4. العلاقة بين الإنتاج المتوسط ($\mathbf{PM_L}$) والإنتاج الحدي للعمل ($\mathbf{Pm_L}$)

نستنتج ثلاث حالات للعلاقة بين الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي من خلال المشتقة الأولى لدالة الإنتاج المتوسط عندما نعدمها. حيث نعلم أن الشرط اللازم لتعظيم أي دالة أو تدنيتها هو أن يكون مشتق هذه الدالة بالنسبة للمتغير مساويا للصفر:

$$PM_L = \frac{PT_L}{L} = \frac{f(L)}{L}$$

$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = \frac{\partial(\frac{PT_L}{L})}{\partial L} = \frac{\frac{\partial PT_L}{\partial L} \times L - \frac{\partial L}{\partial L} \times PT_L}{L^2} = \frac{Pm_L \times L - PT_L}{L^2} = \frac{Pm_L}{L} - \frac{PM_L}{L}$$
$$= \frac{1}{L} \times (Pm_L - PM_L) = 0$$

هذه العلاقة تجعلنا نستنتج الحالات الثلاث التالية:

- إذا كان $PM_L < Pm_L \Leftarrow \frac{\partial PM_L}{\partial L} > 0$ تكون الإنتاجية المتوسطة متزايدة وتتمثل هذه الحالة في مرحلة تزايد الغلة. منحنى الإنتاجية المتوسطة يقع أسفل منحنى الإنتاجية الحدية للعمل.
- إذا كان $PM_L > Pm_L \Leftarrow \frac{\partial PM_L}{\partial L} < 0$ تكون الإنتاجية المتوسطة متناقصة وتتمثل هذه الحالة في مرحلة تناقص الغلة. يكون منحنى الإنتاجية المتوسطة أعلى من منحنى الإنتاجية الحدية.
- إذا كان $PM_L = Pm_L \Leftarrow \frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0$ في هذه الحالة تكون الإنتاجية المتوسطة تصل الى أعظم قيمة لها وهي النقطة التي يقطع فيها منحنى الإنتاج الحدي منحنى الإنتاج المتوسط، وتعتبر هذه النقطة الحد الفاصل بين مرحلة تزايد الغلة ومرحلة تناقص الغلة.

5. مراحل الإنتاج:

يمكن التمييز بين ثلاث مراحل للإنتاج إستنادا الى العلاقة بين الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط لعنصر العمل:

1.5. المرحلة الأولى: تمتد من الصفر الى النقطة التي يكون فيها الإنتاج المتوسط في أقصى قيمة له وهي النقطة التي يتساوى عندها الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي، حيث أن:

$$L \in \left[L = 0, \quad \begin{matrix} PM_L = Pm_L \\ \text{أو} \\ \frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0 \end{matrix} \right[$$

تتميز هذه المرحلة بتزايد إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر العمل، كما مبين في الشكل رقم (01).

2.5. المرحلة الثانية: تسمى بمرحلة الكفاءة والفعالية الإقتصادية، وتتميز هذه المرحلة بتناقص إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر العمل (الإنتاحية المتوسطة) وذلك حتى مستوى الإستخدام الأمثل لعنصر العمل (L*). تعتبر هذه المرحلة الأفضل بالنسبة للمؤسسة في المدى القصير لتميزها بالإستخدام العقلاني لعنصر العمل والعوامل الإنتاجية الثابتة الأخرى. أي أن الأداء بالنسبة لعنصر العمل في هذه المرحلة يعتبر أداء فعالا وعلى المؤسسة تكثيف عامل الرقابة وبشكل مستمر للمحافظة على هذا المستوى الأداء الإنتاجي.

تمتد هذه المرحلة من مستوى الإستخدام الذي يتساوى فيه الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي الى غاية مستوى الإستخدام الذي يتحقق عنده أعظم إنتاج. أي النقطة التي يكون فيها الإنتاج الحدي للعمل معدوما، أي أن:

$$L \in \left[\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0, \qquad Pm_L = 0\right[$$

3.5. المرحلة الثالثة: هي مرحلة غير إقتصادية وتتميز بإستمرار تناقص إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر العمل، حيث يرجع ذلك الى سلبية الإنتاجية الحدية للعمل. وهو مايعني أن إضافة أي وحدة عمل جديدة للعملية الإنتاجية يؤدي الى تخفيض قيمة الإنتاج الكلي. نشاط المؤسسة في هذه المرحلة الثالثة يكون ناتج عن قرارات غير إقتصادية.

تمتد هذه المرحلة من النقطة التي ينعدم فيها الإنتاج الحدي للعمل الى مالانهاية، أي أن:

$$L \in [Pm_L = 0, \infty[$$

بالعودة الى المثال التوضيح السابق نلاحظ أن المراحل الثلاث للإنتاج موضحة في الشكل البياني رقم (01)

مثال توضيحي (02):

بإفتراض أن العملية الإنتاجية تستخدم عنصري العمل ورأس المال وإذا كانت دالة الإنتاج لمؤسسة ما في المدى القصير معطاة بالعلاقة التالية:

$$Q = -2KL^3 + 20KL^2 + 10KL$$

المطلوب:

إذا كان عنصر رأس المال K=1

1. أوجد الصيغة الرياضية لدالة الإنتاج الكلي (PT_L)، الإنتاج المتوسط (PM_L)، والإنتاج الحدي (Pm_L)؟
2. حدد مناطق مراحل الإنتاج الثلاث؟

الحل:

1. دول الإنتاج في المدى القصير:

- ✓ الإنتاج الكلي للعمل (L): $Q = PT_L = -2L^3 + 20L^2 + 10L$
- ✓ الإنتلج المتوسط للعمل (L): $PM_L = \frac{PT_L}{L} = -2L^2 + 20L + 10$
- ✓ الإنتاج الحدي للعمل (L): $Pm_L = \frac{\partial PT_L}{\partial L} = -6L^2 + 40L + 10$

2. تحديد مناطق مراحل الإنتاج الثلاث:

المرحلة الأولى: من الصفر الى النقطة التي تكون فيها إنتاجية الوحدة الواحدة من عنصر العمل أعظمية عند أقصى مستوى الإنتاج المتوسط (نقطة تقاطع منحنى Pm_L بـ PM_L):

$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow = -4L + 20 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 5}$$ وحدة عمل

مجال المرحلة الأولى: $L \in \left[L = 0,\ \frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0\right[\Leftrightarrow L \in [L = 0,\ L = 5[$ وحدة عمل

المرحلة الثانية: من نقطة تقاطع منحنى Pm_L بـ PM_L الى غاية الحد الأقصى للإنتاج الكلي أي عندما تكون الإنتاجية الحدية للعمل معدومة:

$$Pm_L = 0 \Leftrightarrow = -6L^2 + 40L + 10 = 0$$

بعد حساب المميز والجذور التربيعية نجد L= 6.9

مجال المرحلة الثانية: $L \in \left[\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0,\ Pm_L = 0\right[\Leftrightarrow [L = 5,\ L = 6.9[$ وحدة عمل

المرحلة الثالثة: من الحد الأقصى للإنتاج الى مالانهاية، أي من 6.9 وحدة عمل الى الحد الأقصى للعمالة المتوفرة والمؤهلة للإنتاج:

مجال المرحلة الثالثة: $L \in [Pm_L = 0,\ \infty[\Leftrightarrow [L = 6.9,\ L = \infty [$

III. تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل: