Rappels sur la mécanique quantique

3.1 Introduction

Plusieurs tentatives ont été nécessaires avant d'aboutir à la formulation actuelle de la mécanique quantique. Plus précisément, au milieu des années 1920, il y avait deux approches concurrentes pour modéliser les phénomènes quantiques: celle de Heisenberg, Born, Jordan et Dirac, appelée *mécanique des matrices*, et celle de Schrödinger, appelée *mécanique ondulatoire*.
Avant de détailler ces deux théories, rappelons les points essentiels de la mécanique classique (mécanique analytique). Cette dernière est basée sur le formalisme de Lagrange.

3.2 Rappel du formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange représente un outil extrêmement puissant pour décrire l'évolution d'un problème physique. Initialement aborder sous la forme du principe de moindre action, il permet de déterminer le comportement d'un système, dès que l'expression d'une grandeur physique, le lagrangien, est connue.
L'objectif de ce rappel est de revoir les notions fondamentales de la théorie lagrangienne, tout d'abord dans le cadre de l'étude d'une particule massive, puis dans celui de la théorie des champs.

3.2.1 Principe de moindre action

Étant dans un état initial donné, un système physique a une infinité de façons d'évoluer jusqu'à un état final donné:

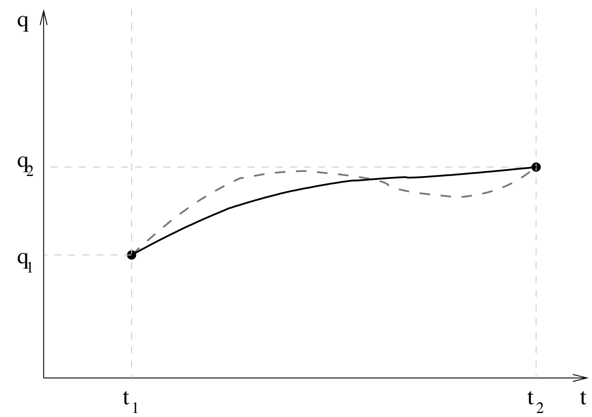


Figure 3.1: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

Pour tant, lors d'une transformation réelle une seule de ces transformations (évolutions) est effectivement réalisées. Comment peut-on déterminer cette évolution privilégiée et la différentiée des autres? C'est à cette question que répond le principe de moindre action, qui peut être considérer comme l'un des postulats de la physique.
D'après le principe de moindre action, il existe une quantité appelée "Action" définit par,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \qquad , \qquad i = 1 \longrightarrow N \tag{3.1}$$

dont la valeur change lors de l'évolution du système et qui doit être minimale le long de la transformation réelle. L'action S est définie comme l'intégrale d'une quantité appelée "Lagrangien", et qui est fonction des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

3.2.2 Équations d'Euler-Lagrange

Parmi toutes les trajectoires qui passent par les deux points fixes $(\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0)$ de coordonnées généralisées $Q_1 = q(t_1)$ et $Q_2 = q(t_2)$, les trajectoires physiques sont celles qui rendent l'action S minimale $\Delta S \simeq 0$.

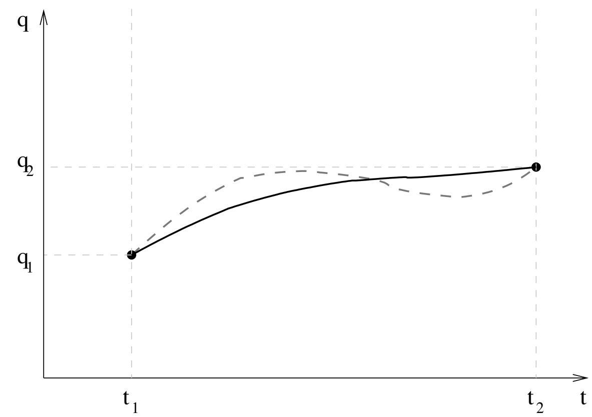


Figure 3.2: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

Si $\delta(q(t))$ est une fonction infinitésimale, alors

$$\Delta S[q] \simeq S(q+\delta q) - S(q) \tag{3.2}$$

On a

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q,\dot{q},t) \quad \Longrightarrow \quad \Delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt[\ L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) -\ L(q,\dot{q},t)] \tag{3.3}$$

Or,

$$L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{3.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} -\ L(q,\dot{q},t)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] \simeq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si on pose

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \tag{3.6}$$

On aussi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q \tag{3.7}$$

En remplaçant dans l'équation (3.5), on retrouve,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] \simeq 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

Où

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = 0 \tag{3.9}$$

Finalement, les équations d'Euler-Lagrange sont données par,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{3.10}$$

3.2.3 Choix du lagrangien

Le choix du lagrangien n'est pas unique.

- Si on remplace le lagrangien L par (αL), où α est un réel, alors les équations de mouvement restent inchangées.
- Si on remplace le lagrangien L par $(\beta + L)$, où β est une constante, alors les équations de mouvement restent inchangées.
- Si on remplace le lagrangien L par $(L + \frac{dF}{dt})$, où $F = F(q, \dot{q}, t)$ est un lagrangien, alors les équations de mouvement restent inchangées.

Exercice 1 :
Montrer que la variation ΔS reste invariante par changement du lagrangien L par $L + \frac{dF}{dt}$.

3.2.4 Formulation hamiltonienne

L'hamiltonien H est donné par

$$H(p, q, t) = P_i \dot{q}_i - L \tag{3.11}$$

L'impulsion généralisée est donnée par

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.12}$$

Exercice 2 :
Montrer que si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t, alors $\frac{dH}{dt} = 0$
Solution 3:

$$\frac{dH}{dt} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \tag{3.13}$$

Or, on a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{3.14}$$

Donc,

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

3.3 Modélisation d'une onde

En raison de la nature ondulatoire de la matière, nous avons besoin de nous intéresser de plus près à ce qu'est une onde et à la méthode adéquate à utiliser pour modéliser mathématiquement son mouvement dans l'espace-temps. D'un point de vue mathématique, le mouvement d'une onde peut être décrit en faisant intervenir la solution de l'équation d'onde suivante:

$$\Box\phi = 0 \tag{3.16}$$

où l'opérateur D'Alembertien est donné par l'expression

$$\Box := -\partial_{tt} + \Delta$$

Une onde sera, alors, modélisée par une fonction ϕ, solution de l'équation (3.16). Une solution évidente de l'équation (3.16) est la fonction

$$\phi(x,t) = \phi_o e^{i(k\cdot x - \omega t)} \tag{3.17}$$

où x représente le vecteur position, t le temps, k le vecteur d'onde (c'est-à-dire le vecteur de propagation d'onde), ω est la fréquence de l'onde et $x \cdot k$ est le produit scalaire.

3.4 Équation de Schrödinger

L'idée, ici, c'est de modéliser les particules de la même manière que des ondes, à savoir par une fonction ψ. La probabilité de trouver la particule à l'instant t est égale à

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx. \tag{3.18}$$

Ceci, impose que

$$\int_{R^3} |\psi(x,t)|^2 dx = 1. \tag{3.19}$$

Le principe fondamental de la mécanique ondulatoire est énoncée comme suit:
La fonction d'onde ψ d'une particule de masse m évoluant dans le vide et soumise à aucune interaction est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \tag{3.20}$$

où $\hbar$ est une constante universelle appelée constante de Planck *et où le laplacien Δ est un laplacien spatial, avec la convention de signe suivante:*

$$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}.$$

La constante de Planck $\hbar$ possède les dimensions d'une énergie multipliée par le temps, ou de manière équivalente d'une quantité de mouvement par une longueur. Sa valeur est exprimée en Joule.Secondes:

$$\hbar = 1,054571628 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

Dans le cas d'une particule placée dans un potentiel, on a
La fonction d'onde ψ d'une particule placée dans un potentiel $V(x,t)$ est solution de:

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi. \tag{3.21}$$

3.5 L'oscillateur harmonique

Cette partie sera traitée sous forme d'exercice (voir l'exercice 3).

3.6 Équation de Pauli

Cette partie sera traitée sous forme d'exercice (voir l'exercice 4).

3.7 Exercices d'application

Exercice 3 :
A l'instant t_o, l'état du système de l'oscillateur harmonique linéaire à une dimension est donné par $\phi(x,0) = e^{a^+}\psi_0(x)$; les $\psi_n(x)$ sont les fonctions propres de $H_o = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$ correspondant aux valeurs propres $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, n est un entier.

1. Quelle est la fonction d'onde normée à l'instant t ?
2. Quelle est la probabilité de trouver l'énergie E à l'instant t ?

Exercice 4 :

1. En utilisant le produit des matrices de Pauli donné par les formules: $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma_k$, Montrer que:
$$(\overrightarrow{\sigma}\,\overrightarrow{A})(\overrightarrow{\sigma}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B} + i\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B})$$
lorsque $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ commutent avec $\overrightarrow{\sigma}$.
2. Trouver la forme générale de l'équation de Pauli libre.

Rappels de relativité restreinte

4.1 Rappel sur les lois de l'électromagnétisme

4.1.1 Équations de Maxwell

Les lois de l'électromagnétisme peuvent être exprimées

- Soit en fonction des champs électrique ($\overrightarrow{E}$) et magnétique ($\overrightarrow{B}$).
- Soit en fonction des potentiels scalaires ($\overrightarrow{A}$) et scalaire (ϕ).

Maxwell a exprimé les lois de l'électromagnétisme sous la forme de quatre équations suivantes:

$$div \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{4.1}$$

$$div \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{4.2}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{4.3}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{4.4}$$

Les équations (4.1), (4.3), (4.4) représentent respectivement la loi de Gauss, la loi de Maxwell-Ampère et la loi de Lenz-Faraday.

