0),\ \psi\ \texttt{est une paramétrisation locale}\}.$$

L'intérieur de la sous-variété M est définit par

$$Int(M) = M - \partial M.$$

Exemple 4.4.1. $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$ *est une sous variété à bord de dimension* p.

1) En utilisant la Définition 4.4.1 alors $p = n$, $U = V = \mathbb{R}^p$ *et* $\varphi = Id_{\mathbb{R}^p}$.

2) En utilisant la Définition 4.4.2, alors la paramétrisation n'est autre que l'injection canonique à un difféomorphisme près

$$\begin{array}{rcl} \psi : H_+^p & \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & (x_1, ..., x_p) \end{array}$$

et on a

$$\partial H_+^p = \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}.$$

Exemple 4.4.2. *La boule fermé* $B = \{(x_0, ..., x_p) \in \mathbb{R}^{p+1},\ \Sigma_i x_i^2 \leq 1\}$ *est une sous variété de dimension* $p + 1$ *et de bord* $\partial B = S^p = \{(x_0, ..., x_p) \in \mathbb{R}^{p+1},\ \Sigma_i x_i^2 = 1\}$.

Si $x_p \geq 0$, *on prend*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_+ : \mathbb{R}^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ (x_0, ..., x_p) & \mapsto & \left(x_0, ..., -x_p + \sqrt{1 - \Sigma_{i=0}^{p-1} x_i^2}\right). \end{array}$$

Si $x_p \leq 0$, *on prend*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_- : \mathbb{R}^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ (x_0, ..., x_p) & \mapsto & \left(x_0, ..., x_p - \sqrt{1 - \Sigma_{i=0}^{p-1} x_i^2}\right). \end{array}$$

On a

$$B = \varphi_+^{-1}(H_+^{p+1}) \cup \varphi_-^{-1}(H_+^{p+1})$$

$$\partial B = \varphi_+^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cup \varphi_-^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Exemple 4.4.3. *La demi sphère* $S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ *est une sous-variété à bord de dimension* 2 *de bord*

$$\partial S^2_+ = S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1\}.$$

Soient :

1) $U_y^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2 < 1,\ y > 0\}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^+ : U_y^+ & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(x, z, y - \sqrt{1-x^2-z^2}\right). \end{array}$$

φ_y^+ *est un difféomorphisme de* U_y^+ *sur* $V = \varphi(U_y^+)$.

$$(\varphi_y^+)^{-1}(V \cap H^2_+ \times \{0\}) = U_y^+ \cap S^2_+$$

$$(\varphi_y^+)^{-1}(V \cap \mathbb{R} \times \{(0,0)\} = U_y^+ \cap S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1,\ y > 0\}$$

2) $U_y^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2 < 1,\ y < 0\}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^- : U_y^- & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(x, z, y + \sqrt{1-x^2-z^2}\right). \end{array}$$

φ_y^- *est un difféomorphisme de* U_y^- *sur* $V = \varphi(U_y^-)$.

$$(\varphi_y^-)^{-1}(V \cap H^2_+ \times \{0\}) = U_y^- \cap S^2_+$$

$$(\varphi_y^-)^{-1}(V \cap \mathbb{R} \times \{(0,0)\} = U_y^- \cap S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1,\ y < 0\}$$

3) On construit de la même manière les couples (U_x^+, φ_x^+) *et* (U_x^-, φ_x^-).

Exemple 4.4.4. *Le cylindre*

$$C = S^1 \times [0,1] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

est une sous-variété à bord de dimension 2 *et de bord*

$$\partial C = S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$$

4.5 Equation Cartésienne d'une Sous Variété

Théorème 4.5.1. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p \leq n$), alors pour tout $x_0 \in M$, il existent un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0 et une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$.*

On dit alors que M est une sous variété définie localement par l'équation $f = 0$.

Preuve D'après la définition d'une sous variété (Définition 4.2.1), il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : U &\to V \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big) \tag{4.5}$$

Si on note par f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R}^{n-p} \\ x &\mapsto (\varphi_{p+1}(x), ..., \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

alors

$$D_x\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

est une matrice inversible, donc toutes les lignes sont linéairement indépendants, par suite la matrice

$$D_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

est de rang $n-p$. Donc f est une submersion, d'apès l'éqution (4.5) on déduit que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$.

