Chapitre 3

Transformée de Laplace

3.1 Introduction

Une transformation permet de passer d'un ensemble de fonction vers un autre. Cette transformation est utilisée pour le passage d'un domaine temporelle vers un domaine complexe.
La transformée de Laplace permet de résoudre les équations différentielles d'ordre n. Et cela par remplacement des équations algébriques simplifiées.

3.2 Définition

Soit f une fonction qui dépend de la variable réelle t définie pour tout $t \geq 0$ et nulle pour tout $t < 0$.
On note : $p = \phi + jw$
$f(t) \rightarrow F(p) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

3.3 Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité : La transformée de Laplace est linéaire :

$$\mathfrak{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathfrak{L}[af_1(t)] + b\mathfrak{L}[bf_2(t)] \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

  De même, $\mathfrak{L}^{-1}$ est aussi linéaire.

- Dérivation : On cherche la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$:

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$
$$\mathfrak{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^-)$$

  Rmq : Si la fonction est nulle en 0^- alors : $\mathfrak{L}[f'(t)] = pF(p)$

  $\mathfrak{L}[f''(t)] = p\mathfrak{L}\frac{df(t)}{dt} - f'(0)$

  $\mathfrak{L}[f''(t)] = p(pF(p) - f(0)) - f'(0)$

  $\mathfrak{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0)) - f'(0)$

- Intégration : En intégrant par partie à partir de la définition, si les conditions initiales sont nulles alors :

$$\mathfrak{L}[\int_{0^-}^{t} f'(u) du] = \frac{F(p)}{p}$$

  Si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside) :

  - dérivée par rapport à t dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique ;

  - Intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

- Translation de la valeur concrète : $\mathfrak{L}[f(t - t_0)] = F(p)e^{-t_0 p}$
- Translation de la valeur synoptique : $\mathfrak{L}[e^{at} f(t)] = F(p + a)$
- Convolution : $\mathfrak{L}[x(t) * y(t)] = \mathfrak{L}[x(t)].\mathfrak{L}[y(t)] = X(p).Y(p)$

3.3.1 *Exemples de calcul de la transformée de Laplace :*

- $f(t) = u(t) \rightarrow F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$

- $f(t) = e^{-at} \rightarrow F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-at}e^{-pt} dt = -\frac{1}{p+a}[e^{-(p+a)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$

3.4 Théorèmes

3.4.1 *Théorème de la dérivation fréquentielle*

$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

3.4.2 Théorème de la valeur initiale

$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$

3.4.3 Théorème de la valeur finale

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$

Remarques :

- Ces théorèmes n'ont pas de sens que si les limites existent.

- Le théorème de la valeur finale est très utilisé pour l'étude de la précision.

3.4.4 Théorème du retard

$\mathfrak{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-t_0 p}\mathfrak{L}[f(t)u(t)]$

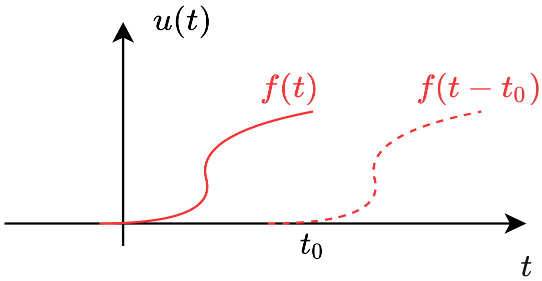


FIGURE 3.1 – **Signal retardé**

3.4.5 Fonction de transfert

On appelle fonction de transfert $H(p)$ d'un système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + ... + b_0}{a_n p^n + ... + a_0}$$

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc :

$$S(p) = H(p).E(p)$$

$H(p)$ caractérise le comportement du système indépendamment de l'entrée et s'exprime simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle) construit à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution.

3.5 Table de transfromée de Laplace

Ce tableau présente les transformées de Laplace des fonctions usuelles.

