Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : 1ème année LMD
Année : $2021-2022$
Matière : Algèbre 2

Série 2: Applications linéaires

Exercice 1.
Soit l'application $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ définie pour tout $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ par :

$$f(x,y,z,t)=(x+y,z+t,x+y+z+t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.

Exercice 2.
Soit $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application définie par:

$$u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(-2x_1+4x_2+4x_3,-x_1+x_3,-2x_1+4x_2+4x_3\right)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.
Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u\left(e_1\right)=2e_1+e_2+3e_3;\quad u\left(e_2\right)=e_2-3e_3;\quad u\left(e_3\right)=-2e_2+2e_3$$

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur.
Déterminer l'image par u du vecteur x. (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=2x\}$ et $F=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=-x\}$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E\oplus F=\mathbb{R}^3$?

Exercice 4.
Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$\begin{aligned}
f\left(e_1\right) &= -\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}\left(-e_1+2e_2+2e_3\right),\\
f\left(e_2\right) &= \frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}\left(2e_1-e_2+2e_3\right)\ \text{et}\\
f\left(e_3\right) &= \frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3=\frac{1}{3}\left(2e_1+2e_2-e_3\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Soient } E_{-1}=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)=-u\right\} \text{ et } E_1=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)=u\right\}.$$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que e_1-e_2 et e_1-e_3 appartiennent à E_{-1} et que $e_1+e_2+e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1}\cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1}\oplus E_1=\mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2=f\circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.

Soit $\beta=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u\left(e_1\right)=e_1+e_2$ et tel que $dim(ker(u))=1$

1. Déterminer $u\left(e_2\right)$ en fonction d'un paramètre $a\in\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Déterminer une base du noyau de $ker(u)$.

Exercice 6 **.**

Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ par

$$f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$$

On appelle $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $Im(f)$.
2. Déterminer la dimension de $ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 7.

Soit $f:E\to F$ une application linéaire

Montrer que:

$$ker(f)\cap im(f)=f\left(ker\left(f^2\right)\right).$$

Exercice 8.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $ker(u)\subset ker\left(u^2\right)$.
2. Montrer que $Im\left(u^2\right)\subset Im(u)$.

Exercice 9.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $ker(u)\cap im(u)=\{0_E\}$.

(ii) $ker(u)=ker(u\circ u)$.