■

Théorème 4.5.2. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion $(m \leq n)$ tel que $0 \in f(U)$. Alors $M = f^{-1}(\{0\})$ est une sou variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p = n - m$.*

Remarque 4.5.1. *En général si $z \in f(U)$ alors $f^{-1}(\{z\})$ est une sou variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p = n - m$.*

Preuve f est une submersion, donc f est de rang constant égale à m sur U. D'après le théorème du rang constant (Théorème 3.3.1), pour $x_0 \in M \subseteq U$ ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de x_0, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de $f(x_0)(= 0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que $\psi(0) = 0$ et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{f}{\longrightarrow} & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \underset{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}{\longrightarrow} & \psi(W) \end{array}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}((y_1, ...y_m, y_{m+1}...., y_n)) = (y_1, ...y_m)$$

Soient $x \in V \cap M$ et $y \in \varphi(V)$ tel que

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= (y1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n) \\ &= (\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), ...\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

Comme $f(x) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y) &= (y1, ..., y_m) \\ &= (\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)) \\ &= \psi \circ f(x) \\ &= \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

d'où

$$(x \in V \cap M) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = ... = \varphi_m(x) = 0.$$

■

Remarque 4.5.2. *La démonstration du Théorème 4.5.2 découle aussi directement du théorème des fonctions implicites. En effet, f est de rang m à des permutation près on peut supposer*

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

où $p = n - m$. Donc

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (y, z) &\mapsto f(y, z) \end{aligned}$$

est une application de classe C^1 tel que $\frac{\partial f}{\partial z} \in Isom(\mathbb{R}^p)$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existent $V \subset U \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ voisinage de $x_0 = (y_0, z_{0)}$, $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de y_0 et $g : W \rightarrow \mathbb{R}^p$, tels que

$$[(y, z) \in V,\ f(y, z) = 0] \Leftrightarrow [y \in W,\ z = g(y)]$$

i.e.

$$[(y, z) \in V \cap M] \Leftrightarrow [y \in W,\ z = g(y)]$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : W \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \\ x = (y, z) &\mapsto (y, z - g(y)) \end{aligned}$$

on a :

$$D_x\varphi = \begin{pmatrix} Id_m & 0 \\ D_y g & Id_p \end{pmatrix}$$

Donc φ est un difféomorphisme tel que :

$$[x = (y, z) \in V \cap M] \Leftrightarrow [\varphi_2(x) = z - g(y) = 0].$$

Exemple 4.5.1. *Une droite dans le plan est une sous variété de dimension 1 définie par une submersion. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2_*$ et f une application définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow ax + by + c \end{aligned}$$

On a $D_{(x,y)}f = (a, b) \neq (0, 0)$ *donc* f *est une submersion et*

$$M = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad ax + by + c = 0\}$$

est une sous variété de dimension 1*.*

Exemple 4.5.2. *Le plan affine de* $\mathbb{R}^3$ *est une sous variété de dimension* 2 *définie par la submersion*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \to & ax + by + cz + d \end{array}$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*.*

Exemple 4.5.3. *La sphère est une sous variété de dimension* 2 *définie par la submersion*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3_* & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \to & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array}$$

On a $D_{(x,y)}f = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ *donc* f *est une submersion et* $S^2 = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *est une sous variété de dimension* 2*.*

4.6 Espace tangent à une sous variété

Lemme 4.6.1. *Si* $x \in \mathbb{R}^n$ *alors l'ensemble* $\{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, u), \quad u \in \mathbb{R}^n\}$ *muni des lois suivantes :*

$$(x, u) + (x, v) = (x, u + v); \quad \lambda(x, u) = (x, \lambda u)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *isomorphe à* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rcl} L : (\mathbb{R}^n, +, .) & \to & (\{x\} \times \mathbb{R}^n, +, .) \\ u & \mapsto & (x, u) \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire. En note alors

$$\mathbb{R}^n \equiv \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

Définition 4.6.1. *Soient M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $x_0 \in M$. Un vecteur $(x_0, u) \in \{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ (ou tout simplement $u \in \mathbb{R}^n$) est dit tangent à la sous variété M en x_0 si et seulement si, il existe un interval I voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tels que :*

$$x_0 = \gamma(0) \quad et \quad u = \gamma'(0)$$

Lemme 4.6.2. *L'ensemble des vecteurs tangent à une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$ en un point $x_0 \in M$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs tangent à M en x_0 définis par les courbes $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$. D'après la définition d'une sous variété (Définition 4.2.1), il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, V un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0)$$