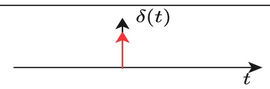
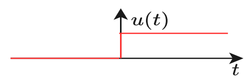
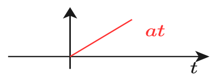
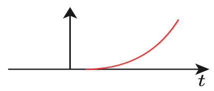
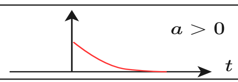
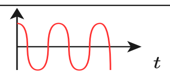
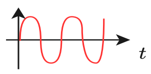
Nom	Graph temporel	$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p)$
Dirac		$\delta(t)$	1
Echelon		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe		at	$\frac{a}{p^2}$
Fonction puissance		t^n	$\frac{n\,!}{p^{n+1}}$
Fonction expoentielle		e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
		te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
cosinus		$coswt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
sinus		$sinwt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
cosinus amorti	$a > 0$	$e^{-at}coswt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$
sinus amorti	$a > 0$	$e^{-at}sinwt$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$

FIGURE 3.2 – **Transformée de Laplace des fonctions usuelles**

3.6 Méthode de calcul des transformées de Laplace inverse

Les transformées de Laplace donnent des fonctions de p, sous forme de fraction rationnelle $\frac{N(p)}{D(p)}$.

Les transformées de Laplace inverses sont déterminées, par identification à l'aide du tableau de transformées usuelles après avoir décomposé en éléments simples les fractionsrationnelles obtenues.

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = \frac{1}{j2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(p)e^{pt}dp \ (t \geqslant 0)$$

Forme de la décomposition

1. $D(p)$ n'a que des racines simples réelles :
   $X(p) = \frac{p}{(p-1)(p+2)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p+2}$
2. $D(p)$ n'a que des racines réelles dont une multiple :
   $X(p) = \frac{2p^2+2p-1}{(p-1)(p+2)^2} = \frac{a}{(p-1)} + \frac{bp+c}{(p+2)^2} = \frac{a}{(p-1)} + \frac{b}{(p+2)} + \frac{c}{(p+2)^2}$
3. $D(p)$ a une racine complexe :
   $X(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p-1)} = \frac{a}{p-1} + \frac{bp+c}{(p+1)^2+4}$

Détermination des coefficients

1. Par la mutliplication par $((p-p_i)$ et évaluation en p_i : $a_i = [\frac{N(p)}{D(p)}(p-p_i)]_{p=p_i}$
2. Par utilisation de valeurs particulieres
3. Par identification où on retrouve la fraction rationnelle à partir de la forme décomposée puis on identifie avec la fration d'origine.

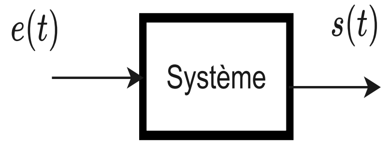
3.7 Analyse temporelle et fréquentielle

On s'intéresse dans cette section au comportement dynamique d'un système linéaire continu invariant dans le temps.

$s(t) = Ke(t)$, avec K : gain du système.

Ce système est stable si pour une entrée bornée on a une sortie bornée.

Si la sortie est bornée, cela veut dire qu'elle possède une limite finie.



3.7.1 *Modèle de comportement des systèmes d'ordre 1 et systèmes d'ordre 2*

Système du premier ordre :

Dans un modèle de premier ordre (moteur, filtre, ...), le comportement est caractérisé par son équation différentielle :

$$\tau\frac{d(s(t))}{dt}+s(t)=Ke(t)$$

K : gain statique

τ : constante de temps (en seconde).

Exemple : Circuit RL

$e(t)=s(t)+\tau\frac{ds(t)}{dt}$

$\tau=\frac{L}{R}$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle permet d'obtenir sa fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+\tau p}.$$

Pour le circuit RC série l'entrée et la sortie est une tension.

Pour le circuit RL série l'entrée est une tension, alors que la sortie est un courant.

Les (la) conditions initiales sont nulles pour une grandeur ou ses dérivées d'un système physique, prouve que ce dernier (processus physique) part de son état de repos ou à partir d'un point de son fonctionnement.

Système du deuxième ordre :

Dans un modèle de deuxième ordre (circuit électrique(RLC) ; moteur, filtre,...) :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{w_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=Ge(t)$$

G : Gain statique.

ξ : Coefficient d'amortissement ($\xi>0$).

w_0 : Pulsation propre non amortie ($w_0>0$).

3.7.2 *Decription par les équations différentielles*

De façon général, les lois de comportement des SLCI sont représentés par des équations différentielles à coefficients constants reliant ainsi les grandeurs d'entrées $e(t)$ et de sorties $s(t)$.

Pour des systèmes physiques réels $m < n$.

On cherche à caractériser le système indépendemment de l'entrée.

