Chapitre 3

Théorème du Rang

Définition 3.0.1. [***Rang d'une Application***] *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* $Im(D_x f) = \{D_x f(h); \quad h \in E\}$ *est un espace vectoriel de dimension fini, on dit alors que* f *est de rang fini en* x *et on note*

$$rang_x(f) = dim(Im(D_x f))$$

Remarque 3.0.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* E *est de dimension fini, alors*

$$dim(E) = dim(Ker(D_x f)) + dim(Im(D_x f))$$

d'où

$$rang_x(f) = dim(Im(D_x f)) = dim(E) - dim(Ker(D_x f))$$

Remarque 3.0.2. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach de dimensions finis et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* f *est de rang* p *en* $x \in U$, *alors il existe* $\{e_1, ..., e_n\}$ *une base de* E *et* $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_m\}$ *une base de* F *telles que* $\{D_x f(e_1), ..., D_x f(e_p)\}$ *est une base de* $Im(D_x f)$ *et* $\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ *est une base* $Ker(D_x f)$. *Relativement à ces deux base la matrice* $M_x(f)$ *associée à* $D_x f$ *est donée par*

$$M_x(f) = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & 0.. & 0 \\ \vdots & ... & .\vdots & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0.. & 0 \\ \vdots & ... & \vdots & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0.. & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix} 1 & ... & 0 \\ \vdots & ... & .\vdots \\ 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

est une sous matrice carrée d'ordre p. On déduit que le rang de f en x est l'ordre (rang) de la plus grande sous matrice inversible de $M_x(f)$.

Définition 3.0.2. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1. On dit que f est une immersion en $x \in U$ si $D_x f : E \to F$ est une application injective (i.e $Ker(D_x f) = \{0\}$).*

f est dite immersion sur U si elle est immersion en tout point $x \in U$.

Définition 3.0.3. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1. On dit que f est une submersion en $x \in U$ si $D_x f : E \to F$ est une application surjective (i.e $Im(D_x f) = F$).*

f est dite submersion sur U si elle est submersion en tout point $x \in U$.

Remarque 3.0.3. *Si E et F sont de dimensions finis alors d'après la remarque 3.0.1, on a*

1. *f est une immersion en x si et seulement si $rang_x(f) = dim(E)$*
2. *f est une submersion en x si et seulement si $rang_x(f) = dim(F)$*

Remarques 3.0.1. [***Cas Réel.***]

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et

$$\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

alors

1. *f est une immersion en x si et seulement si $rang_x(f) = n$*
2. *f est une submersion en x si et seulement si $rang_x(f) = m$*
3. *f est de rang p en x si et seulement si il existe $\{i_1, ..., i_p\} \subseteq \{1, .., n\}$ et $\{j_1, ..., j_p\} \subseteq \{1, .., m\}$ tels que :*

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

et, $\forall i = 1, .., n$, $\forall j = 1, .., m$

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 3.0.1. *Si* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable, alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & f(x) = (x, g(x)) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}$ *(*$D_x f = (1, g'(x)) \neq (0,0)$*).*

Exemple 3.0.2.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & f(x) = (\cos(x), \sin(x)) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}$ *(*$D_x f = (-\sin(x), \cos(x)) \neq (0,0)$*).*

Exemple 3.0.3. *Si* $n \leq m$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.0.4.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = -1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array}$$

est une submersion sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*.*

Exemple 3.0.5. *Si* $m \leq n$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_m, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (x_1, ..., x_m) \end{array}$$

est une submersion sur $\mathbb{R}^n$*.*

3.1 Théorème de Caractérisation d'une Submersion.

Théorème 3.1.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (de classe C^1, $m \leq n$) une submersion en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ ouvert vosinage de x_0, W un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : V \to W$ un difféomorphisme tels que :*

$$\begin{array}{rcl} f \circ g^{-1} : W & \to & \mathbb{R}^m \\ y = (y_1, ..., y_m, ..., y_n) & \mapsto & (y_1, ..., y_m) \end{array}$$

est une projection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} f : V & \to & \mathbb{R}^m \\ g : \Big\downarrow & \nearrow & \\ W & & \end{array}$$

est commutatif.