1) Soit $I \subset I_1 \cap I_2$ un intreval voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t)) \in V; \quad \forall t \in I$$

Si on note par γ la courbe sur M définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t))\Big) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(\gamma_1'(0)) + D_{x_0}\varphi(\gamma_2'(0))\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u) + D_{x_0}\varphi(v)\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u+v)\Big) \\ & = & u + v. \end{array}$$

De plus pour tout $t \in I$ on a :

$$\varphi_{p+1}(\gamma_1(t)) + \varphi_{p+1}(\gamma_2(t)) = ... = \varphi_n(\gamma_1(t)) + \varphi_n(\gamma_2(t)) = 0$$

donc

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t))\Big) \in M; \qquad \forall t \in I$$

2) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I \subset I_1 \cap I_2$ un intreval voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda\varphi(\gamma_1(t)) \in V; \quad \forall t \in I$$

Si on note par γ la courbe sur M définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\lambda\varphi(\gamma_1(t))\Big) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) & = & D_0\varphi^{-1}\Big(\lambda D_{x_0}(\varphi(\gamma_1'(0)))\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(\lambda D_{x_0}\varphi(u))\Big) \\ & = & \lambda D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u)\Big) \\ & = & \lambda u. \end{array}$$

De plus pour tout $t \in I$ on a :

$$\lambda\varphi_{p+1}(\gamma_1(t)) = ... = \lambda\varphi_n(\gamma_1(t)) = 0$$

donc

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\lambda\varphi(\gamma_1(t))\Big) \in M; \qquad \forall t \in I$$

■

Notation 4.6.1. *On note par $T_{x_0}M$ l'esapce vectoriel des vecteurs tangent à la sous variété M en x_0,*

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n,\ \exists\gamma :] -\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n\ C^1 :\ \gamma(] -\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v\}$$

Remarque 4.6.1. *Si $v \in T_{x_0}M$ alors il existent une infinité de courbes γ dans M tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. En effet, si γ est une courbe qui represente v et $f :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to]-\varepsilon, +\varepsilon[$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ alors $\gamma \circ f :] -\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 qui verifie :*

1) $\gamma \circ f(] -\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M$.

2) $\gamma \circ f(0) = \gamma(0) = x_0$.

3) $(\gamma \circ f)'(0) = f'(0)\gamma'(f(0)) = \gamma'(0) = v$.

Lemme 4.6.3. *Soit*

$$\mathcal{K}_{x_0} = \{\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n \ C^1 : \ \gamma(]-\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M \ et \ \gamma(0) = x_0\}$$

Si on désigne par " $\sim$ " la relation définie sur $\mathcal{K}_{x_0}$ par

$$(\gamma_1 \sim \gamma_2) \Leftrightarrow (\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0))$$

alors $\sim$ est une relation d'équivalence et on a

$$(\mathcal{K}_{x_0})/_\sim \equiv T_{x_0}M.$$

Preuve La preuve du lemme est immédiate. ■

Lemme 4.6.4. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de dimension p, alors $T_{x_0}M$ est un espace vectoriel de dimension p.*

Preuve soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, V un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0).$$

1) Si $u \in T_{x_0}M$, alors il existe I un intervale ouvert voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n : C^1$ une courbe dans M tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. On a

$$\forall t \in I; \quad \varphi_{p+1}(\gamma(t)) = ... = \varphi_n(\gamma(t)) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} D_{x_0}\varphi_{p+1}(\gamma'(0)) = ... = D_{x_0}\varphi_n(\gamma'(0)) &= 0 \\ D_{x_0}\varphi_{p+1}(u) = ... = D_{x_0}\varphi_n(u) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &D_{x_0}\varphi(u) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \\ &D_{x_0}\varphi(T_{x_0}M) \subseteq \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

