Courbes paramétrées.

Plan du chapitre

1 Notions de base

1.1 Définition d'une courbe paramétrée

Définition 1. Une **courbe paramétrée plane** (ou un **arc paramétré**) est une application $f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$, d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{C}$).

Ainsi, une *courbe paramétrée* est une application qui, à un réel t (le *paramètre*) associe **un point** du plan. On peut aussi la noter $f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}$, pour insister sur ce fait, ou écrire en abrégé $t \mapsto M(t)$ ou $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou enfin, $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ avec l'identification usuelle entre le point $M(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et son affixe $z(t) = x(t) + iy(t)$. Par la suite, un arc sera fréquemment décrit de manière très synthétique sous une forme du type $\left\{ \begin{array}{l} x = 3\ln(t) \\ y = 2t^2 + 1 \end{array} \right.$, $t \in]0, +\infty[$ ou aussi $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Il faut dans ce cas comprendre que x et y désignent des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ ou que z désigne une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

Nous connaissons déjà des exemples de *paramétrisations* :

◇ $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi[$ (paramétrisation du cercle trigonométrique).

◇ $t \mapsto (\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2})$, $t \in \mathbb{R}$ (paramétrisation rationnelle du cercle trigonométrique privé du point $(-1, 0)$).

◇ $t \mapsto (2t - 3, 3t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$ (paramétrisation de la droite passant par le point $A(-3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 3)$).

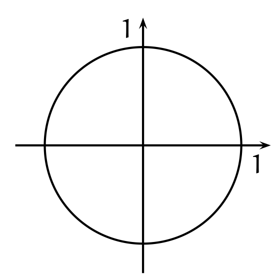
◇ $\lambda \mapsto ((1-\lambda)x_A + \lambda x_B, (1-\lambda)y_A + \lambda y_B)$, $\lambda \in [0, 1]$ (paramétrisation du segment $[AB]$).

◇ De manière générale, si f est une fonction d'un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, une paramétrisation de la courbe d'équation $y = f(x)$ est $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right.$. Une telle paramétrisation où **l'une des coordonnées est le paramètre** s'appelle une **paramétrisation cartésienne**.

En tout état de cause, une courbe paramétrée « n'est pas un dessin », malgré le vocabulaire utilisé, mais une application. Le « graphe » d'un arc paramétré ne s'appelle pas graphe de l'arc paramétré mais **support de l'arc paramétré**. Néanmoins par la suite, quand cela ne pose pas de problème, nous identifierons ces deux notions en employant le mot *arc* (ou le mot *courbe*) pour désigner indifféremment à la fois l'application et son graphe.

Définition 2. Le support de l'arc paramétré $f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$ est l'ensemble des points $M(t)$ où t décrit D.

Des arcs différents peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des arcs $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} [0, 4\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$ dont le support est le cercle ci-contre. Ainsi, la seule donnée d'un dessin ne suffit pas à définir un arc paramétré qui est donc plus qu'une simple courbe. C'est une **courbe munie d'un mode de parcours**. Sur cette courbe, on avance puis on revient en arrière, on peut la parcourir une ou plusieurs fois, au gré du paramètre, celui-ci n'étant d'ailleurs jamais visible sur le dessin. On « voit » $x(t)$, $y(t)$, mais pas t.



Interprétation cinématique. Le paramètre t peut ou non s'interpréter comme le **temps**. Si c'est le cas, on affine le vocabulaire. L'arc paramétré s'appelle plutôt **point en mouvement** et le support de cet arc porte le nom de **trajectoire** (rappelons que la cinématique est l'étude des mouvements). Dans ce cas, on peut dire que $M(t)$ est la **position** du point M à la **date** t.

1.2 Réduction du domaine d'étude

Rappelons tout d'abord l'effet de quelques transformations géométriques usuelles sur le point $M(x, y)$ (x et y désignant les coordonnées de M dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné).

Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$: $t_{\vec{u}}(M) = (x + a, y + b)$.
Réflexion d'axe (Ox) : $s_{(Ox)}(M) = (x, -y)$.
Réflexion d'axe (Oy) : $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$.
Symétrie centrale de centre O : $s_O(M) = (-x, -y)$.
Symétrie centrale de centre $I(a, b)$: $s_I(M) = (2a - x, 2b - y)$.
Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $s_D(M) = (y, x)$.
Réflexion d'axe la droite (D') d'équation $y = -x$: $s_{D'}(M) = (-y, -x)$.
Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O : $\text{rot}_{O,\pi/2}(M) = (-y, x)$.
Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de O : $\text{rot}_{O,-\pi/2}(M) = (y, -x)$.

On utilise entre autres ces résultats pour réduire le domaine d'étude d'un arc paramétré. Nous le ferons à travers quatre exercices.

Exercice 1. Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{array}\right.$.

Solution. • Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$M(t + 2\pi) = (t + 2\pi - \sin(t + 2\pi), 1 - \cos(t + 2\pi)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) + (2\pi, 0) = t_{\vec{u}}(M(t))$$

où $\vec{u} = (2\pi, 0)$. Donc, on étudie l'arc et on en trace le support sur un intervalle de longueur 2π au choix comme $[-\pi, \pi]$ par exemple, puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs $k.(2\pi, 0) = (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour $t \in [-\pi, \pi]$,

$$M(-t) = (-(t - \sin(t)), 1 - \cos(t)) = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie l'arc et on en trace le support sur $[0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par translations de vecteurs de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

➢ Commentaire .

◇ *Nous nous sommes permis d'écrire* $M(t + 2\pi) = (t + 2\pi - \sin(t + 2\pi), 1 - \cos(t + 2\pi))$. *Nous avons donc identifié complètement le point* $M(t + 2\pi)$ *et le couple de ses coordonnées. Cette identification naturelle et pratique pour la rédaction est possible ici car il n'y a qu'un seul repère en cause et il n'y a donc pas plusieurs couples possibles de coordonnées pour un même point. Elle sera par ailleurs totalement justifiée ultérieurement.*

◇ *On a par exemple,* $M(\frac{5\pi}{2}) = M(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = t_{\vec{u}}(M(\frac{\pi}{2}))$ *et plus généralement, si* t *est un réel donné de l'intervalle* $[\pi, 3\pi]$, $M(t)$ *est le translaté du point* $M(t - 2\pi)$ *(où cette fois-ci* $t - 2\pi$ *est dans* $[-\pi, \pi]$*) par la translation de vecteur* $\vec{u}$. ***L'ensemble*** *des points* $M(t)$ *où* t *décrit* $[\pi, 3\pi]$ *est donc* ***l'ensemble*** *des translatés des points* $M(t)$ *où* t *décrit* $[-\pi, \pi]$ *dans la translation de vecteur* $\vec{u}$.

Exercice 2.

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$ (courbe de Lissajous).

Solution. • Pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t + 2\pi) = M(t)$ et on obtient la courbe complète quand t décrit $[-\pi, \pi]$.
• Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t) = (-\sin(2t), -\sin(3t)) = s_O(M(t))$. On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.
• Pour $t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t) = (\sin(2\pi - 2t), \sin(3\pi - 3t)) = (\sin(-2t), \sin(\pi - 3t)) = (-\sin(2t), \sin(3t)) = s_{(Oy)}(M(t))$.
On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis par symétrie centrale de centre O.

➢ Commentaire . *Il semblerait que nous ayons raté des symétries puisqu'on a aussi* $M(t + \pi) = s_{(Ox)}(M(t))$ *et l'axe* (Ox) *est donc également un axe de symétrie de la courbe à tracer. En fait, ce résultat est contenu dans les résultats précédents. Rappelons que si* (D) *et* (D') *sont deux droites sécantes en un point* Ω *telles que* $((D), (D')) = \theta\ [\pi]$, *alors* $s_{D'} \circ s_D = \text{rot}_{\Omega,2\theta}$. *Ici,* $s_{(Oy)} \circ s_{(Ox)} = \text{rot}_{O,\pi} = s_O$ *ou encore* $s_{(Ox)} = (s_{(Oy)})^{-1} \circ s_O = s_{(Oy)} \circ s_O$.

Ceci permet de redécouvrir : $M(t + \pi) = s_{(Oy)}(M(\pi - (t + \pi))) = s_{(Oy)}(M(-t)) = s_{(Oy)}(s_O(M(t))) = s_{(Ox)}(M(t))$.

Plus généralement, deux des symétries impliquent la troisième. Dans notre réduction successive de l'intervalle d'étude, nous avons alors adopté l'attitude systématique qui consiste à couper l'intervalle d'étude en deux par l'utilisation de la symétrie par rapport au *milieu de cet intervalle : pour $t \in [-\pi, \pi]$, $-t$ est le symétrique de t par rapport à 0 et pour $t \in [0, \pi]$, $\pi - t$ est le symétrique de t par rapport à $\frac{\pi}{2}$. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous nous sommes placés initialement sur $[-\pi, \pi]$, utilisant la 2π-périodicité de l'arc, et non pas sur $[0, 2\pi]$.*

Exercice 3. Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$.

Solution. Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour $t \in \mathbb{R}$, $M(-t) = s_O(M(t))$. On étudie et on construit l'arc quand t décrit $[0, +\infty[$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

• Pour $t \in]0, +\infty[$, $M(\frac{1}{t}) = (\dfrac{1/t}{1+1/t^4}, \dfrac{1/t^3}{1+1/t^4}) = (\dfrac{t^3}{1+t^4}, \dfrac{t}{1+t^4}) = (y(t), x(t)) = s_{y=x}(M(t))$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$, on étudie et on construit l'arc quand t décrit $]0, 1]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la première bissectrice puis par symétrie centrale de centre O et enfin en plaçant le point $M(0) = (0, 0)$.

Exercice 4. Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc $z = \dfrac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it})$. En calculant $z(t + \dfrac{2\pi}{3})$, trouver une transformation géométrique simple laissant la courbe globalement invariante.

Solution. • Pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t + 2\pi) = \dfrac{1}{3}(2e^{i(t+2\pi)} + e^{-2i(t+2\pi)}) = \dfrac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it}) = z(t)$. La courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

• Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $z(-t) = \dfrac{1}{3}(2e^{-it} + e^{2it}) = \overline{\dfrac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it})} = \overline{z(t)}$. Donc, on étudie et on construit la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, la courbe complète étant alors obtenue par réflexion d'axe (Ox).

• Pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t + \dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{1}{3}(2e^{i(t+2\pi/3)} + e^{-2i(t+2\pi/3)}) = \dfrac{1}{3}(2e^{2i\pi/3}e^{it} + e^{-4i\pi/3}e^{-2it}) = e^{2i\pi/3}z(t)$. Le point $M(t + 2\pi/3)$ est donc l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. La courbe complète est ainsi invariante par la rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1.3 Points simples, points multiples

Définition 3. Soit $f : t \mapsto M(t)$ un arc paramétré et A un point du plan. La **multiplicité** du point A par rapport à l'arc f est le nombre (éventuellement nul ou infini) des réels t pour lesquels $M(t) = A$ ou encore

> la **multiplicité** du point A par rapport à l'arc f est $\text{card}(f^{-1}(A))$.

◇ Si A n'est pas sur le support de l'arc, sa multiplicité est 0 (on sait bien que ce genre de convention un peu absurde à priori, se révèle toujours pratique à l'usage).

◇ Si A est atteint une et une seule fois, sa multiplicité est 1 et on dit que la point A est un **point simple de l'arc**.

◇ Si A est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, on dit que A est un **point double** de l'arc.

◇ On parle de même de points **triples**, **quadruples**, ..., **multiples** (dès que le point est atteint au moins deux fois).

◇ Un arc dont tous les points sont simples est appelé un **arc simple**. Il revient au même de dire que l'application $t \mapsto M(t)$ est injective.

> Pour trouver les points multiples d'un arc, on cherche les couples $(t, u) \in D^2$ tels que $u < t$ et $M(t) = M(u)$.

Exercice 5. Trouver les points multiples de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = 2t + t^2 \\ y = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}^*$.