- $\overrightarrow{D}$ est le vecteur déplacement électrique.
- $\overrightarrow{H}$ est le vecteur champ d'excitation.
- ρ est une densité de charge électrique.
- $\overrightarrow{j}$ est un courant de charge électrique.

Ces vecteurs sont reliés aux champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ par les équations suivantes:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E} \tag{4.5}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \tag{4.6}$$

Où ε est la permittivité diélectrique et μ la perméabilité magnétique du milieu. Dans le vide, les équations (4.5) et (4.6) deviennent

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_o \overrightarrow{E} \tag{4.7}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{H} \Longrightarrow \overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o} \tag{4.8}$$

Où ε_o et μ_o sont deux constantes données respectivement par: $\varepsilon_o = 8.854\,\mathrm{pF\,m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henry/meter.
En introduisant l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, les équations précédentes deviennent:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{4.9}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{4.10}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{4.11}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{4.12}$$

En remplaçant les équations (4.7) et (4.8) dans les équations (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12), on retrouve:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\epsilon_o \overrightarrow{E}) = \rho \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{4.13}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{4.14}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o}\right) = \overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\epsilon_o E}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{4.15}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{4.16}$$

La force de Lorentz qui agit sur une particule de charge q et animée d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ est donnée par

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \tag{4.17}$$

L'équation de conservation de la charge est donnée par,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4.18}$$

Ramarque:

– Les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge électrique sont valables en tout points du milieu et à tout instants. Elles sont, donc, des équations locales.

4.1.2 Potentiels vecteur et scalaire

Les champs magnétique $\overrightarrow{B}$ et électrique $\overrightarrow{E}$ dérivent des potentiels de Lorentz $\overrightarrow{A}$ et ϕ, où

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{4.19}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} \tag{4.20}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrites en fonction de $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{4.21}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \tag{4.22}$$

Ramarque:
Dans le vide, les potentiels vecteurs $\overrightarrow{A}$ et scalaire ϕ vérifient l'équation suivante:

$$div\,\overrightarrow{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{4.23}$$

Cette équation est appelée "Jauge de Lorentz". Cette équation peut être écrite en fonction de $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{4.24}$$

On a,

$$\mu_o \epsilon_o c^2 = 1 \Longrightarrow c = 1/\sqrt{\mu_o \epsilon_o} \tag{4.25}$$

En utilisant les équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz, on obtient:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} = 0 \tag{4.26}$$

$$\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial^2 t} = 0 \tag{4.27}$$

La résolution des ces deux équations permet d'avoir les valeurs des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$.

4.2 Analyse vectorielle dans l'espace de Minkowski

On introduit dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski, l'opérateur "quadi-nabla", qu'on définit de la façon suivante:

$$\overrightarrow{\partial} = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.28}$$

de composantes,

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.29}$$

4.2.1 Quadri-divergence et quadri-gradient

Soit le quadri-vecteur $\overrightarrow{A}$, de composantes:

$$\overrightarrow{A} = (a_x, a_y, a_z, a_4) = (\overrightarrow{a}, a_4) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{4.30}$$

La métrique de l'espace de Minkowski est donnée par $(+,+,+,-)$. Donc, le produit scalaire de deux quadri-vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_4 \end{pmatrix} = +a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - a_4 b_4 \tag{4.31}$$

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur $\overrightarrow{V}$ est donnée par

$$\overrightarrow{\partial} \cdot \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_4 \end{pmatrix} = +\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t} \tag{4.32}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme,

$$\overrightarrow{\partial} \cdot \overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot (\overrightarrow{v}, v_4) = \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{v}, -\frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t}\right) \tag{4.33}$$

De la même façon on définit le quadri-gradient d'une fonction scalaire ϕ par,

$$\overrightarrow{\partial}\phi = \left(\overrightarrow{\partial}\phi, -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \tag{4.34}$$

4.2.2 Quadri-vecteur densité de courant

L'équation (4.18) exprime le principe de conservation de la charge. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) = 0 \tag{4.35}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} - \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)(c\rho) = 0 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{j}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)\right) = 0 \tag{4.36}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{J} = 0 \tag{4.37}$$

L'équation (4.37) représente l'écriture de l'équation de conservation de la charge dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur courant est donné par,

$$\overrightarrow{J} = \left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) \tag{4.38}$$

4.2.3 Quadri-vecteur potentiel

La jauge de Lorentz donnée dans l'équation (4.24) peut être réécrite comme suit,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{4.39}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{A}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{4.40}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = 0 \tag{4.41}$$

L'équation (4.41) représente l'écriture de la jauge de Lorentz dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur potentiel est donné par,

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) \tag{4.42}$$

4.2.4 Tenseur champ électromagnétique

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont donnés en fonction des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$ par les deux équations (4.21) et (4.22).
L'écriture de l'équation (4.21) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \Longrightarrow \tag{4.43}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{4.44}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{4.45}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{4.46}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrite sous la forme suivante:

$$E_x = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{4.47}$$

$$E_y = -c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{4.48}$$

$$E_z = -c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{4.49}$$

Maintenant, en prenant c en facteur, on retrouve:

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{4.50}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{4.51}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{4.52}$$

L'écriture de l'équation (4.22) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \Longrightarrow \tag{4.53}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{4.54}$$

$$B_y = -\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] \Longrightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{4.55}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{4.56}$$

4.2.5 Changement de variable

Un point de l'espace de Minkowski est représenté par le quadri-vecteur position

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -ct \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Faisons les changement des variables suivant:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \\ -ct = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} = \partial_4 \end{cases} \tag{4.58}$$

$$\begin{cases} A_x = A_1 \\ A_y = A_2 \\ A_z = A_3 \\ \frac{\phi}{c} = A_4 \end{cases} \tag{4.59}$$

Les équations (4.50), (4.51), (4.52), (4.54), (4.55) et (4.56) deviennent,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 \tag{4.60}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 \tag{4.61}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 \tag{4.62}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \tag{4.63}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \tag{4.64}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \tag{4.65}$$

Ces six équations peuvent être écrite sous la forme générale suivante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{4.66}$$

Où les coefficients $F_{\mu\nu}$ sont les éléments de matrice d'un tenseur de l'espace de Minkowski, appelé "Tenseur champ électromagnétique" et donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

Le tenseur est antisymétrique $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ et $F^{\mu\mu} = 0$. Donc, les éléments de matrice du tenseur champ électromagnétique sont donnés par,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 = F_{41} = -F_{14} \tag{4.68}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 = F_{42} = -F_{24} \tag{4.69}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 = F_{43} = -F_{34} \tag{4.70}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23} = -F_{32} \tag{4.71}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = F_{31} = -F_{13} \tag{4.72}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = F_{12} = -F_{21} \tag{4.73}$$

Finalement, le tenseur champ électromagnétique est donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

4.3 Exercices d'application

<u>Exercice</u> 5 :

Les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{B_1}$, mesurés par un observateur **O** lié à un repère Galilléen **R**, sont donnés en fonction des potentiels scalaire et vecteur $\phi_1, \overrightarrow{A_1}$ par les équations

$$\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\phi_1 - \frac{\partial \overrightarrow{A_1}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{A_1}$$

1. Donner l'expression des composantes des champs $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{B_1}$ dans le repère **R**.
2. Retrouver les composantes du tenseur électromagnétique.
3. Quelle sont les nouvelles valeurs des champs $\overrightarrow{E_1}'$ et $\overrightarrow{B_1}'$, mesurées par un observateur $\mathbf{O}'$ lié à un repère Galilléen $\mathbf{R}'$ en déplacement à une vitesse constante $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ par rapport à **R** ?

<u>Exercice</u> 6 :

– Trouver le courant de probabilité de l'équation de Schrodinger $\overrightarrow{j}$ qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{j} = 0$$

<u>On donne</u> : $\rho = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$

Symétrie et invariance

5.1 Définition

Une loi physique est dite invariante, lorsque cette dernière reste inchangée dans un changement de coordonnées et de variables.

Exemple:

En mécanique classique:

- Les coordonnées sont représentées par: $\overrightarrow{r}$, t, $\cdots$
- Les variables sont représentées par: $\overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{p}(t)$, $\cdots$

En mécanique quantique:

- Les coordonnées sont représentées par: $\left(\overrightarrow{r}, t\right)$, $\cdots$
- Les variables sont représentées par: $\psi\left(\overrightarrow{r}, t\right)$, $\psi\left(t\right)$, $\cdots$

En mécanique analytique:

- Les coordonnées sont représentées par: $q\left(t\right)$, $p\left(t\right)$ $\cdots$
- Les variables sont représentées par: $\dot{q}\left(t\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}\left(t\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\cdots$

5.2 Types de transformations

Il existent deux types de transformations:

5.2.1 Transformations géométriques

Les transformations géométriques qui existent sont:

- Déplacement dans l'espace.
- Déplacement dans le temps.
- Rotation.
- Renversement du temps T.
- Inversion de l'origine P.

5.2.2 Transformations internes

Une particule peut être soumises aux transformations internes suivantes:

- Inter-changer des particules identiques.
- Inter-changer des particules et des anti-particules. Cette transformation est souvent appelée "conjugaison de charge", qu'on note C.

Remarque:

Les trois transformations C, P, T sont des transformations discrètes.