2) Soient $v \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ on a $tv \in V$. Si on pose

$$\gamma : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\to \varphi^{-1}(tv) \in M$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) &= D_0\varphi^{-1}(v) \in T_{x_0}M \end{aligned}$$

d'où

$$D_0\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \subseteq T_{x_0}M. \tag{4.7}$$

Des formules (4.6) et (4.7) on déduit que $T_{x_0}M = D_0\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

■

Définition 4.6.2. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de dimension p. L'ensemble*

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$$

est dit fibré tangent à M ou espace tangent à M.

Remarques 4.6.1. *:*

1) le fibré tangent à une sous variété M en général n'est pas un espace vectoriel.

2)Si $x \neq y$ alors $T_xM \cap T_yM = \emptyset$.

4.7 Espace Tangent à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Puisque U est un voisinage de x alors

$$(\exists \varepsilon > 0): \quad (\forall |t| < \varepsilon), \quad tv + x \in U$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[& \to & U \\ t & \mapsto & vt + x \end{array}$$

alors

$$\gamma(0) = x \quad et \quad \gamma'(0) = v.$$

d'où

$$T_xU = \mathbb{R}^n \equiv \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

$$TU = \bigcup_{x\in U} T_xU \equiv U \times \mathbb{R}^n$$

4.8 Espace tangent à une sous variété définie par une immersion

Proposition 4.8.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion de classe C^1. Si $M = f(U)$ est une sous variété de dimension p, alors*

$$\begin{aligned} T_{f(x)}M &= D_x f(\mathbb{R}^p) \\ TM &= Df(\mathbb{R}^p) = \bigcup_{x\in U} D_x f(\mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

Preuve Soient $x \in U$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $|t| < \varepsilon$ on a $tu + x \in U$. Si on note par $\gamma : t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) = f(tu + x)$ alors γ est une courbe dans $M = f(U)$ et on a

$$\gamma'(0) = D_x f(u) \in T_{f(x)}M$$

Comme $D_x f$ est une application linéaire injective et $dim(T_{f(x)}M) = dim(M) = p$ on déduit que $T_{f(x)}M = D_x f(\mathbb{R}^p)$. ∎

Exemple 4.8.1. *Le plan affine dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est définie par le plongement régulier suivant :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto su + tv + w \end{aligned}$$

où $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tel que u et v sont linéairement indépendant. L'espace tangent à $M = f(\mathbb{R}^2)$ en un point $z = su + tv + w$ est donné par :

$$T_zM = D_{(s,t)}f(\mathbb{R}^2) = \{hu + kv; \quad h,k \in \mathbb{R}\} \equiv \{z\} \times \{hu + kv; \quad h,k \in \mathbb{R}\}$$

d'où

$$TM = \bigcup_{z\in M} \{z\} \times \{hu + kv; \quad h,k \in \mathbb{R}\} = M \times \{hu + kv; \quad h,k \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 4.8.2. ***Exp-2*** *soit le cercle définie par l'immersion suivante*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

On a $M = f(\mathbb{R}) = S^1$ et

$$\begin{aligned} T_{f(t)}M &= D_t f(\mathbb{R}) \\ &= \Big\{\lambda(-\sin(t), \cos(t)); \quad \lambda \in \mathbb{R}\Big\} \\ &\equiv \Big\{(-\sin(t), \cos(t))\Big\} \times \mathbb{R} \\ TM &\equiv S^1 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 4.8.3. *soient la sphère* $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2=1\}$ *et* f *l'application de classe* C^1 *définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & (\cos(t)\cos(s), \cos(t)\sin(s), \sin(t)) \end{array}$$

On a :

1) $M = f(\mathbb{R}^2) = S^2$ *est une sous variété de dimension* 2.