Solution. Soit $(t, u) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $u < t$.

$$M(t) = M(u) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t + t^2 = 2u + u^2 \\ 2t - \dfrac{1}{t^2} = 2u - \dfrac{1}{u^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t^2 - u^2) + 2(t - u) = 0 \\ 2(t - u) - (\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{u^2}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t - u)(t + u + 2) = 0 \\ (t - u)(2 + \dfrac{(t + u)}{t^2u^2}) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t + u + 2 = 0 \\ 2 + \dfrac{(t + u)}{t^2u^2} = 0 \end{array}\right. \text{ (car } t - u \neq 0\text{)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} S + 2 = 0 \\ 2 + \dfrac{S}{P^2} = 0 \end{array}\right. \text{ (en posant } S = t + u \text{ et } P = tu\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} S = -2 \\ P^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} S = -2 \\ P = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} S = -2 \\ P = -1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow u$ et v sont les deux solutions de $X^2 + 2X + 1 = 0$ ou de $X^2 + 2X - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$ et $u = -1 - \sqrt{2}$ (car $u < t$).

Posons $\alpha = -1 + \sqrt{2}$ et $\beta = -1 - \sqrt{2}$. La courbe admet un et un seul point multiple, qui est d'ailleurs un point double, à savoir le point $M(\alpha)(= M(\beta))$. De plus, $x(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha = 1$ (puisque $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$). Ensuite, en divisant les deux membres de l'égalité $\alpha^2 + 2\alpha = 1$ par α^2, nous déduisons $\dfrac{1}{\alpha^2} = 1 + \dfrac{2}{\alpha}$, puis, en divisant les deux membres de l'égalité $\alpha^2 + 2\alpha = 1$ par α, nous déduisons $\dfrac{1}{\alpha} = \alpha + 2$. Par suite, $y(\alpha) = 2\alpha - (1 + 2(\alpha + 2)) = -5$. La courbe admet un point double, le point de coordonnées $(1, -5)$.

⋗ Commentaire.

⋄ *Il est clair que si (t, u) est un couple de réels tels que $M(t) = M(u)$, alors (u, t) est aussi un tel couple. Pour ne pas avoir à fournir tous les couples solutions « en double », nous avons préféré dès le départ appeler t le plus grand des deux réels en posant $u < t$.*

⋄ *Dans cet exercice, les expressions utilisées sont des fractions rationnelles, ou encore, une fois réduites au même dénominateur, puis une fois les dénominateurs éliminés, les expressions sont polynômiales. Or, à u donné, l'équation $M(t) = M(u)$ d'inconnue t admet bien sûr la solution $t = u$. En conséquence, on doit systématiquement pouvoir mettre en facteur $(t - u)$, ce que nous avons fait en regroupant les termes analogues : nous avons écrit tout de suite $(t^2 - u^2) + 2(t - u) = 0$ et non pas $t^2 + 2t - u^2 - 2u = 0$. Le facteur $t - u$ se simplifie alors car il est non nul.*

⋄ *Le système obtenu est symétrique en t et u (si on remplace t par u et u par t, le système réécrit est le même). On peut montrer en algèbre, qu'un tel système peut se réécrire comme un nouveau système (plus forcément symétrique celui-là) en la somme S et le produit P de t et u. Nous avons écrit et résolu ce système et trouvé S et P, les deux nombres t et u étant alors les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.*

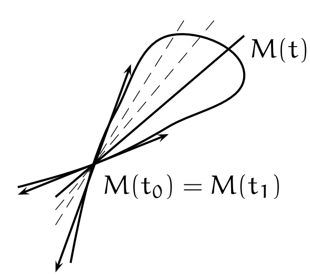
⋄ *Le calcul de $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ pouvait tout à fait être mené à partir de la valeur de α $(= -1 + \sqrt{2})$ mais le calcul fourni est de portée plus générale. Il est préférable d'utiliser la **définition** de α $(\alpha^2 + 2\alpha = 1)$ plutôt que sa **valeur explicite**.*

2 Tangente à une courbe paramétrée. Dérivation.

2.1 Tangente à un arc

Soit $f : t \mapsto M(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$ un arc. Soient $t_0 \in D$ puis $A = M(t_0)$. On veut définir la tangente en $M(t_0)$.