$\frac{s(t)}{e(t)} = F$, (F) idépendante de $e(t)$, mais cela n'est pas possible car la sortie et l'entrée sont liées par l'équation différentielle.

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + b_0 e(t)$$

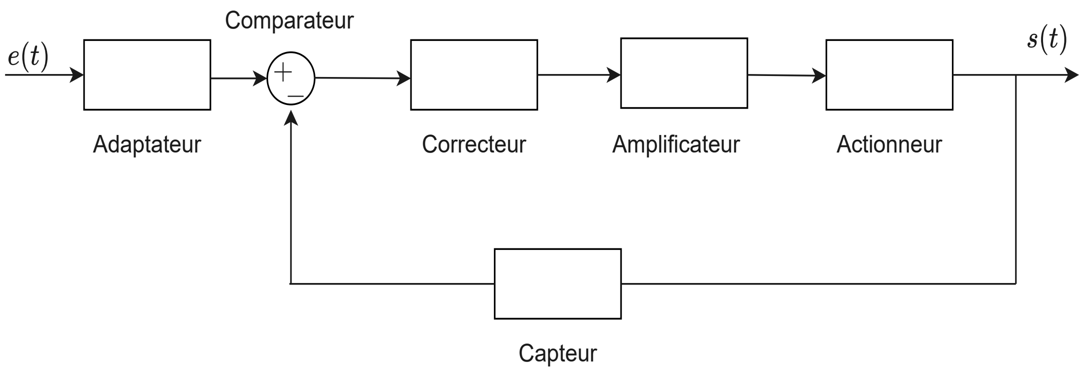


FIGURE 3.3 – **Etude de comportement d'un système**

On soumet le système étudié à des entrées types connues afin d'étudier son comportement et ses performances.

On effectuera une analyse temporelle de la sortie en fonction des signaux suivants(échelon, impulsion rampe) et une analyse fréquentielle pour un signal d'entrée sinusoïdal.

3.7.3 *Réponse impulsionnelle*

$e(t) = \delta(t) \rightarrow E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = H(p)$

Le calcul de la tranformée inverse de Laplace donne :

$$s(t) = \frac{G}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

3.7.4 *Réponse indicielle*

$e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = H(p)E(p)$
$s(t) = G(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$

3.7.5 *Temps de réponse*

Le temps de réponse est caractérisé par la réponse indicielle dans le régime transitoire. Il est obtenue lorsque la valeur finale du régime permanent du processus atteint $\frac{2}{3}$ de la valeur finale d'entrée, avec : $t_r = 3\tau$

3.7.6 *Temps de montée*

Il représente le temps écoulé pour lequel la sortie du processus atteigne 90 % de la valeur finale, avec : $t_m = 2.3\tau$ car $0.9G = G(1 - e^{-t_m/\tau})$
Rmq : un système rapide est dit pour une constante de temps τ faible correspondant à un temps de réponse faible.

3.7.7 *Réponse à une rampe*

$$e(t) = r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$E(p) = \frac{1}{p^2}$
$s(t) = G(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})$

3.7.8 *Analyse fréquentielle*

Dans cette analyse le système du premier ordre est excité par un signal sinusoïdal. Dans ce cas l'opérateur p est remplacé par (jw). Ce qui donne comme fonction de transfert : $H(jw) = \frac{G}{1+j\tau w}$, avec $w_c = \frac{1}{tau}$: pulsation de coupure.