2) $D_{(s,t)}f = \begin{pmatrix} -\cos(t)\sin(s) & -\sin(t)\cos(s) \\ \cos(t)\cos(s) & -\sin(t)\sin(s) \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$, f *est une immersion si et seulement si* $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

3) Si on note $e_1 = (0,0,1)$, $e_{-1} = (0,0,-1)$, $u = \begin{pmatrix} -\cos(t)\sin(s) \\ \cos(t)\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(s) \\ -\sin(t)\sin(s) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$,

$A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; \, t = (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$, *alors* f *est une immersion sur* $\mathbb{R}^2 - A$ *et on a :*

a) $S^2 - \{e_1, e_{-1}\} = f(\mathbb{R}^2 - A)$

b) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 - A$ *:*

$$\begin{array}{rcl} T_{f((s,t))} & = & D_{(s,t)}f(\mathbb{R}^2) \\ & = & \{\lambda u + \beta v; \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}\} \\ & \equiv & \{f((s,t))\} \times \mathbb{R}^2 \end{array}$$

c) $TS^2 \equiv ((S^2 - \{e_1, e_{-1}\}) \times \mathbb{R}^2) \cup T_{e_1}S^2 \cup T_{e_{-1}}S^2$.

On verra plus tards que

$$\begin{array}{rcl} TS^2 & \not\cong & S^2 \times \mathbb{R}^2) \\ TS^2 & \equiv & ((S^2 - \{e_1\}) \times \mathbb{R}^2) \cup T_{e_1}S^2. \end{array}$$

Exemple 4.8.4. *(Inverse de la projection stéréographique).*

Soient les application f *et* g *définies par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & (\frac{2s}{s^2+t^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+1}, \frac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{array}$$

On a :

1. *f et g sont des application de classe C^1.*
2. *$f(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$ (où $N = e_1 = (0, 0, 1)$).*
3. *$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$ est une application bijective d'inverse g.*
4. $D_{(s,t)}f = \frac{2}{(s^2+t^2+1)^2} \begin{pmatrix} -s^2 + t^2 + 1 & -2st \\ -2st & s^2 - t^2 + 1 \\ 2s & 2t \end{pmatrix}$
5. *$D_{(s,t)}f$ est de rang 2.*
6. *Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} -s^2 + t^2 + 1 \\ -2st \\ 2s \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2st \\ s^2 - t^2 + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ sont linéairement in dépendants.*
7. *De (1), (3) et (5) on déduit que f est un plongement régulier et $M = f(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$ est une sous variété de dimension 2.*
8. $T_{f((s,t))}M = Im(D_{(s,t)}f) = \{\lambda u + \beta v;\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \{f((s, t))\} \times \mathbb{R}^2$.
9. $TM = \bigcup_{s,t\in\mathbb{R}^2} \{f((s, t))\} \times \mathbb{R}^2 = (S^2 - \{N\}) \times \mathbb{R}^2$.

Remarque 4.8.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} g : S^2 - \{N\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{array}$$

est dite projection stéréographique.

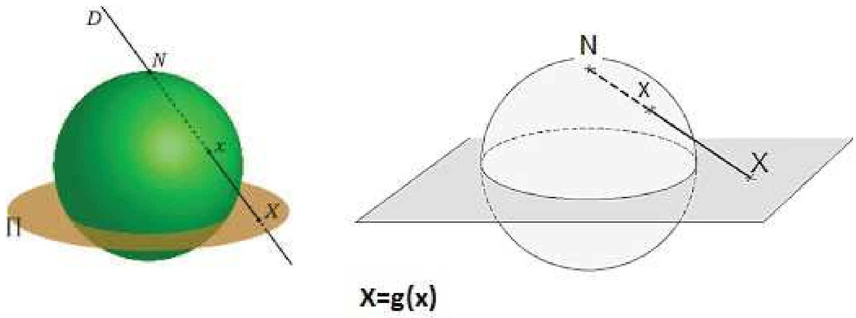

FIGURE 4.8 – Projection Stéréographique de S^2

4.9 Espace tangent à une sous variété définie par une submersion

Proposition 4.9.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion de classe C^1. Si $z \in f(U)$ alors l'espace tangent à la sous variété $M = f^{-1}(\{z\})$ est donné par*

$$\begin{array}{rcl} T_xM & = & \ker(D_xf) \\ TM & = & \ker(Df) = \bigcup_{x\in M} \ker(D_xf) \end{array}$$