On doit déjà prendre garde au fait que la courbe peut tout à fait repasser par le point A pour une autre valeur t_1 du paramètre avec une autre tangente. On doit donc parler de tangente en $M(t_0)$ et non pas de tangente en A. Cette tangente va être définie comme la position limite de la droite $(M(t_0)M(t))$ quand t tend vers t_0. Encore faut-il que cette phrase ait un sens et que le point $M(t)$ ne soit pas le point $M(t_0)$. Pour cela, on supposera que l'arc est **localement simple en** t_0, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert non vide I de centre t_0 tel que l'équation $M(t) = M(t_0)$ admette une et une seule solution dans $D \cap I$, à savoir $t = t_0$. Il revient au même de dire que l'application $t \mapsto M(t)$ est **localement injective**. Dans tout ce paragraphe, nous supposerons systématiquement que cette condition est réalisée.



Définition 4 (Tangente en un point d'un arc paramétré). Soit $f : t \mapsto M(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$ un arc paramétré et soit $t_0 \in D$. On suppose que l'arc est localement simple en t_0. On dit que l'arc admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une position limite quand t tend vers t_0. Dans ce cas, la droite limite est la tangente en $M(t_0)$.

2.2 Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$)

2.2.1 Tangente et vecteur dérivé

On sait déjà que la tangente en $M(t_0)$, quand elle existe, passe par le point $M(t_0)$. Il ne nous manque que sa direction. Pour $t \neq t_0$, un vecteur directeur de la droite $(M(t_0)M(t))$ est le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \begin{pmatrix} x(t)-x(t_0) \\ y(t)-y(t_0) \end{pmatrix}$ (rappelons que ce vecteur est supposé non nul pour t proche de t_0 et distinct de t_0). Quand t tend vers t_0, les coordonnées de ce vecteur tendent vers 0 ou encore le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ tend (malheureusement) vers $\overrightarrow{0}$. Le vecteur nul n'indique aucune direction particulière et nous ne connaissons toujours pas la direction limite de la droite $(M(t_0)M(t))$. Profitons-en néanmoins pour définir la notion de limite et de continuité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 5. Soit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, un arc paramétré. Soient $t_0 \in D$ et $\ell = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

❶ $M(t)$ a une limite quand t tend vers t_0 si et seulement si les deux fonctions x et y ont une limite quand t tend vers t_0.

❷ $M(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers t_0 si et seulement si $x(t)$ tend vers a et $y(t)$ tend vers b quand t tend vers t_0.

❸ L'arc est continu en t_0 si et seulement si les fonctions x et y le sont. L'arc est continu sur D si et seulement si il est continu en tout point de D.

Théorème 1. $M(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers t_0 si et seulement si $\|M(t) - \ell\|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0.

Démonstration. Si $M(t)$ tend vers ℓ, alors $x(t)$ tend vers a et $y(t)$ tend vers b, puis $\|M(t)-\ell\| = \sqrt{(x(t)-a)^2 + (y(t)-b)^2}$ tend vers 0.
Réciproquement, si $\|M(t) - \ell\|$ tend vers 0, alors puisque

$$|x(t) - a| = \sqrt{(x(t)-a)^2} \leq \sqrt{(x(t)-a)^2 + (y(t)-b)^2} = \|M(t) - \ell\|.$$

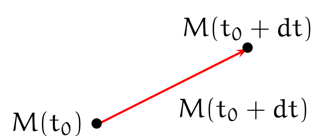
On en déduit que $x(t)$ tend vers a, et de même $y(t)$ tend vers b. ❑

Revenons maintenant à notre tangente. Un autre vecteur directeur de la droite $(M(t_0)M(t))$ est le vecteur

$$\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} (x(t)-x(t_0))/(t-t_0) \\ (y(t)-y(t_0))/(t-t_0) \end{pmatrix} = \overrightarrow{\frac{\Delta M}{\Delta t}}(t_0) = \text{« } \overrightarrow{\frac{\text{différence de } M}{\text{différence de } t}} \text{ en } t_0 \text{ »},$$