Preuve On a

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (f_1(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

est une submersion en x_0 (i.e. $rang_{x_0} f = m$).

A des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{array} \right|_{(x_0)} \neq 0.$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} h : U & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, ..., x_m, ..., x_n) & \mapsto & (f_1(x), ..., f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n) \end{array}$$

alors

$$D_{x_0} h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(x_0)} .$$

$$det(D_{x_0}h) = det \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{array} \right|_{(x_0)} \neq 0.$$

Du théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.3), on déduit l'existence d'un ouvert $V \subset U$ vosinage de x_0 et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisivage de $h(x_0)$ tels que $h : V \to W$ est un difféomorphisme. Si $x \in V$ et $y \in W$ tel que $y = h(x)$ alors

$$y = (y_1, ..., y_m, ..., y_n) \quad = \quad h(x) = (f_1(x), ..., f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n)$$

d'où

$$y_i = f_i(x); \quad \forall\, i = 1, ..., m.$$

Si on pose $g = h : V \to W$ alors

$$f \circ g^{-1}(y) = f(g^{-1}(y)) = f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) = (y_1, ..., y_m)$$

est une projection canonique sur $\mathbb{R}^m$. ∎

Remarque 3.1.1. *Toute submersion est localement surjective.*

Applications :

Exemple 3.1.1. *Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = xe^y \in \mathbb{R}$. Définir un difféomorphisme $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $f \circ g^{-1}$ est une projection canonique sur $\mathbb{R}$.*

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D_{(x,y)}f = (e^y, xe^y)($$

est une application linéaire de rang 1 ($e^y \neq 0; \quad \forall y \in \mathbb{R}$). On définit une extension de f sur $\mathbb{R}$ par l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (f(x, y), y) = (xe^y, y) \end{array}$$

alors

$$D_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y)}g) = e^y \neq 0$$

de plus g est injective, d'après le théorème d'inversion locale (Corollaire 2.5.1) on déduit que g est un difféomorphisme globale et on a

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xe^{-y}, y) \end{array}$$

d'où $f \circ g^{-1}((x,y)) = f((xe^{-y}, y)) = x$, $f \circ g^{-1}$ *est une projection sur* $\mathbb{R}$.

Remarque : *Le choix de l'application g n'est pas unique, en général on choisis* $g = (f, h)$ *tel que*

$$det \begin{vmatrix} e^y & xe^y \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = e^y \frac{\partial h}{\partial y} - xe^y \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$$

Il suffit donc de choisir h tel que $\frac{\partial h}{\partial y} \neq x \frac{\partial h}{\partial x}$.

Exemple 3.1.2. *Même question pour l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, z\sin(y)) \end{array}$$

On a

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \end{pmatrix}$$

On distingue les cas suivants :

1. *Si* $z = 0$ *et* $y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, *alors* $rang_{(x,y,z)}f = 1$ *donc f n'est pas une submersion.*
2. *Si* $y \neq k\pi$, *alors*

$$det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin(y) \end{vmatrix} = \sin(y) \neq 0$$

On définit une extension de f par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y, z\sin(y)) \end{array}$$

et on a

$$D_{(x,y,z)}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y,z)}g) = -\sin(y) \neq 0$$

donc g *est un difféomorphisme locale tel que localement on a* $g^{-1}(x,y,z) = (x, y, \frac{z}{sin(y)}$ *et* $f \circ g^{-1}(x,y,z) = (x,z)$.

3. *Si* $z \neq 0$ *et* $y \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ *alors*

$$det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z\cos(y) \end{vmatrix} = z\cos(y) \neq 0$$

On définit une extension de f *par*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, z\sin(y), z) \end{array}$$

et on a

$$D_{(x,y,z)}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y,z)}g) = z\cos(y) \neq 0$$

donc g *est un difféomorphisme locale tel que localement au voisinage de* (x,y,z), *on a* $g^{-1}(x,y,z) = (x, \arcsin(\frac{y}{z}), z$ *et* $f \circ g^{-1}(x,y,z) = (x,y)$.

remarque : *le choix du voisinage de* (x,y,z) *est conditionner par le domaine de définition de la fonction* $\arcsin(\frac{y}{z})$.