Preuve Si $u \in T_xM$, alors il existe une courbe $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$. On a

$$\begin{array}{rcl} f\circ\gamma(t) & = & z; \quad \forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[\\ (f\circ\gamma)'(t) & = & 0 \\ D_xf(\gamma'(0)) & = & 0 \\ D_xf(u) & = & 0 \end{array}$$

d'où $T_xM \subset \ker D_xf$. Comme D_xf est une application surjective, alors $\dim(\ker D_xf) = n-m = \dim(T_xM)$ et par suite $\ker D_xf = T_xM$.
■

Exemples 4.9.1. *:*

Exp-1 ***:*** *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_0, x_1, ..., x_n) & \mapsto & 1 - \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{array}$$

f est une submersion sur $\mathbb{R}_*^{n+1}$, donc la sphère $S^n = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de dimension n telle que

$$\begin{aligned} T_xS^n &= \ker D_xf \\ &= \{h = (h_0, h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; < x, h >= \sum_{i=0}^{n} x_ih_i = 0\} \end{aligned}$$

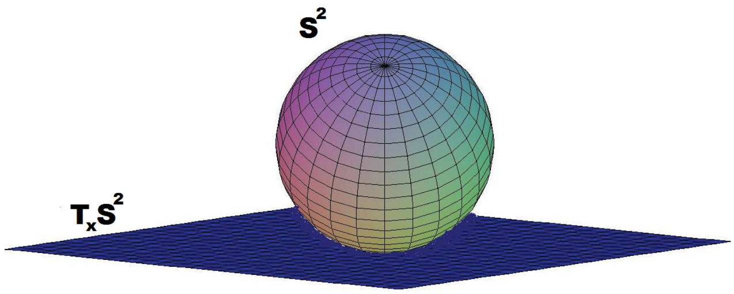

FIGURE 4.9 – Espace Tangent à S^2

4.10 Champs de Vecteurs

Définition 4.10.1. ***(Champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.)***

Un champ de vecteurs sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ est une application

$$\begin{aligned} X : U &\to TU = U \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto X_x = (x, F(x)) \end{aligned}$$

où F est une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs X est dit de classe C^k si et seulement si F de classe C^k.

L'ensemble des champs de vecteurs sur U est noté par $\Gamma(TU)$.

Lemme 4.10.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$\begin{array}{rcl} L_v^x : \mathcal{C}^k(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & L_v^x(f) = D_x f(v) \end{array}$$

est une application linéaire qui vérifie l'identité de Leibnitz

$$L_v^x(fg) = g(x)L_v^x(f) + f(x)L_v^x(g)$$

Preuve La preuve est une conséquence directe des propriétés de la différentielle.
■

Remarques 4.10.1. *On a :*

1) Si $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $L_{e_i}^x = (\frac{\partial}{\partial x_i})_{|x}$.

2) Si $v = (v^1, ..., v^n)$ alors $L_v^x = \Sigma_i v^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_{|x}$.

3) Si $v = (v^1, ..., v^n)$ alors $L_v^x(f) = \Sigma_i v^i (\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)$.

4) D'après la formule de Leibnitz, si $f = Const$ alors $L_v^x(f) = 0$.

Lemme 4.10.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$. Si*

$$\begin{array}{rcl} L^x : \mathcal{C}^k(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & L^x(f) \end{array}$$

est une application linéaire qui vérifie l'identité de Leibnitz

$$L^x(fg) = g(x)L^x(f) + f(x)L^x(g)$$

alors, il existe un et un seul vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $L^x = L_v^x$.

Preuve Soient $z \in U$, $P_i : x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_i \in \mathbb{R}$ la *ième* projection et $v = (v^1, ..., v^n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$v^i = L^z(P_i) = L^z(x_i) \tag{4.8}$$

alors $L^z = L_v^z$. En effet :

Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ alors au voisinage de z, le développement limité à l'ordre 2 de f s'écrit :

$$f(x) = f(z) + \sum_i (x_i - z_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) + \sum_{ij} (x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)$$

D'après la formule de Leibnitz, on a

1) $L^z(Const) = L^z(Const) = 0$.