(on a multiplié le **vecteur** $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ par le **réel** $\dfrac{1}{t-t_0}$ et en toute rigueur, on devrait écrire $\dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{\Delta M}(t)$ ou $\dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{\Delta M(t)}$ et on rappelle à ce sujet qu'une différence de deux points $(B - A)$ est un vecteur $(\overrightarrow{AB})$). Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0, ce dernier vecteur tend vers le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$. D'où la définition :

Définition 6. Soient $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, un arc paramétré et $t_0 \in D$. L'arc est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions x et y le sont. Dans ce cas, le **vecteur dérivé** de l'arc en t_0 est le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$. Ce vecteur se note $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$(= « $\overrightarrow{\dfrac{\text{différence infinitésimale de } M}{\text{différence infinitésimale de } t}}$ en t_0 »).



$$M(t_0 + dt) - M(t_0) = \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+dt)} = \overrightarrow{dM}(t_0)$$

⊳ **Commentaire**. *Dans l'expression* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$, *la lettre* t *employée deux fois ne désigne pas la même chose. En dénominateur de la fraction, elle rappelle le nom de la variable alors que dans la parenthèse, elle désigne le réel en lequel on a évalué le vecteur dérivé. Si on évalue en* t_0 *au lieu de* t, *l'expression devient* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ *et non pas* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt_0}(t_0)$. *D'autre part, la flèche de vecteur peut s'écrire au-dessus de* $\dfrac{dM}{dt}$ *pour préciser le fait que la fonction* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$: $t \mapsto \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$ *est une fonction vectorielle, ou sur la totalité de l'expression* $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}(t)}$ *pour préciser le fait que l'image du réel* t *par la fonction vectorielle est un vecteur, la notation la plus méticuleuse étant probablement de manière éxagérée* $\overrightarrow{\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)}$.

Finissons-en avec la tangente. Si le vecteur $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$ n'est pas nul, celui-ci indique effectivement la direction limite de la droite $(M(t_0)M(t))$, mais le problème n'est toujours pas résolu si ce vecteur est nul. Ceci nous conduit à deux situations étudiées dans les deux paragraphes suivants :

2.2.2 Tangente en un point régulier

Définition 7. Soit $t \mapsto M(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$ un arc dérivable sur D et t_0 un réel de D. Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit **régulier**, et si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) = \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit singulier. Un arc dont tout les points sont réguliers est appelé **arc régulier**.

Interprétation cinématique. Si t est le temps, le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$ est le **vecteur vitesse** au point $M(t_0)$. Un point singulier, c'est-à-dire un point en lequel la vitesse est nulle, s'appelera alors plus volontiers **point stationnaire** (et non stationnaire dans le cas contraire).

Théorème 2. En tout point régulier d'un arc dérivable, cet arc admet une tangente. La tangente en un point régulier est dirigée par le vecteur dérivé en ce point.
Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, une équation de la tangente (T_0) en $M(t_0)$ est donc fournie par :

$$\boxed{M(x,y) \in (T_0) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.}$$

⩥ **Commentaire**.

⋄ *On doit noter que le vecteur dérivé a la possibilité d'être colinéaire à $\vec{j}$ (deuxième vecteur du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$). L'arc peut donc être dérivable et néanmoins la tangente « verticale », contrairement à ce à quoi on est habitué pour les graphes de fonctions du type $y = f(x)$.*

⋄ *Dans le cas d'une paramétrisation cartésienne du type $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right.$ qui est une paramétrisation du graphe de la fonction (dérivable) f (où cette fois-ci f est à valeurs dans $\mathbb{R}$), le vecteur dérivé en $t_0 = x_0$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$. Celui-ci n'est jamais nul puisque sa première coordonnée est non nulle. Ainsi, une paramétrisation cartésienne dérivable est toujours régulière. De plus, on retrouve le résultat bien connu : la tangente au point d'abscisse x_0 est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$.*

⋄ *Dans son interprétation cinématique, ce résultat est évident : le vecteur vitesse en un point, quand il est non nul, dirige la tangente à la trajectoire en ce point.*