5.2.3 Transformations géométriques internes

Pour ce type de transformation, on peut cité la transformation de Galilée, donnée par

$$\begin{cases} \overrightarrow{r} \rightarrow \overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v}t \\ t \rightarrow t' = t \end{cases} \tag{5.1}$$

5.3 Symétries et lois de conservation

Dans cette section, on supposera que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de (x_μ). On supposera aussi que les équations de mouvement (donc de l'action) restent inchangées lors d'une transformation (continue) infinitésimale définit par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.2}$$

Avec,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow \text{position spatio-temporelle (coordonnées)} \\ \delta x_\mu \longrightarrow \text{variation infinitisimale (deplacement l'espace et dans le temps)} \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \text{champ scalaire (variable)} \\ \delta\phi(x_\mu) \longrightarrow \text{variation de phase (dûe à une rotation)} \end{cases}$$

5.3.1 Exemple de transformation

Transformation spatio-temporelle

Une transformation spatio-temporelle est définit par

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu \ , \quad (a_\mu = \delta x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) \ , \quad (\delta\phi(x_\mu) = 0) \end{cases} \tag{5.3}$$

Avec a_μ représente le quadri-vecteur déplacement dans l'espace-temps.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.3),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{5.4}$$

donc,

$$\phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{5.5}$$

Transformation de phase globale $(\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu \ , \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.6}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.6),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.7}$$

donc,

$$\phi'^*(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi^*(x_\mu) \tag{5.8}$$

Transformation de phase locale $(\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu \ , \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.9}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (5.9),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.10}$$

donc,

$$\phi'^*(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{5.11}$$

5.3.2 Théorème de Noether

Énoncé

Pour toute transformation continue de l'action S, il existe un courant J_μ vérifiant l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{5.12}$$

Ceci implique qu'il existe une charge qui se conserve, définit par

$$Q = \int \rho \, d^3x \tag{5.13}$$

Démonstration

On dit que les équations de mouvement sont invariantes si l'action S est stationnaire

$$\delta S = S' - S \simeq 0 \tag{5.14}$$

On a

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \Rightarrow S' = \int d^4x' \, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') \tag{5.15}$$

Avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ (la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de x_μ).
Considérons des transformations infinitésimales de la forme,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{5.16}$$

où

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) \tag{5.17}$$

Avec $\delta\phi(x_\mu)$ représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ (variable) et la transformation de la coordonnées (x_μ).
Donc, la variation en un point fixe de l'espace à 4-dimensions est donnée par

$$\delta_o\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \ , \quad \text{pour } x' = x \tag{5.18}$$

Le lien entre les dérivées d'espace-temps est donné par

$$d^4x' = [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)]d^4x \tag{5.19}$$

Cherchons maintenant la relation entre la variation champ en deux points différents $\delta\phi$ et la variation du champ en un point fixe $\delta_o\phi$.
La variation du champ en deux point différents est donnée par

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) \tag{5.20}$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu - \phi'(x) + \delta_o\phi(x) \tag{5.21}$$

Avec

$$\phi'(x') = \phi'(x_\mu + \delta x_\mu) = \phi'(x_\mu) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu = \phi'(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{5.22}$$

Donc,

$$\delta\phi(x) = \delta_o\phi(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{5.23}$$

Calculons le terme $\partial'_\mu\phi'$
On a

$$\partial'_\mu\phi'(x') = \partial'_\mu(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) \tag{5.24}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{5.25}$$

On a aussi

$$x'_\nu = x_\nu + \delta x_\nu \Rightarrow x_\nu = x'_\nu - \delta x_\nu \tag{5.26}$$

Donc,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\delta x_\nu) \tag{5.27}$$

Finalement on trouve que,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.28}$$

En remplaçant l'équation (5.28) dans l'équation (5.24), on trouve

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{5.29}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta\phi)\right)(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{5.30}$$

$$= (\partial_\nu\phi + \partial_\nu(\delta\phi))(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{5.31}$$

$$= (\partial_\nu\phi)\delta_{\mu\nu} - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\nu(\delta\phi)\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.32}$$

$$\partial'_\mu\phi'(x') = (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi) \tag{5.33}$$

On néglige le terme $\partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)$, car c'est un terme d'ordre supérieur.
La densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $x_\mu \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$
Donc

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi)) \tag{5.34}$$

$$= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}[\partial_\mu(\delta\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)] \tag{5.35}$$

Donc, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.36}$$

En remplaçant l'équation (5.19) dans l'équation (5.14), on trouve

$$\delta S = \int d^4x'\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \simeq 0 \tag{5.37}$$

$$= \int [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)] d^4x\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \simeq 0 \tag{5.38}$$

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L}] d^4x \simeq 0 \tag{5.39}$$

Calculons le terme: $\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.40}$$

D'après les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) \tag{5.41}$$

On a aussi

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi)$$

Donc,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi \tag{5.42}$$

En remplaçant les équations (5.41) et (5.42) dans l'équation (5.40), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{5.43}$$

On a

$$\delta\phi = \delta_o\phi + (\partial_\nu \phi)\delta x_\nu$$

Donc

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\delta_o\phi + (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu))\right)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta_o\phi\right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)\right) \tag{5.44}$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \left((\partial_\nu \phi) \right) (\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{5.45}$$

Donc,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{5.46}$$

En remplaçant l'équation (5.46) dans l'équation (5.43), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu)$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

Donc,

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \partial x_\nu} \delta x_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta x_\nu = \partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu \tag{5.47}$$

La variation de l'action dans l'équation (5.39) devient,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x_\mu + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L} \right] d^4x \simeq 0$$

On a

$$\partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x_\mu + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L}\, \delta x_\mu)$$

Alors,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu(\mathcal{L}\, \delta x_\mu) \right] d^4x \simeq 0$$

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \mathcal{L}\, \delta x_\mu \right] d^4x \simeq 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L}\, \delta x_\mu \right] = 0$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

Avec,

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L}\, \delta x_\mu \longrightarrow \text{Courant de Noether}$$

Exercice 7 :

1. Montrer que la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre est invariante dans la transformation de phase globale suivante,

$$\begin{cases} \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x) \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\theta}\phi^*(x) \end{cases}$$

   où θ est un réel indépendants de x_μ.

2. Quels sont les courant et charge qui se conservent?

Exercice 8 :

La dynamique d'un système composé d'un champ scalaire réel ϕ_1 et de deux champs scalaires complexes ϕ_2 et ϕ_3 est décrite par la densité lagrangienne,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi_1^2 - (\partial_\mu \phi_2^*)(\partial_\mu \phi_2) - m_2^2 \phi_2^* \phi_2 - (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi_3^*(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi_3 - m_3^2 \phi_3^* \phi_3$$

où m_1, m_2 et m_3 sont des constantes.

1. Retrouvez les équations de mouvement?
2. Sachant que la densité lagrangienne est invariante dans les deux transformations de phases globales suivantes,

$$\begin{cases} \phi_1(x) \longrightarrow \phi_1'(x) = e^{-i\alpha_1}\phi_1(x) \\ \phi_1^*(x) \longrightarrow \phi_1'^*(x) = e^{i\alpha_1}\phi_1^*(x) \end{cases}, \begin{cases} \phi_2(x) \longrightarrow \phi_2'(x) = e^{+i\alpha_2}\phi_2(x) \\ \phi_2^*(x) \longrightarrow \phi_2'^*(x) = e^{-i\alpha_2}\phi_2^*(x) \end{cases}$$

   où α_1 et α_2 sont des réels indépendants de x.
   Quelles sont les courants et charges qui se conservent dans ces transformations ?

<u>**Solution 9**</u>:

1^o/ La dynamique d'un système est décrite par la densité lagrangienne,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - \left(\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial_\mu\phi_2^*\right) - m_2^2\phi_2\phi_2^* - \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi_3^*\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi_3 - m^2\phi_3\phi_3^*$$

Cette densité lagrangienne peut être écrite sous la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$$

<u>a°/</u>: Le champ scalaire réel est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_1(\phi_1, \partial_\mu\phi_1, x_\mu) = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2$$

<u>Équations du mouvement</u>: Remplaçons dans les équations d'Euler-Lagrange, avec $\phi_i = \phi_1 = \phi_1^*$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\phi_1} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi_1)}\right) = 0$$

Avec $\dfrac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\phi_1} = -m_1^2\phi_1$, $\quad \dfrac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi_1)} = -\partial_\mu\phi_1$.
En remplaçant on retrouve l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial_\mu\partial_\mu - m_1^2\right)\phi_1(x_\mu) = 0$$

<u>b°/</u>: Le champ scalaire complexe est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_2(\phi_2, \partial_\mu\phi_2, \phi_2^*, \partial_\mu\phi_2^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial_\mu\phi_2^*\right) - m_2^2\phi_2\phi_2^*$$

<u>Équations du mouvement</u>: Remplaçons dans les deux équations d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_2, \phi_2^*$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2^*)} \right) = 0$$

Avec $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2^*} = -m_2^2 \phi_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2^*)} = -\partial_\mu \phi_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi_2} = -m_2^2 \phi_2^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} = -\partial_\mu \phi_2^*.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m_2^2\right) \phi_2(x_\mu) = 0 \ \ , \ \left(\partial_\mu \partial_\mu - m_2^2\right) \phi_2^*(x_\mu) = 0$$

<u>c°/</u>: Le champ scalaire complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur est donné par la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_3(\phi_3, \partial_\mu \phi_3, \phi_3^*, \partial_\mu \phi_3^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

<u>Équations du mouvement du champ ϕ_3</u>:Remplaçons dans l'équation d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_3^*$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3^*)} \right) = 0$$

On a

$$\mathcal{L}_3 = -\left(\partial_\mu \phi_3^*\right) \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 - iqA_\mu \phi_3^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

Avec $\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3^*} = -iqA_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 - m_3^2 \phi_3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3^*)} = -\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$-iqA_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 - m_3^2 \phi_3 + \partial_\mu \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi_3 = 0$$

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m_3^2\right] \phi_3(x_\mu) = 0$$

<u>Équations du mouvement du champ ϕ_3^*</u>:Remplaçons dans l'équation d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi_3$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3)} \right) = 0$$

$$\mathcal{L}_3 = -\left(\partial_\mu \phi_3\right) \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* + iqA_\mu \phi_3 \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* - m^2 \phi_3 \phi_3^*$$