2) $L^z\Big((x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)\Big) = L^z_v\Big((x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)\Big) = 0$.

3) $L^z\Big((x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\Big) = L^z(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) = v^i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) = L^z_v\Big((x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\Big)$.

d'où

$$L^z = L^z_v$$

Remarque : L'unicité du vecteur v, découle immédiatement de la formule (4.8).

■

D'après la Définition 4.10.1, les Lemmes 4.10.1 et 4.10.2, on obtient la proposition suivante

Proposition 4.10.1. *Tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TU)$ est représenté par une application linéaire unique $L_X : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ vérifiant la formule de Leibnitz :*

$$L_X(fg) = gL_X(f) + fL_X(g)$$

L_X est définie par :

$$\begin{array}{rcl} L_X : \mathcal{C}^\infty(U) & \to & \mathcal{C}^\infty(U) \\ f & \mapsto & L_X(f) = X(f) = Df(X). \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} Df(X) : U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Df(X)(x) = D_xf(X_x). \end{array}$$

Remarque 4.10.1. *D'après la Définition 4.10.1, la Remarque 4.10.1 et la Proposition 4.10.1, L_X est un opérateur linéaire définie sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ tel que*

$$L_X(f) = X(f) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{4.9}$$

$$L_X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

où $X^i = P_i \circ F = F^i$.

Définition 4.10.2. ***(Champs de vecteurs sur une sous-variété.)***

Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Un champ de vecteurs sur M est une application

$$\begin{array}{rcl} X : M & \to & TM \\ x & \mapsto & X_x = (x, F(x)) \in T_xM \end{array}$$

où $F : M \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.

Le champ de vecteurs X est dit de classe C^k si pour tout difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $M \cap U = \varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}^p)$, l'applicationon $F \circ \varphi^{-1} : V \cap \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ est de classe C^k

où U et V sont deux ouvert de $\mathbb{R}^n$ (voir Définition 4.2.1).

Proposition 4.10.2. *Soient M une sous variété de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \Gamma(TU)$. Si $M \subseteq U$ alors*

$$\Big(X \in \Gamma(TM)\Big) \Leftrightarrow \Big((\forall x \in M) : \; X_x \in T_xM\Big).$$

D'après la Proposition 4.9.1, on déduit la proposition suivante :

Proposition 4.10.3. *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension p définie par une subersion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$, alors $X \in \Gamma(TU)$ est un champ de vecteurs sur M si et seulement si*

$$Df(X) = 0, \quad i.e. \quad (\forall x \in M) : \; D_xf(X_x) = 0.$$

autrement dit, les fonctions $(X^1, ..., X^n)$ composante de X forment une solution du système d'équations :

$$X(f^j) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = 0, \quad 1(\leq j \leq n-p). \tag{4.11}$$

Exemple 4.10.1. *Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \, x \in I\}$. Le champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$X_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} + f'(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

est un champ de vecteurs sur M.

Exemple 4.10.2. *Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \, z = ax + by + c\}$. Le champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$X_{(x,y,z)} \;=\; x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (ax + by)\frac{\partial}{\partial z}$$

est un champ de vecteurs sur M*.*

$$X_{(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (z-c-1)\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas un champ de vecteurs sur M*.*

Exemple 4.10.3. *Soit* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2-1=0\}$*. Les champs de vecteurs* X *défini sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\begin{aligned} X_{(x,y,z)} &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \\ \overline{X}_{(x,y,z)} &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\ \widetilde{X}_{(x,y,z)} &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

sont des champs de vecteurs sur M*.*

$$\widehat{X}_{(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas un champ de vecteurs sur M*.*

4.11 Orientation d'une Sous Variété

Définition 4.11.1. *Soit* $e = (e_1, ..., e_n)$ *la base canonique de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$*. Une base* ξ *est dite orienté dans le sens directe (resp. inverse) de* e *si*

$$det(P(e,\xi) > 0), \quad (resp.\ det(P(e,\xi) < 0))$$

où $P(e,\xi)$ *désigne la matrice de passage de* e *à* ξ*.*

Remarque 4.11.1. *:*

1) La base $\overline{e} = (e_2, e_1, e_3, ..., e_n)$ *est orienté dans le sens inverse de* e*.*