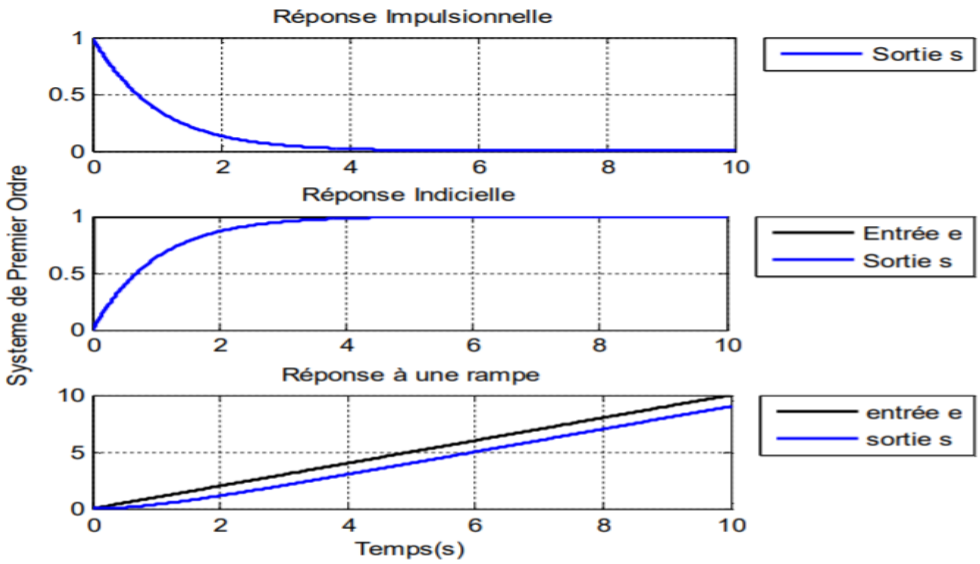


FIGURE 3.4 – **Réponse d'un système à des entrée différentes**

Diagramme de Bode

$$\begin{cases} |H(jw)| = \frac{G}{\sqrt{1+\frac{w}{w_c}^2}} \\ \\ \phi = arg(H(jw)) = -arctg(\frac{w}{w_c}) \end{cases}$$

en décibel : $\begin{cases} |H(jw)|_{dB} = 20log(G) - 10log(1+(\frac{w}{w_c})^2) \\ \phi = arg(H(jw)) = -arctg(\frac{w}{w_c}) \end{cases}$

Il est à savoir que :

- Le système du premier ordre est un filtre passe-bas.

- Un système rapide a une constante de temps faible avec une bande passante large.

- Un système lent est un système à bande passante étroite.

Série de TD 3

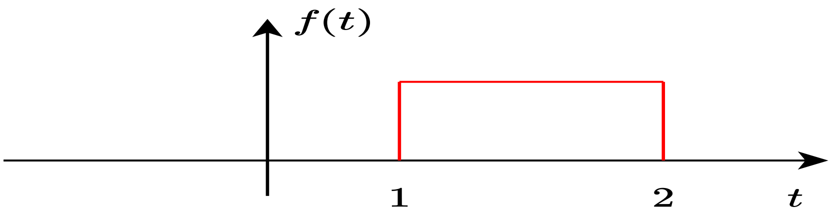
Exercice 1

Calculer les transformée de Laplace pour chacune des fonction $f(t)$ suivante :

Solution :

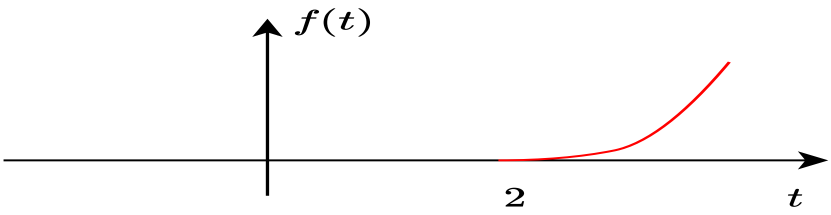
1. $f(t) = u(t-1) - u(t-2)$

$F(p) = \int_1^2 e^{-pt}dt = \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p}$



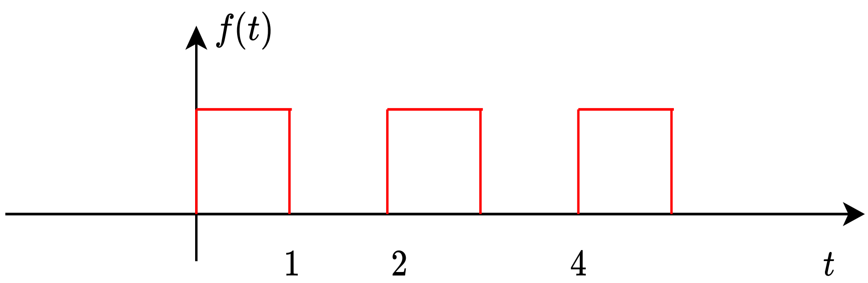
2. $f(t) = u(t-2)(t-2)^2$

On sait que : $TL\{t^2u(t)\} = \frac{2}{p^2}$



En utilisant le théorème de retard : $TL\{(t-a)^2u(t-a)\} = \frac{2e^{-ap}}{p^3}$

3. $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(u(t-2n) - u(t-(2n+1))$ $F(p) = \sum_0^{+\infty}\int_{2n}^{(2n+1)} e^{-pt}dt$



$= \sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-2np}}{p} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(2n+1)p}}{p} = \frac{1}{p(1-e^{-2p})} + \frac{e^{-p}}{(1-e^{-2p})}$

Rmq : somme d'une suite géométrique= $u_1\frac{1-q^n}{1-q}$

Exercice 2

Déterminer la transformée de Laplace pour chaque cas.