Avec $\dfrac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \phi_3} = iqA_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* - m_3^2 \phi_3^*, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu \phi_3)} = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^*.$
En remplaçant dans l'équation (5.3.2), on retrouve les deux équations suivantes,

$$iqA_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* - m_3^2 \phi_3^* + \partial_\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi_3^* = 0$$

$$\left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m_3^2\right] \phi_3^*(x_\mu) = 0$$

2^o/ Retrouver les courants et charges associés aux deux transformations de phases globales:
D'après le Théorème de Noether,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta_o \phi_i\right) + \mathcal{L}\, \delta x_\mu\right] d^4x \simeq 0$$

<u>a°/</u> Courant et charge associés au champ scalaire réel dans la transformation:

$$\begin{cases} \phi_1(x) \longrightarrow \phi_1^{'}(x) = e^{-i\alpha_1} \phi_1(x) \\ \phi_1^*(x) \longrightarrow \phi_1^{'*}(x) = e^{i\alpha_1} \phi_1^*(x) \end{cases}$$

α_1 est un réel indépendant de x.
En appliquant le théorème de Noether:

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta_o \phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1^*)} \delta_o \phi_1^*\right) d^4x \simeq 0$$

Avec,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1^*)} = 0, \;\; \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} = -\partial_\mu \phi_1$$

$$\delta_o \phi_1 = \phi_1^{'} - \phi_1 = e^{-i\alpha_1} \phi_1 - \phi_1 = (e^{-i\alpha_1} - 1)\phi_1 = (1 - i\alpha_1 - 1)\phi_1 = -i\alpha_1 \phi_1 \;\; \text{pour} \;\; \alpha_1 << 1$$

Donc,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1\right) \alpha_1 d^4x \simeq 0$$

$$\alpha_1 << 1 \Rightarrow \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1\right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu J_\mu^1 = 0$$

Donc le courant du champ scalaire réel libre est donné par,

$$J_\mu^1 = -i(\partial_\mu \phi_1)\phi_1 = (j_i, \rho_1), \;\; \text{avec} \;\; \rho_1 = \frac{j_t}{i} = (-\partial_t \phi_1)\phi_1$$

La charge Q_1 associée à cette transformation est donnée par,

$$Q_1 = \int d^3x\rho_1 = \int d^3x\,(-\partial_t\phi_1)\phi_1$$

<u>b°/</u> Courant et charge associés au champ scalaire complexe dans la transformation:

$$\begin{cases} \phi_2(x) \longrightarrow \phi_2^{'}(x) = e^{+i\alpha_2}\phi_2(x) \\ \phi_2^*(x) \longrightarrow \phi_2^{'*}(x) = e^{-i\alpha_2}\phi_2^*(x) \end{cases}$$

α_2 est un réel indépendant de x.
En appliquant le théorème de Noether:

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2)}\delta_o\phi_2 \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2^*)}\delta_o\phi_2^* \right) \right] d^4x \simeq 0$$

Avec,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2)} = -\partial_\mu\phi_2^*,\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu\phi_2^*)} = -\partial_\mu\phi_2$$

$$\delta_o\phi_2 = \phi_2^{'} - \phi_2 = e^{i\alpha_2}\phi_2 - \phi_2 = (e^{i\alpha_2} - 1)\phi_2 = (1 + i\alpha_2 - 1)\phi_2 = i\alpha_2\phi_2 \ \text{ pour } \ \alpha_2 << 1$$

$$\delta_o\phi_2^* = \phi_2^{*'} - \phi_2^* = e^{-i\alpha_2}\phi_2^* - \phi_2^* = (e^{-i\alpha_2} - 1)\phi_2^* = (1 - i\alpha_2 - 1)\phi_2^* = -i\alpha_2\phi_2^* \ \text{ pour } \ \alpha_2 << 1$$

Donc,

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* \right) \alpha_2 d^4x \simeq 0$$

$$\alpha_2 << 1 \Rightarrow \partial_\mu \left(-i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* \right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu J_\mu^2 = 0$$

Donc le courant du champ scalaire réel libre est donné par,

$$J_\mu^2 = -i(\partial_\mu\phi_2^*)\phi_2 + i(\partial_\mu\phi_2)\phi_2^* = (j_i, \rho_2), \ \text{ avec } \ \rho_2 = \frac{j_t}{i} = -(\partial_t\phi_2^*)\phi_2 + (\partial_t\phi_2)\phi_2^*$$

La charge Q_1 associée à cette transformation est donnée par,

$$Q_2 = \int d^3x\rho_2 = \int d^3x\,((\partial_t\phi_2)\phi_2^* - (\partial_t\phi_2^*)\phi_2)$$

5.4 Tenseur Énergie-Impulsion du champ scalaire

Étant donner que densité lagrangienne $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du quadri-vecteur position x_μ, sa dérivée par rapport à x_μ est donnée par

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \text{où} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{5.48}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \tag{5.49}$$

On a,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial x_\mu} \tag{5.50}$$

Or, d'après l'équation d'Euler-Lagrange on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \quad \text{pour} \qquad \mu = \nu \tag{5.51}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) \tag{5.52}$$

On pose,

$$\partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) = \partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) \tag{5.53}$$

On trouve,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi\right) \tag{5.54}$$

Le terme $\partial_\mu \mathcal{L}$ peut être écrit aussi sous la forme:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} = \left(\partial_\nu \mathcal{L}\right) \delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu}\right) \tag{5.55}$$

Finalement, en comparant les équation (5.54) et (5.55), on trouve

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu}\right) \tag{5.56}$$

Donc,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{5.57}$$

Maintenant, si on remplace ν par μ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{5.58}$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante,

$$\partial_{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0 \;\text{ avec } T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \tag{5.59}$$

Où $T_{\mu\nu}$ représente le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire.

5.5 Exercices d'application

Exercice 9 :

On définit dans l'espace des positions $\{|\overrightarrow{r}\rangle\}$ la transformation géométrique inversion de l'origine par:

$$\Pi\,|\overrightarrow{r}\rangle = |-\overrightarrow{r}\rangle\,,$$

Π représente l'opérateur parité.

1. Calculer $\Pi\,|\overrightarrow{p}\rangle$
2. Calculer $\Pi\,|\psi(t)\rangle$
3. On définit le transformé $\overrightarrow{A}'$ d'un opérateur $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{A}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{A}\,\Pi^{-1}$. Calculer les transformés des opérateurs position, impulsion et moment cinétique donnés respectivement par $\overrightarrow{R}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{R}\,\Pi^{-1}$, $\overrightarrow{P}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{P}\,\Pi^{-1}$ et $\overrightarrow{L}' \equiv \Pi\,\overrightarrow{L}\,\Pi^{-1}$

Équation de Klein-Gordon

6.1 Introduction

De par sa construction qui considère le temps comme découplé des variables d'espace, la mécanique quantique n'est pas compatible avec les principes de relativité restreinte. Expérimentalement, on observe aussi que, la mécanique quantique n'est précise que lorsque les phénomènes observés ne mettent en jeu que des particules à faible vitesse. Elle n'est par exemple pas un bon modèle pour décrire toutes les expériences où il y a interaction entre la lumière et la matière.
Nous présentons dans ce chapitre les premières tentatives pour modifier la mécanique quantique afin de la rendre relativiste. Nous allons d'abord chercher à trouver une équation relativiste. En d'autres termes, nous commençons à travailler avec une particule de spin nul. Dans ce cadre, pour bâtir une théorie relativiste, il est naturel de travailler dans l'espace de la relativité restreinte de Minkowski.
Afin de décrire des particules quantiques de spin nul et ayant des vitesses relativistes, on introduit l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière est l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger donnée par,

$$H\psi = E\psi \tag{6.1}$$

En utilisant le principe d'équivalence, sa forme devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\overrightarrow{P}^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \qquad \overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{6.2}$$

On sait que dans le cas des ondes planes, les fonctions $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ qui sont solutions de l'équation de Schrodinger sont données par

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = e^{i(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{\hbar} - \frac{E\cdot t}{\hbar})} \tag{6.3}$$

On va essayer dans ce qui suit de trouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon, nous permettant de décrire le mouvement de particules libres, de spin nul et ayant des vitesse relativistes, en démarrant de l'équation de Schrodinger.

6.2 Quadri-vecteurs en théorie des champs

Rappelons que l'énergie relativiste d'une particule libre est donnée par

$$E = \sqrt{\overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{6.4}$$

- $\overrightarrow{p}$: impulsion
- c : vitesse de la lumière
- m : masse de la particule

Le quadri-vecteur énergie-impulsion $\overrightarrow{P}$ est définit par,

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \left(\overrightarrow{p}, \frac{E}{c}\right) \tag{6.5}$$

En théorie des champs, on utilise la convention d'Einstein. Si $\overrightarrow{A}$ est un quadri-vecteur, on le note A_μ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$. Le quadri-vecteur A_μ a les composantes suivantes:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Si on calcule le produit scalaire de deux quadri-vecteurs A_μ et B_ν, on trouve

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ib_4 \end{pmatrix} = +a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \tag{6.7}$$

Ce produit scalaire vérifie la métrique de l'espace de Minkowski $(+, +, +, -)$.
Donc, en théorie des champs, le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$P_\mu = \left(\overrightarrow{p}, i\frac{E}{c}\right) \tag{6.8}$$

Rappelons aussi qu'en mécanique quantique, que E et $\overrightarrow{p}$ sont définit par:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{p} \to -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{6.9}$$

En remplaçant (6.9) dans (6.8), on trouve

$$P_\mu = \left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}, i\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = -i\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{6.10}$$

Si on pose,

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{6.11}$$

où ∂_μ représente le quadri-vecteur dérivée spatio-temporelle, on trouve

$$P_\mu = -i\hbar\partial_\mu \tag{6.12}$$

6.3 Équation de Klein-Gordon libre

Trouvons maintenant l'équation de Klein-Gordon libre décrivant le mouvement (déplacement) d'une particule quantique, de spin nul et de vitesse relativiste.
En mécanique quantique, une particule libre est décrite par l'équation d'évolution de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = E\phi(\overrightarrow{r}, t) \quad \text{où} \quad E = H = E_c + V = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec} \quad v << c \tag{6.13}$$

Pour une particule relativiste libre

$$E_R = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{6.14}$$

La dynamique de ces particules relativistes sera décrite par l'équation suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = E_R \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.15}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4}\right)^2 \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.16}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) \tag{6.17}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{6.18}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{6.19}$$

$$\frac{-\hbar^2}{\hbar^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) + \frac{\hbar^2\overrightarrow{\nabla}^2c^2}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) - \frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{6.20}$$

Si on pose $\overrightarrow{\nabla}^2 = \Delta$, on retrouve l'équation suivante

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{6.21}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace réel. Cherchons la forme de cette équation dans l'espace de Minkowski.
On a

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Longrightarrow \partial_\mu^2 = \partial_\mu \cdot \partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{6.22}$$

$$\partial_\mu^2 = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right) = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} \tag{6.23}$$

En remplaçant (6.23) dans (6.21), on trouve

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{6.24}$$

Si on pose $\hbar = c = 1$ et $(\overrightarrow{r},t) = x_\mu$ où x_μ représente un point de l'espace de Minkowski et $\mu = 1,2,3,4$, l'équation (6.24) devient

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \tag{6.25}$$

Cette équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace de Minkowski.

6.4 Invariance de l'équation de Klein-Gordon libre par transformation de jauge

Exercice 10 :

Le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon libre suivante

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \quad \text{sont deux réels arbitraires.}$$

6.5 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

L'équation de Klein-Gordon libre est donnée par

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{6.26}$$

Cette équation admet une solution en états stationnaires. Sa forme générale est donnée par,

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) \tag{6.27}$$

On dit qu'une solution en états stationnaires est une solution à variables séparables. Remplaçons (6.27) dans (6.26), on trouve

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.28}$$

$$f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.29}$$

Si on divise toute l'équation sur $f(t)\psi(\overrightarrow{r})$, on trouve

$$\frac{f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.30}$$

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0 \tag{6.31}$$

Cette équation est une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f^{''}(t)}{f(t)} = \text{constante}, \quad \text{avec} \quad f^{''} = \frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) \tag{6.32}$$

Si on pose *constante* $= \omega^2$, on retrouve

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f^{''}(t)}{f(t)} = \omega^2 \tag{6.33}$$

A partir de cette équation on obtient les deux équations suivantes:

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} = \omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.34}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{f^{''}(t)}{f(t)} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{f^{''}(t)}{f(t)} = c^2\omega^2 \Longrightarrow f^{''}(t) = c^2\omega^2 f(t) \Longrightarrow f^{''}(t) - c^2\omega^2 f(t) = 0 \tag{6.35}$$

L'équation (6.35) peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$f^{''}(t) \pm (c\omega)^2 f(t) = 0 \tag{6.36}$$

L'équation (6.35) admet alors des solutions de la forme

$$f(t) = A\, e^{c\omega t} + B\, e^{-c\omega t} \tag{6.37}$$

Pour avoir des solutions continues partout, on pose

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar}, \quad E \text{ est un réel.} \tag{6.38}$$

On remplaçant (6.37) dans (6.38), on trouve

$$f(t) = A\, e^{\frac{i\,E}{\hbar}t} + B\, e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t} \tag{6.39}$$

On a

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar} \Longrightarrow c^2\,\omega^2 = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \omega^2 = -\frac{E^2}{c^2\hbar^2} \tag{6.40}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (6.34)

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{6.41}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-E^2 + m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.42}$$

Or,

$$E^2 = \overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4 \Longrightarrow -\overrightarrow{p}^2c^2 = -E^2 + m^2c^4 \tag{6.43}$$

En remplaçons dans l'équation précédente, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{6.44}$$

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{i\overrightarrow{p}}{\hbar}\right)^2\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{6.45}$$

Cette équation admet des solutions de la forme suivante

$$\psi(\overrightarrow{r}) = C\, e^{\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\, e^{-\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} \tag{6.46}$$

6.6 Interprétation physique des solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour donner un sens physique aux solutions, on pose

- $e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$
- $e^{\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- A représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- B représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$.

Donc, la solution physique est donnée par

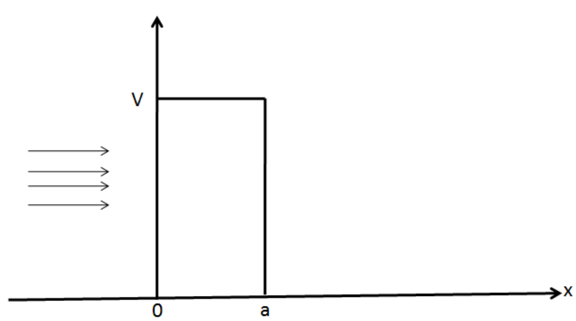
$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{6.47}$$

Où la probabilité B pour que la particule est créée dans le passé et elle voyage vers le futur est égale à 1. Donc la probabilité A pour que la particule est créée dans le futur et elle voyage vers le passé est égale à 0. La solution Finale est donnée par

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\overrightarrow{r}) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \left(C e^{\frac{i \overrightarrow{p} \overrightarrow{r}}{\hbar}} + D e^{-\frac{i \overrightarrow{p} \overrightarrow{r}}{\hbar}} \right) \tag{6.48}$$

<u>Exercice</u> 11 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(+\infty)$ vers $(-\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a. Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,



1. Calculer les coefficients de transmission T et de réflexion R.
2. Calculer la densité de courant J_x dans chaque région.

<u>Indication</u>: travailler à une dimension.

6.7 Équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Cette équation permet de décrire une particule de charge q interagissant avec le champ électromagnétique extérieur, représenté par le quadri-vecteur potentiel $A_\mu = \left(\overrightarrow{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$.
Afin d'avoir l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur, on utilise la méthode du couplage minimale, qui consiste à remplacer l'impulsion et l'énergie $(\overrightarrow{p}, E)$ par

$$E \rightarrow E - q\phi \qquad\qquad \overrightarrow{p} \rightarrow \overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A} \tag{6.49}$$

dans l'équation de Klein-Gordon libre. La transformation donnée dans l'équation (6.49) peut être réécrite en utilisant les quadri-vecteurs. Sa forme est donnée par:

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - qA_\mu \tag{6.50}$$

<u>Exercice</u> 12 :

- Montrer que les deux transformations données dans les deux équation (6.49) et (6.50) sont équivalentes.

On a

$$P_\mu = -i\hbar\,\partial_\mu \Longrightarrow P_\mu = -i\,\partial_\mu \quad \text{pour } \hbar = 1 \tag{6.51}$$

La transformation (6.50) devient alors,

$$-i\,\partial_\mu \rightarrow -i\,\partial_\mu - qA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \cdot \partial_\mu \rightarrow \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \tag{6.52}$$

Si on remplace dans l'équation de Klein-Gordon libre

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{6.53}$$

Cette équation est appelée, équation de Klein-Gordon en présence d'un champs électromagnétique extérieur A_μ. Si on pose $D_\mu = \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)$, alors l'équation (6.53) s'écrit

$$\left[D_\mu D_\mu - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{6.54}$$

Le conjugué de cette dernière équation est donné par

$$\left[D_\mu^* D_\mu^* - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0 \Longrightarrow \left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0 \qquad (6.55)$$

6.8 Invariance de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur par transformation de jauge

Exercice 13 :

En présence d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, iV)$, le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon suivante

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right] \phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \text{sont deux réels arbitraires.} \end{cases}$$

6.9 Courant de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Exercice 14 :

L'équation de Klein-Gordon décrivant le mouvement d'une particule relativiste, de masse m, de charge q et en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, i\phi)$ est donnée

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right] \psi(x) = 0$$

Trouver l'expression du quadri-vecteur courant de Klein-Gordon J_μ qui est solution de l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

On donne : $(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*)(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*) = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)$

6.10 Exercices d'application

Exercice 15 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(-\infty)$ vers $(+\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a.
Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,

1. Retrouver la forme générale de la fonction d'onde à l'extérieur de la barrière de potentiel.
2. Calculer la densité de courant J_x à l'extérieur de la barrière de potentiel lorsque la fonction d'onde est donnée par
$$\phi(x) = e^{ipx}$$
3. Montrer que le coefficient de transmission T s'écrit comme
$$T = \frac{4pp'}{(p+p')\, e^{ia(p-p')} - (p-p')\, e^{ia(p+p')}}$$
lorsque l'impulsion p des particules à l'extérieur de la barrière de potentiel et différente de l'impulsion p' des particules à l'intérieur de la barrière de potentiel.
On donne: $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ et $p' = \sqrt{(E - qV)^2 - m^2}$ avec $c = \hbar = 1$. Indication: Travailler à une dimension

Exercice 16 :

1. Retrouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon libre à partir de de l'équation de Schrodinger.
2. Retrouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur en utilisant la méthode du couplage minimale.
3. Retrouver les solutions de l'équation de Klein-Gordon libre.