3.2 Théorème de Caractérisation d'une Immersion.

Théorème 3.2.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *(de classe* C^1, $n \leq m$*) une immersion en* $x_0 \in U$, *alors il existe un ouvert* $V \subset U$ *ouvert vosinage de* x_0, W' *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *voisinage de* $f(x_0)$, W *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *et* $g : W \to W'$ *un difféomorphisme tels que :*

$$\begin{array}{rcl} g\circ f : V & \to & W \subset \mathbb{R}^m \\ y=(x_1,...,x_n) & \mapsto & (x_1,...,x_n,0...,0) \end{array}$$

est une injection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \to & W' \\ & \searrow & \big\downarrow g \\ & & W \end{array}$$

est commutatif.

Preuve On a

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^m \\ x=(x_1,...,x_n) & \mapsto & (f_1(x),...f_n(x),...,f_m(x)) \end{array}$$

est une immersion en x_0 (i.e. $rang_{x_0} f = n$).

A des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} h : U\times\mathbb{R}^{m-n} & \to & \mathbb{R}^m \\ \overline{x}=(x_1,...,x_n,...,x_m) & \mapsto & (f_1(x),...,f_n(x),f_{n+1}(x)+x_{n+1},...,f_m(x)+x_m) \end{array}$$

où $x=(x_1,...,x_n)$.

Alors $\overline{x}_0=(x_0,0)$, $\quad h(\overline{x}_0)=h((x_0,0))=f(x_0)$ et on a

$$D_{(x_0,0)}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(x_0,0)} .$$

$$det(D_{(x_0,0)}h) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0.$$

Du théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.3), on déduit l'existence d'un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ vosinage de $\overline{x}_0$ et un ouvert $W' \subset \mathbb{R}^m$ voisivage de $h(\overline{x}_0)$ tels que $h : W \to W'$ est un difféomorphisme. Si on note $g = h^{-1} : W' \to W$, alors

$$g^{-1}((x,0)) = h((x,0)) = (f_1(x), ..., f_m(x), f_{n+1}(x), ..., f_m(x)) = f(x)$$

d'où

$$g \circ f(x) = (x,0) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0), \quad \forall x \in V = f^{-1}(W')$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W' \\ & \searrow & h\Big\uparrow\Big\downarrow g \\ & & W \end{array}$$

■

Remarque 3.2.1. *Toute immersion est localement injective.*

Applications :

Exemple 3.2.1. *Soit $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x, e^x) \in \mathbb{R}^2$. Définir un difféomorphisme $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $g \circ f$ est une injection canonique sur $\mathbb{R}^2$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$D_x f = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$$

est une application linéaire de rang 1, donc f est une immersion sur $\mathbb{R}$. On définit une extension de f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, e^x + y) \end{array}$$

alors

$$D_{(x,y)}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y)}h) = 1 \neq 0$$

de plus g est injective, d'après le théorème d'inversion locale (Corollaire 2.5.1) on déduit que h est un difféomorphisme globale et on a

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y - e^x) \end{array}$$

Si on pose $g = h^{-1}$ *alors* $g \circ f(x) = g(x, e^x) = (x, 0)$, $f \circ g^{-1}$ *est une injection dans* $\mathbb{R}^2$.

Remarque : *La fonction g n'est pas unique, on peut choisir une fonction h sous la forme*

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x), f_2(x) + y.k(x)) = (x, e^x + y.k(x)) \end{array}$$

tel que $k(x) \neq 0$. *Dans ce cas on a :*

$$det(D_{(x,y)}H = det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^x + y.k'(x) & k(x) \end{vmatrix} = k(x) \neq 0.$$

$$h(x,0) = g^{-1}(x,0) = (x, e^x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x)$$

d'où $g \circ f(x) = (x, 0)$.

3.3 Théorème du Rang Constant

Théorème 3.3.1. *Soient* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ *une application différentiable de classe* C^1 *et* $p \leq \min(n,m)$. *Si f est de rang p constant sur U (i.e.* $\forall x \in U, \quad rang_x(f) = p$*), alors pour tout* $x_0 \in U$ *Ils existent un ouvert* $V \subset U$ *voisinage de* x_0, *un ouvert W voisinage de* $f(x_0)$, *un difféomorphisme* $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ *et un difféomorphisme* $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ *tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}((y_1, ...y_p, y_{p+1}...., y_m)) = (y_1, ...y_p, 0...., 0)$$

Preuve On a $x = (x_1, ...x_p, x_{p+1}...., x_n)$, $\quad (f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), f_{p+1(x)}, ..., f_m(x))$ et

$$D_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x .$$

Comme $rang_x f = p$, à des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

$\forall i = 1, ..., n$ et $\forall j = 1, ..., m$, on a

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{vmatrix}_{(x_0)} = 0.$$

En utilisant la continuité de l'application multilinéaire det (déterminant), on déduit l'existence d'un ouvert $\overline{V} \subset U$ voisinage de x_0 tel que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x)} \neq 0. \qquad (\forall x \in \overline{V})$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \overline{V} & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, ..., x_p, ..., x_n) & \mapsto & \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n) \end{array}$$

alors φ est une application différentiable de classe C^1, tel que :

$$D_x\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_x .$$

$$det(D_{x_0}\varphi) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $\widetilde{V} \subset \overline{V}$ voisinage de x_0 tel que $\varphi : \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(\widetilde{V}) \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de classe C^1.

On remarque que si $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n) = \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n)$ alors

$$y_i = f_i(x), \qquad (\forall i = 1, ..., p).$$

Si on désigne par $h = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\widetilde{V}) \to \mathbb{R}^m$, alors pour $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n)$ on a

$$\begin{array}{rcl} h(y) & = & (h_1(y), ..., h_p(y), h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \\ & = & f \circ \varphi^{-1}(y) \\ & = & f(x) \\ & = & (f_1(x), ..., f_p(x), f_{p+1}(x), ..., f_m(x)) \\ & = & (y_1, ..., y_p, h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \end{array}$$

$$D_y h = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_p} & \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n} \end{bmatrix}_y .$$

Comme f est une application de rang p et φ est un difféomorphisme, on déduit que h est une application de rang p, par suite

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n}(y) \end{bmatrix} = 0, \qquad (\forall y \in \varphi(\widetilde{V})).$$

(est une matrice nulle d'ordre $(m-p, n-p)$).

Ce qui montre que $h_{p+1}, ..., h_m$, sont des fonctions indépendantes des variables $(y_{p+1}, ..., y_n)$.

$$h_j(y) = h_j((y_1, ..., y_p)), \qquad p+1 \leq j \leq m.$$

Soient $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert voisinage de $f(x_0)$ tel que $x_0 \in f^{-1}(W) \subset \widetilde{V}$ et ψ une application définie par

$$\begin{array}{rcl} \psi : W & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ z = (z_1, ..., z_m) & \mapsto & ((z_1, ..., z_p, z_{p+1} - h_{p+1}(z), ..., z_m - h_m(z)). \end{array}$$

alors

$$D_y \psi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial h_m}{\partial y_p} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_z .$$

donc ψ est un difféomorphisme locale, de plus ψ est injective, en effet, si $\psi(z) = \psi(z')$ alors

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & z'_1 \\ \vdots & & \\ z_p & = & z'_p \\ & & \\ z_{p+1} - h_{p+1}(z) & = & z'_{p+1} - h_{p+1}(z') = z'_{p+1} - h_{p+1}(z) \\ \vdots & & \\ z_m - h_m(z) & = & z'_m - h_m(z') = z'_m - h_m(z) \end{array}$$

d'où $z = z'$. Comme ψ est un difféomorphisme locale et une application injective sur W, alors d'après le théorème d'inversion locale (Coroolaire 2.5.1) ψ est un difféomorphisme sur W.

Si on note par $V = f^{-1}(W)$ alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} \psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1, ...y_p, y_{p+1}...., y_n)) & = & \psi((y_1, ...y_p, h_{p+1}(y), ..., h_m(y))) \\ & = & (y_1, ...y_p, h_{p+1}(y) - h_{p+1}(y), ..., h_m(y) - h_m(y)) \\ & = & (y_1, ...y_p, 0...., 0). \end{array}$$

■

Remarque 3.3.1. *Si f est une submersion (resp. immersion), on retrouve le théorème de caractérisation d'une submersion (Théorème 3.1.1) (resp immersion (Théorème 3.2.1)).*