2) $(det(P(e,\xi) < 0) \Leftrightarrow (det(P(\overline{e},\xi) > 0)$

Définition 4.11.2. *Soient ξ_1, ξ_2 deux bases d'un espace vectoriel E de dimension fini. On dit que ξ_1 et ξ_2 ont la même orientation, ou*

$$\xi_1 \sim \xi_2, \quad \Leftrightarrow \quad detP(\xi_1, \xi_2) > 0$$

où $P(\xi_1, \xi_2)$ désigne la matrice de passage.

Lemme 4.11.1. *L'orientation définie une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E dont l'espace quotient est le groupe multiplicatif* $\{1, -1\}$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble quotient est donné par $\{\dot{e}, \dot{\bar{e}}\}$.

Lemme 4.11.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Si $\varphi : E \to E$ est un isomorphisme linéaire, alors*

$$\xi_1 \sim \xi_2, \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\xi_1) \sim \varphi(\xi_2).$$

Preuve Si M_1 (resp. M_2) désigne la matrice de φ relativement à la base ξ_1 (resp. ξ_1), alors

$$\begin{array}{ccc} & \varphi, M_1 & \\ (E, \xi_1) & \longrightarrow & (E, \varphi(\xi_1)) \\ P_1 \downarrow & & \downarrow P_2 \\ (E, \xi_2) & \longrightarrow & (E, \varphi(\xi_2)) \\ & \varphi, M_2 & \end{array}$$

$$P_2 = M_2 P_1 M_1^{-1}, \quad d'où \quad detP_1 = detP_2$$

où $P_1 = P(\xi_1, \xi_2)$ (resp. $P_2 = P(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))$) désigne la matrice de passage de ξ_1 à ξ_2 (resp. de $\varphi(\xi_1)$ à $\varphi(\xi_2)$).

■

Définition 4.11.3. *L'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie n est le choix d'une base ordonnée $\xi = (v_1, ..., v_n)$.*

Une base ξ' est une orientation directe (resp. indirecte) si $detP(\xi, \xi') > 0$ (resp. $detP(\xi, \xi') < 0$).

Définition 4.11.4. *Une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimension p est dite orienté si pour tout $x \in M$, l'espace tangent T_xM est orienté.*

Si on désigne par $\xi_x = (v_1(x), ..., v_p(x))$ l'orientation de T_x pour tout $x \in M$, alors les applications

$$\begin{array}{rcl} v_i : M & \to & TM \\ x & \mapsto & v_i(x) \end{array}$$

définissent une famille de champs de vecteurs $\xi = (v_1, ..., v_p)$.

L'orientation ξ est dite de classe C^k si et seulement si les champs de vecteurs $v_1, ..., v_p$ sont de classe C^k (voir Définition 4.10.2).

Exemples 4.11.1. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ est une sous variété orienté par $\xi = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$.

2) $\mathbb{R}^p \quad (p < n)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ orienté par $\xi = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_p})$.

3) Sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, les champs de vecteurs

$$X_{(x,y)} = (x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_{(x,y)} = (-y, x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

définis une orientation directe de classe C^∞.

4) Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n,\ x^2 + y^2 = 1\}$ est orienté par le champ de vecteurs de classe C^∞,

$$X_{(x,y)} = (-y, x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

.

4.12 Exercices

Exercice 4.12.1. *Soit $0 < r < 1$. Montrer que l'ensemble*

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = r^2\}$$

est une sous variété de $\mathbb{R}^3$*, déterminer sa dimension.*

Exercice 4.12.2. *Determiner l'ensemble* U *de* $\mathbb{R}^3$ *où la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array}$$

est une submersion. Déterminer les sous variétés associées à f*.*

Exercice 4.12.3. *En utilisant la Définition 4.4.1 démontrer que le cylindre* $S^1 \times [0, 1]$ *est une sous variété à bord.*

Exercice 4.12.4. *En utilisant la Définition 4.4.2 démontrer que le cylindre* $S^1 \times [0, 1]$ *est une sous variété à bord.*