Solution :

1. $TL\{f(p)\} = 2TL\{t^2u(t)\} - TL\{u(t)\}$

On sait que : $TL\{u(t)\} = \frac{1}{p}$

$TL\{t^n u(t)\} = \frac{n}{p^{n+1}}$

D'après la linéarité de la transformée de Laplace on a :

$TL\{f(p)\} = 2TL\{t^2u(t)\} - TL\{u(t)\} = 2\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}$

2. $TL\{e^t - cos(\frac{2}{3}t)e^{2t}\}u(t)$

$TL\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{p-1}$

Alors que pour : $TL\{e^{at}cos(\frac{2}{3}t)\}$

$TL\{cos(\frac{2}{3}t)\} = \frac{p}{p^2+\frac{4}{9}}$

On utilise la formule : $TL\{e^{at}f(t)\}$:

Alors on obtient : $TL\{e^{2t}cos(\frac{2}{3}t)\} = \frac{p-2}{(p-2)^2+\frac{4}{9}}$

Alors $TL\{e^t - cos(\frac{2}{3}t)e^{2t}\}u(t) = \frac{1}{p-1} - \frac{p-2}{(p-2)^2+\frac{4}{9}}$.

3. $TL\{tu(t)\} = \frac{1}{p^2}$

De la formule de multiplication par e^{at} : $TL\{te^{4t}u(t)\} = \frac{1}{(p-4)^2}$

4. $TL\{e^t cos^3 t\}$

On commence par linéariser $cos^3 x$:

$cos^3(x) = (\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}^3) = \frac{1}{8}(e^{3jx} + 3e^{jx} + 3e^{-jx} + e^{-j3x}) = \frac{1}{4}cos(3x) + \frac{3}{4}cos(x)$

On en déduit que : $TL\{cos^3 t\} = \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}$

$TL\{cos^3 te^t\}$

Alors finalement :$TL\{e^t cos^3 t\} = \frac{1}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2+1}$

5. $TL\{tu(t) - (t-2)u(t-2)\} = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}$

Exercice 3

calculer les transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$
2. $F(p) = \frac{p+1}{p^3+p^2-6p}$

3. $F(p) = \frac{p^3-4p+4}{p^2(p-2)(p-1)}$

Solution :

1.$TL^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{(p+2)} - \frac{1}{(p+3)} = e^{-2t} - e^{-3t}$

2. $\frac{p+1}{p(p^2+p-6)} = \frac{p+1}{p(p-2)(p+3)}$

$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+3}$

$A = \lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p+1}{(p-2)(p+3)} = -1/6$

$B = \lim_{p\to 0}(p-2)F(p) = \lim_{p\to 2} \frac{p+1}{p(p+3)} = 3/10$

$C = \lim_{p\to 0}(p+3)F(p) = \lim_{p\to -3} \frac{p+1}{p(p-2)} = -2/15$

$F(p) = \frac{-1/6}{p+1} + \frac{3/10}{p-2} + \frac{-2/15}{p+3}$

$f(t) = -1/6 + 3/10e^{2t} - 2/15e^{-3t}$

3. $F(p) = \frac{p^3-4p+4}{p^2(p-2)(p-1)}$

On utilise pour ce cas :

$A_i = \frac{1}{(n-i)} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n-i}}{dp^{n-i}}[(p-p_k)^n F(p)]$

$A_2 = \lim_{p\to 0} p^2 F(p) = 2$

$A_1 = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}[p^2 F(p)] = 3$

$B = -1$

$C = -1$

$F(p) = \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{13}{(p-2)} - \frac{1}{(p-1)}$

$f(t) = 3 + 2t - e^{2t} - e^t$

Exercice 4

Calculer les transformée de Laplace suivantes :

$x_1(t) = t^2 + 3t - 4$

$x_2(t) = t^3 e^{-t}$

$x_3(t) = sin(2t)$

$x_4(t) = sin(2t)e^t$

Solution :