Exercice 17 :

L'équation de Klein-Gordon (<u>Adjointe</u>), en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, \frac{i\phi}{c})$, est donnée par

$$\left[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0$$

1. Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi^*(x)' = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi^*(x) \quad , \quad \alpha(x_\mu) \text{ est un réel arbitraire} \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 18 :

1. Retrouver l'expression du quadri-vecteur densité de courant à partir de de l'équation de continuité.
2. Retrouver l'expression du quadri-vecteur potentiel à partir de de l'équation de la jauge de Lorentz.

Équation de Dirac

7.1 Introduction

Nous allons maintenant essayer de construire une théorie relativiste des particules ayant des spin non nuls. Nous nous placerons, en premier lieu, dans une situation où le champ électromagnétique n'est pas pris en considération.
Pour obtenir un modèle satisfaisant, il faudra que le vecteur d'état ψ soit soumis à une équation généralisant celles de Schrödinger (qui ne tient pas compte des phénomènes relativistes) et de Klein-Gordon (qui ne tient pas compte du spin) et qui devra avoir deux propriétés principales:

1. elle devra être invariante sous l'action du groupe de Lorentz,
2. elle devra être d'ordre un en t et plus précisément de la forme

$$i\hbar\partial_t\psi = H_D\psi \tag{7.1}$$

   où H_D est un opérateur. La démonstration est la même que celle utilisée pour obtenir l'équation de Klein-Gordon.

7.2 Les insuffisances de l'équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon est insatisfaisante en raison de l'existence de solutions d'énergie négative. C'est ce, d'ailleurs, a conduit Dirac à postuler l'existence du "positron", particule analogue à l'électron mais chargée positivement.
Avant de regarder les conséquences physiques d'énergies négatives, il faut d'abord mettre au point la théorie. Faisons ce qui est habituel quand on regarde une équation aux dérivées ordinaires d'ordre deux qu'on voudrait ramener à premier ordre (en t seulement).
On définit le vecteur

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_t\psi \end{pmatrix}.$$

On est ramenés à l'équation d'ordre 1 suivante:

$$\partial_t \phi = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta + \frac{m^2}{\hbar^2} & 0 \end{pmatrix} \phi.$$

En fait, il sera plus commode de poser

$$\phi_1 = \psi + \frac{i\hbar}{m}\partial_t \psi \ \text{ et } \phi_2 = \psi - \frac{i\hbar}{m}\partial_t \psi \tag{7.2}$$

et de remarquer que la fonction d'onde définie par $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_t \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{m}\Delta & \frac{i\hbar}{m}\Delta + \frac{2im}{\hbar} \\ -\frac{i\hbar}{m}\Delta - \frac{2im}{\hbar} & -\frac{i\hbar}{m}\Delta \end{pmatrix} \Phi. \tag{7.3}$$

Si la vitesse de la particule est petite devant la vitesse de la lumière, nous pouvons négliger son énergie cinétique devant son énergie interne et donc l'énergie totale est égale à $E \simeq mc^2 = m^2$. Cette égalité se traduit en terme d'observables par $i\hbar\partial_t \psi = m\psi$ et donc pour des situations non-relativistes, $\phi_2 \simeq 0$. En prenant $\phi_2 = 0$ et en regardant la première coordonnée dans (7.3), on obtient

$$\partial_t \phi_1 = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \phi_1.$$

Autrement dit, on retrouve l'équation de Schrödinger non-relativiste.

7.3 Hamiltonien de Dirac

Afin d'éviter de travailler avec des particules ayant des énergies négatives, comme c'était le cas pour l'hamiltonien (l'énergie totale) à partir duquel on a pu avoir l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre, Paul Dirac proposa en 1928 d'écrire la forme générale de l'hamiltonien sous la forme suivante:

$$H_{Dirac} = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}c + \beta mc^2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i.p_i c + \beta mc^2 = \alpha_i.p_i c + \beta mc^2 \tag{7.4}$$

où les coefficients β et α_i sont des constantes qui ne commutent pas.

- Cherchons les valeurs de ces deux constantes.

En Calculant le carré de l'hamiltonien de Dirac H^2_{Dirac}, on retrouve l'expression suivante

$$H^2 = \left(\alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2\right)\left(\alpha_j.p_j c + \beta\, mc^2\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{7.5}$$

$$H^2 = p_i p_j \alpha_i \alpha_j c^2 + \beta^2 mc^2 c^4 + mc^3 p_i\left(\beta\alpha_j + \alpha_j\beta\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{7.6}$$

- On remarque par comparaison que

$$\beta^2 = 1 \Longrightarrow \beta\beta^{-1} = 1 \Longrightarrow \beta = \beta^{-1} \tag{7.7}$$

$$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0 \tag{7.8}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p^2 \tag{7.9}$$

Pour $i = j = 1, 2, 3$ on trouve:

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2 + p_1 p_2\left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1\right) + p_1 p_3\left(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1\right) + p_2 p_3\left(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2\right) \tag{7.10}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \tag{7.11}$$

Pour (7.10) soit égale à (7.11), il faut que

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 \tag{7.12}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0 \tag{7.13}$$

Donc, si on pose $\alpha_i^2 = 1$ où $i = 1, 2, 3$ alors

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \tag{7.14}$$

où $\{A, B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur des deux grandeurs A et B.
Finalement les constantes sans dimensions α_i et β vérifient les relation d'anti-commutation suivantes

$$\beta^2 = 1 \tag{7.15}$$

$$\{\beta, \alpha_i\} = 0 \tag{7.16}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \tag{7.17}$$

$$\alpha_i^2 = 1 \tag{7.18}$$

$$\tag{7.19}$$

Donc,

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1, \tag{7.20}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\alpha_1, \alpha_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{\beta, \alpha_1\} = \{\beta, \alpha_2\} = \{\beta, \alpha_3\} = 0, \tag{7.21}$$

7.4 Les propriétés des matrices de Dirac

Avant d'écrire l'équation de Dirac décrivant des particules de spin non nul, il est utile de déterminer l'ordre des matrices figurant dans l'expression de l'hamiltonien de Dirac. La détermination de l'ordre des matrices β et α_i va permettre de déduire le nombre de composantes du spineur décrivant l'état d'une telle particule, dans le cas relativiste. Pour ce faire:

1. On détermine les valeurs propres des matrices $\beta\,, \alpha_i : i = 1, 2, 3$.
   L'équation aux valeurs propres, relative à β (respectivement des α_i) s'écrit sous forme

   $$\beta\, \overrightarrow{X} = \lambda\, \overrightarrow{X}.$$

   Une deuxième application de β (respectivement des α_i) donne, en tenant compte de (**??**):

   $$\begin{array}{rcl} \beta^2\, \overrightarrow{X} = \lambda\, \beta\, \overrightarrow{X} & \Rightarrow & 1.\, \overrightarrow{X} = \lambda^2\, \overrightarrow{X} \\ \lambda^2 = 1 & \Rightarrow & \lambda = \pm 1. \end{array}$$

   Ainsi, les valeurs propres des matrices β et α_i sont $+1$ ou -1.

2. On montre ensuite que les traces $Tr(\beta) = Tr(\alpha_i) = 0$. Pour ce faire, on va utiliser, d'une part l'anticommutation des matrices en question, et d'autre part, les propriétés, bien connues

   $$\begin{array}{c} Tr(A\,B) = Tr(B\,A), \\ Tr(\lambda\, A) = \lambda\, Tr(A). \end{array} \tag{7.22}$$

   En effet,

   $$\begin{array}{rcl} Tr(\alpha_i) & = & Tr(1.\alpha_i) = Tr(\beta^2\,\alpha_i) = Tr\big[\beta(\beta\,\alpha_i)\big] = Tr\big[\beta(-\alpha_i\,\beta)\big] \\ & = & -Tr\big[\beta(\alpha_i\,\beta)\big] = -Tr\big[(\alpha_i\,\beta)\beta\big] = -Tr\big[\alpha_i\,\beta^2\big] \\ & = & -Tr(\alpha_i) \\ & \Rightarrow & \qquad Tr(\alpha_i) = 0. \end{array} \tag{7.23}$$

Une démonstration similaire peut se faire pour montrer que $Tr(\beta) = 0$.

3. On va exploiter, d'une part, le fait que les matrices hermitiennes M sont diagonalisables, c'est-à-dire il existe une matrice inversible S, telle que

$$S\,M\,S^{-1} = M_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_i & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M. D'autre part, l'égalité des traces des deux matrices M et M_D est également exploitée. En effet,

$$Tr(M) = Tr\big[S^{-1}(M_D S)\big] = Tr\big[(M_D S)S^{-1}\big] = Tr(M_D) \tag{7.25}$$

Comme les matrices β et α_i sont hermitiennes, alors il est possible d'utiliser les propriétés précédentes, qui s'écrivent dans le cas de β et α_i comme suit

$$\begin{aligned} Tr(\beta) = Tr(\alpha_i) = 0 \qquad & \Rightarrow \qquad Tr(\beta_D) = Tr\big[(\alpha_i)_D\big] = 0 \\ & \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \\ & \Rightarrow \qquad \underbrace{(1+1-1+..-1+1)}_{\text{n termes}} = 0. \end{aligned}$$

Pour avoir une somme nulle, il faut que les $+1$ et les -1 se compensent complètement, condition qui n'a lieu que si la dimension des matrices $\beta_D, (\alpha_i)_D$, ou encore (β et α_i), est paire, i.e. $n = 2p$.

Pour $n = 2$, une base des matrices complexes $M_{2\times 2}$ est l'ensemble des matrices de Pauli, en plus de l'identité $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 1\}$. Dans ce cas, il n'y a pas de solution, car confondre les α_i avec les σ_i, conduit à prendre nécessairement $\beta = 1$. Or β possède une trace différente de 1 ($Tr(1) = 2$), ce qui est absurde.

Pour $n = 4$, il existe des solutions. Celles-ci s'écrivent en représentation standard sous la forme

$$\overrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \\ \overrightarrow{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{7.26}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité (2×2) et $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{e_1}\ \sigma_1 + \overrightarrow{e_2}\ \sigma_2 + \overrightarrow{e_3}\ \sigma_3$. Les 3 matrices de Pauli sont définies par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

Finalement, on peut conclure que les matrices β et α_i, figurant dans l'hamiltonien de Dirac, sont d'ordre 4×4. Ainsi, la fonction d'onde, décrivant l'état d'une particule de spin non nul, est un spineur à 4 composantes. Ce spineur permet de décrire, aussi bien, la particule que l'antiparticule de spin non nul. En représentation standard, il est d'usage d'utiliser la notation condensée suivante

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

où φ et χ sont deux spineurs à deux composantes, décrivant respectivement la particule et l'antiparticule.

7.5 Représentation standard

L'écriture des matrices de Dirac dans la représentation standard est donnée par

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

où σ_k sont les matrices de Pauli (matrices 2×2), données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

et

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice unitaire}, \qquad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

<u>Exercice</u> 19 :

1. Donner la forme explicite des matrices de Dirac suivantes: γ^1, γ^2, γ^3 et γ^4.
2. Montrer que

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu)^1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.33}$$

<u>Solution 20</u>:

1^o/ Les quatre matrices de Dirac sont données par,

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

$2^o/a/$ Montrer que:

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu, \quad \text{où} \quad \text{si} \quad A = a_{ij} \quad \text{alors} \quad A^+ = a_{ji}^* \tag{7.38}$$

- Pour $\mu = 1$

$$\left(\gamma^1\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^1 \tag{7.39}$$

- Pour $\mu = 2$

$$\left(\gamma^2\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \tag{7.40}$$

- Pour $\mu = 3$

$$\left(\gamma^3\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^3 \tag{7.41}$$

- Pour $\mu = 4$

$$\left(\gamma^4\right)^+ = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma^4 \tag{7.42}$$

Donc, $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu$.

$2^o/b/$ Montrer que:

$$(\gamma^\mu)^2 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.43}$$

- Pour $\mu = 1$

$$\left(\gamma^1\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.44}$$

- Pour $\mu = 2$

$$\left(\gamma^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.45}$$

- Pour $\mu = 3$

$$\left(\gamma^3\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.46}$$

- Pour $\mu = 4$

$$\left(\gamma^4\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{7.47}$$

Donc $(\gamma^\mu)^2 = 1$.
$2^o/c/$ Montrer que:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.48}$$

- Pour $\mu = \nu = 1$

$$\{\gamma^1, \gamma^1\} = \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^1 = 2\left(\gamma^1\right)^2 = 2\delta_{11} = 2 \tag{7.49}$$

- Pour $\mu = 1, \nu = 2$

$$\{\gamma^1, \gamma^2\} = \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = 2\delta_{12} = 0 \tag{7.50}$$

Vérification:

$$\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

$$\gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

Donc,

$$\{\gamma^1, \gamma^2\} = \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

Donc,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \quad \text{lorsque} \quad \mu = \nu, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad \text{lorsque} \quad \mu \neq \nu \quad (7.54)$$

7.6 Équation de Dirac libre

On va essayer dans ce qui suit de retrouver l'équation de Dirac, à partir de l'équation d'évolution de Schrodinger,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{Shrodinger}\psi, \quad \text{avec} \qquad H_{Shrodinger} = -\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 \quad (7.55)$$

L'hamiltonien de Dirac étant donné par,

$$H_{Dirac} = \alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2 \quad (7.56)$$

et

$$\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} = -i\hbar\,\overrightarrow{\partial} = -i\,\hbar\,\partial_i \quad (7.57)$$

On a aussi

$$\partial_4 = \frac{-i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \Longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} = -c\,\partial_4 \quad (7.58)$$

En remplaçant dans (7.55), on obtient

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2\right)\psi \Longrightarrow -c\,\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i\,c + \beta\,mc^2\right)\psi \tag{7.59}$$

Si on devise les deux membres de l'équation (7.59) par c, on obtient

$$-\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + \beta\,m\,c\right)\psi \tag{7.60}$$

Maintenant, si on devise les deux membres de l'équation (7.60) par β, on obtient

$$-\beta\,\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\beta\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + m\,c\right)\psi\text{avec}\quad \beta = \beta^{-1} \tag{7.61}$$

$$\left(\partial_4\,\beta + \partial_i\left(-i\,\beta\,\alpha_i\right) + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{7.62}$$

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{7.63}$$

Avec

$$\gamma^4 \;=\; \beta \tag{7.64}$$

$$\gamma^i \;=\; -i\,\beta\,\alpha_i \tag{7.65}$$

Finalement, on trouve

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + m\right)\psi = 0 \quad \text{avec} \quad \hbar = c = 1 \tag{7.66}$$

En utilisant l'expression des deux quadr-vecteurs

$$\partial_\mu \;=\; \left(\partial_i, \partial_4\right) \tag{7.67}$$

$$\gamma^\mu \;=\; \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{7.68}$$

où

$$\left(\partial_i, \partial_4\right)\cdot\left(\gamma^i, \gamma^4\right) = \partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i \tag{7.69}$$

L'équation peut être réécrite comme suit

$$\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\psi = 0 \tag{7.70}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Dirac pour une particule libre.
Si on pose

$$\partial\!\!\!/ = \partial_\mu \, \gamma^\mu \tag{7.71}$$

On obtient

$$(\, \partial\!\!\!/ + m \,)\, \psi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \text{spineur de dirac} \tag{7.72}$$

Donc les matrices de Dirac possèdent les propriétés suivantes: pour $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu \tag{7.73}$$

$$(\gamma^\mu)^2 = 1 \tag{7.74}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{7.75}$$

7.7 Interprétation physique des énergies négatives

L'intérêt de travailler avec des vecteurs à composantes (spineurs) réside dans le fait que pour des fermions (électrons), deux composantes du spineurs de Dirac permettent de décrire les deux états ($\pm\frac{1}{2}$) du spin de la particule ayant une énergie ($\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$). Les deux autres composantes du spineur permettent de décrire l'état du spin de l'anti-particule ayant une énergie ($-\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$).
L'anti-particule traduit tout simplement l'absence de matière (trou).
Exemple: Si une particule passe d'un niveau d'énergie bas à un niveau d'énergie plus haut. Le vide laissé par la particule (trou) est interprété comme étant l'anti-particule d'énergie ($E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$), appelée aussi positron. Un positron possède en fait la même masse que l'électron et une charge positive ($+q$).

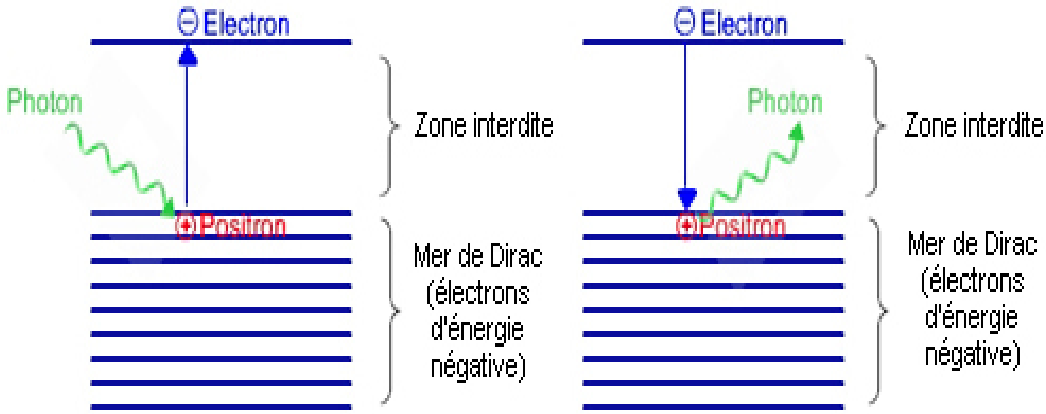


Figure 7.1: Schéma de la mer de Dirac.

Lorsque un électron revient à son état initial, il libère un photon d'énergie ($h\nu$)

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \tag{7.76}$$

Ce processus est appelé phénomène d'annihilation. Ce phénomène peut être rencontré dans les accélérateurs de particules, où des électrons et des positrons sont accélérés à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, puis on les fait rentrés en collision pour donner naissance à de nouvelles particules (pions, mésons, $\cdots$) ayant des durées de vies infiniment petite

7.8 Courant de l'équation de Dirac libre

Cherchons l'expression du courant associé à l'équation de Dirac, vérifiant l'équation de continuité donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu J_\mu = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{7.77}$$

On a aussi l'équation de Dirac est donnée par

$$(\not{\partial} + m)\, \psi(x) = 0 \Longrightarrow (\partial_\mu \gamma^\mu + m)\, \psi(x) = 0 \tag{7.78}$$

- Calculons le conjugué de l'équation de Dirac, on trouve

$$\left[\left(\partial_\mu \gamma^\mu + m\right) \psi(x)\right]^* = 0 \Longrightarrow \psi^+(x) \left(\partial^*_\mu \left(\gamma^\mu\right)^+ + m\right) = 0 \tag{7.79}$$

On a

$$\partial_\mu = (\partial_i, \partial_4) \Longrightarrow \partial^*_\mu = (\partial^*_i, \partial^*_4) \tag{7.80}$$

avec

$$\partial^*_i = \partial_i, \quad \partial^*_4 = -\partial_4 \tag{7.81}$$

Donc

$$\partial^*_\mu = (\partial_i, -\partial_4) \tag{7.82}$$

et

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \Longrightarrow \left(\gamma^\mu\right)^+ = \gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{7.83}$$

Alors,

$$\partial^*_\mu \left(\gamma^\mu\right)^+ = \partial_i \gamma^i - \partial_4 \gamma^4 \tag{7.84}$$

En remplaçant (7.84) dans (7.79) on trouve,

$$\psi^+(x) \left(\partial_i \gamma^i - \partial_4 \gamma^4 + m\right) = 0 \tag{7.85}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (7.85) par (γ^4), on trouve

$$\left[\psi^+(x) \left(\partial^*_\mu \left(\gamma^\mu\right)^+ + m\right) = 0\right] \times \gamma^4 \tag{7.86}$$

$$\psi^+(x) \left(\partial_i \gamma^i \gamma^4 - \partial_4 \gamma^4 \gamma^4 + m\, \gamma^4\right) = 0 \tag{7.87}$$

Or

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, \delta_{\mu\nu} \Longrightarrow \{\gamma^1, \gamma^4\} = \gamma^1\gamma^4 + \gamma^4\gamma^1 = 0 \Longrightarrow \gamma^1\gamma^4 = -\gamma^4\gamma^1 \tag{7.88}$$

Donc,

$$\psi^+ \left(-\gamma^4 \partial_i \gamma^i - \gamma^4 \partial_4 \gamma^4 + \gamma^4 m\right) = 0 \Longrightarrow \tag{7.89}$$

$$\psi^+ \gamma^4 \left(-\partial_i \gamma^i - \partial_4 \gamma^4 + m\right) = 0 \Longrightarrow \psi^+ \gamma^4 \left(-\partial_\mu \gamma^\mu + m\right) = 0 \tag{7.90}$$

Si on pose $\overline{\psi} = \psi^+ \gamma^4$, l'équation adjointe de l'équation de Dirac libre devient

$$\overline{\psi} \left(-\partial_\mu \gamma^\mu + m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi} \left(\partial_\mu \gamma^\mu - m\right) = 0 \tag{7.91}$$

qu'on peut écrire sous la forme finale suivante,

$$\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not\partial}-m\right)=0 \tag{7.92}$$

Maintenant en multipliant l'équation (7.78) par $\overline{\psi}$ et l'équation (7.92) par ψ on trouve

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu+m\right)\psi=0 \tag{7.93}$$

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu-m\right)\psi=0 \tag{7.94}$$

En calculant la somme des deux équations (7.93) (7.94) on trouve,

$$\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu+m\right)\psi+\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu-m\right)\psi=0\Longrightarrow \tag{7.95}$$

$$\overline{\psi}\,\overleftarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi+m\overline{\psi}\,\psi+\overline{\psi}\,\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi-m\overline{\psi}\psi=0\Longrightarrow \tag{7.96}$$

$$\partial_\mu\left(\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\right)=0\Longrightarrow\partial_\mu J_\mu^{Dirac}=0 \tag{7.97}$$

avec

$$J^{Dirac}=k\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi=i\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\quad avec\quad k=i \tag{7.98}$$

7.8.1 Vecteur impulsion- charge totale

Calculons les expressions des composantes du vecteur impulsion de j_4 et j_i

$$J_4=i\,\overline{\psi}\,\gamma^4\,\psi=i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^4\,\psi=i\,\psi^+\,\psi=\rho \tag{7.99}$$

$$J_i=i\,\overline{\psi}\,\gamma^i\,\psi=i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^i\,\psi \tag{7.100}$$

Or

$$\gamma^i=-i\,\beta\,\alpha_i,\quad \beta=\gamma^4\Longrightarrow\gamma^i=-i\,\gamma^4\,\alpha_i\Longrightarrow \tag{7.101}$$

$$\gamma^4\,\gamma^i=-i\,\gamma^4\,\gamma^4\,\alpha_i\Longrightarrow\alpha_i=i\,\gamma^4\,\gamma^i \tag{7.102}$$

Donc

$$J_i=\psi^+\,\alpha_i\,\psi\Longrightarrow\overrightarrow{J}=\psi^+\,\overrightarrow{\alpha}\,\psi \tag{7.103}$$

Finalement, la charge totale est donnée par

$$Q=\int d^3x\,\rho=i\int d^3x\,\psi^+\,\psi \tag{7.104}$$

7.9 Équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin de retrouver l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la méthode du couplage minimal

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \tag{7.105}$$

$$(\not\partial + m)\,\psi(x) = 0 \Longrightarrow \left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\right)\psi(x) = 0 \tag{7.106}$$

En remplaçant (7.105) dans (7.106) on trouve,

$$\left(\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\,\gamma^\mu + m\right)\psi(x) = 0 \Longrightarrow \left(\partial_\mu\,\gamma^\mu - iqA_\mu\,\gamma^\mu + m\right)\psi(x) = 0 \tag{7.107}$$

$$(\not\partial - iq\,\not A + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.108}$$

c'est l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ.

7.10 Lagrangien du champ spinoriel complexe

Il est possible de retrouver les équation de Dirac et l'équation Dirac adjointe en utilisant la formulation lagrangienne. Notre choix du lagrangien est le suivant

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu\overline{\psi}, x_\mu) = -\overline{\psi}\,(\not\partial + m)\,\psi \tag{7.109}$$

<u>Vérification</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe libre $(\psi, \overline{\psi})$. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{7.110}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation adjointe de Dirac,} \tag{7.111}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation de Dirac,} \tag{7.112}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -\partial_\mu \gamma^\mu - m\,\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{7.113}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \Longrightarrow -\left(\partial_\mu\, \gamma^\mu + m\,\right) \psi = 0 \Longrightarrow (\,\not{\partial} + m\,)\,\psi = 0 \tag{7.114}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\,\overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \tag{7.115}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \Longrightarrow -m\,\overline{\psi} + \overline{\psi}\gamma^\mu \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu - m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + m\right) = 0 \tag{7.116}$$

Donc la densité lagrangienne du champ spinoriel complexe libre est donnée par

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\,\not{\partial} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\psi = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{7.117}$$

7.11 Lagrangien du champ spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin d'avoir les deux équations de mouvement des champs spinoriels ψ et $\overline{\psi}$, en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\,\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu - iq\,A_\mu\gamma^\mu + m\,\right)\psi \tag{7.118}$$

qu'on peut écrire sous la forme,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi}\psi + m\overline{\psi}\psi \tag{7.119}$$

Rappelons que les équations de Dirac et l'équation de Dirac adjointe en présence d'un champ électromagnétique extérieur sont données par,

$$(\not{\partial} - iq \not{A} + m)\,\psi(x) = 0 \tag{7.120}$$

$$\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + iq \not{A} + m\right)\psi(x) = 0 \tag{7.121}$$

<u>Vérification</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{7.122}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) = 0 \tag{7.123}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\right) = 0 \tag{7.124}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -(\not{\partial} - iq \not{A} + m)\,\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{7.125}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\right) = 0 \Longrightarrow -(\not{\partial} - iq \not{A} + m)\,\psi = 0 \Longrightarrow (\not{\partial} - iq \not{A} + m)\,\psi = 0 \tag{7.126}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi} - m\,\overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \tag{7.127}$$

alors

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \Longrightarrow iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi} - m\,\overline{\psi} + \overline{\psi}\gamma^\mu = 0 \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not\partial} + iq\,A_\mu\,\gamma^\mu - m\right) = 0 \quad (7.128)$$

7.12 Exercices d'application

Exercice 20 :

1^o/ En présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, la dynamique d'une particule relativiste de charge q, de masse m et de spin non nul, peut être décrite par la densité lagrangienne du champ spinoriel suivante:

$$\mathcal{L}_2 = -\bar{\psi}(\not\partial - iq\ \not A + m)\psi = -\psi^\dagger\gamma^4(\partial_\mu\gamma^\mu - iqA_\mu\gamma^\mu + m)\psi$$

1. Retrouver les équations de mouvement, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

2^o/ En absence du champ électromagnétique, la dynamique de la particule libre peut être décrite par

$$\mathcal{L}_3 = -\bar{\psi}\ \not\partial\psi = -\psi^\dagger\gamma^4\partial_\mu\gamma^\mu\psi$$

1. Montrer que cette densité lagrangienne est invariante dans la transformation de phase suivante:

$$\begin{cases} \psi(x) \longrightarrow \psi^{'}(x) = e^{-i\theta\gamma^5}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}^{'}(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\theta\gamma^5} \end{cases} , \quad \theta \text{ est une constante.}$$

   ou $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ et vérifie les relations: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5$ et $(\gamma^5)^2 = 1$.

2. Utiliser le Théorème de Noether pour retrouver les constantes de mouvement associées à cette transformation.

3^o/ Si on pose:

$$\begin{cases} \psi_L(x) = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \\ \psi_R(x) = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \end{cases}$$

1. Réécrire l'expression de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ en fonction de ψ_L et ψ_R.

2. Étudier l'invariance de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ dans la transformation de phase suivante:

$$\begin{cases} \psi_L(x) \longrightarrow \psi^{'}_L(x) = \psi_L(x)e^{-i\alpha} \\ \psi_R(x) \longrightarrow \psi^{'}_R(x) = \psi_R(x) \end{cases} , \quad \alpha \text{ est une constante.}$$

Liste de Références

1. J. P. Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechnique et universitaires romandes, 2001.
2. S. Weinberg, Quantum theory of fields, 3 vols, Cambridge University Press, 1995,1996
3. J. J. Sakurai, Advanced quantum rnechanics, Addison-Wesley, 1967
4. J. D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic quantum fields, McGraw-Hill, 1965
5. F. Mandl et G.Shaw., Quantum field theory, Addison-Wesley, 1993
6. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience Monographs in Physics and Astronomy), John Wiley & Sons, 1959
7. R. Balian, du microscopique au macroscopique, vol. 2. École polytechnique, ellipses, 1982