2.2.3 Tangente en un point singulier

Pour obtenir une éventuelle tangente en un point singulier, le plus immédiat est de revenir à la définition en étudiant la direction limite de la droite $(M(t_0)M(t))$, par exemple en étudiant la limite du coefficient directeur de cette droite dans le cas où cette droite n'est pas parallèle à (Oy). En supposant que c'est le cas :

> En un point $M(t_0)$ singulier, on étudie $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.
> Si cette limite est un réel ℓ, la tangente en $M(t_0)$ existe et a pour coefficient directeur ℓ.
> Si cette limite existe mais est infinie, la tangente en $M(t_0)$ existe et est parallèle à (Oy).

Exercice 6. Trouver les points singuliers de l'arc $\left\{ \begin{array}{l} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{array} \right.$.
Donner une équation cartésienne de la tangente au point courant
(l'expression « au point courant » doit se lire : en un point quelconque de l'arc).

Solution. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est nul si et seulement si $6t = 6t^2 = 0$ ou encore $t = 0$. Tous les points de l'arc sont réguliers, à l'exception de $M(0)$.

Tangente en $M(0)$. Pour $t \neq 0$, $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{2t^3}{3t^2} = \dfrac{2t}{3}$. Quand t tend vers 0, cette expression tend vers 0. L'arc admet une tangente en $M(0)$ et cette tangente est la droite passant par $M(0) = (0,0)$ et de pente 0 : c'est l'axe (Ox) (d'équation $y = 0$).

Tangente en $M(t)$**,** $t \neq 0$**.** Pour $t \in \mathbb{R}^*$, l'arc admet en $M(t)$ une tangente dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$ ou aussi par le vecteur $\dfrac{1}{6t}\begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $t(x-3t^2)-(y-2t^3) = 0$ ou encore $y = tx - t^3$, ce qui reste vrai pour $t = 0$.

2.3 Dérivées d'ordre supérieur. Arcs de classe C^k

Jusque là, nous interprétions une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ comme une application qui, à un paramètre t associe un **point** $M(t) = (x(t), y(t))$. On peut tout autant concevoir qu'une telle application associe au réel t un **vecteur**. C'est en particulier le cas de la fonction $t \mapsto \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$ que nous allons continuer à dériver.

Définition 8. Soit f une application d'un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et k un entier supérieur ou égal à 1. Si on peut dériver k fois f sur D et si la k-ème dérivée de f sur D est continue sur D, on dit que f est de classe C^k sur D. On note $\dfrac{\overrightarrow{d^k f}}{dt^k}$ la dérivée k-ème.

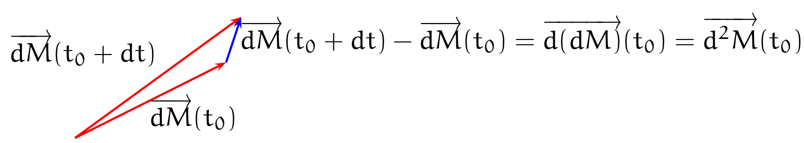
Par exemple, si $t \mapsto M(t)$ est un point en mouvement, le vecteur vitesse est le vecteur $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ et **le vecteur accélération** est le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$.

Nous nous servirons peu de dérivées successives en cette première partie d'année, mais nous pouvons déjà essayer de comprendre la notation et surtout l'emplacement des exposants 2 dans l'expression précédente. Nous avons déjà dérivé une fois M pour obtenir $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, puis on recommence en calculant d'abord un taux.

$$\frac{\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) - \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)}{t-t_0} = \frac{\overrightarrow{dM}(t) - \overrightarrow{dM}(t_0)}{dt \times (t-t_0)} = \frac{\Delta(\overrightarrow{dM})}{dt \times (\Delta t)}(t_0) = \text{« } \frac{\text{différence de } \overrightarrow{dM}}{dt \times (\text{différence de } t)} \text{ en } t_0 \text{ ».}$$

(Le « dt en t » et le « dt en t_0 » sont bien un seul et même dt à savoir une différence infinitésimale universelle entre deux valeurs de la variable). Puis, on fait tendre t vers t_0 et on obtient :

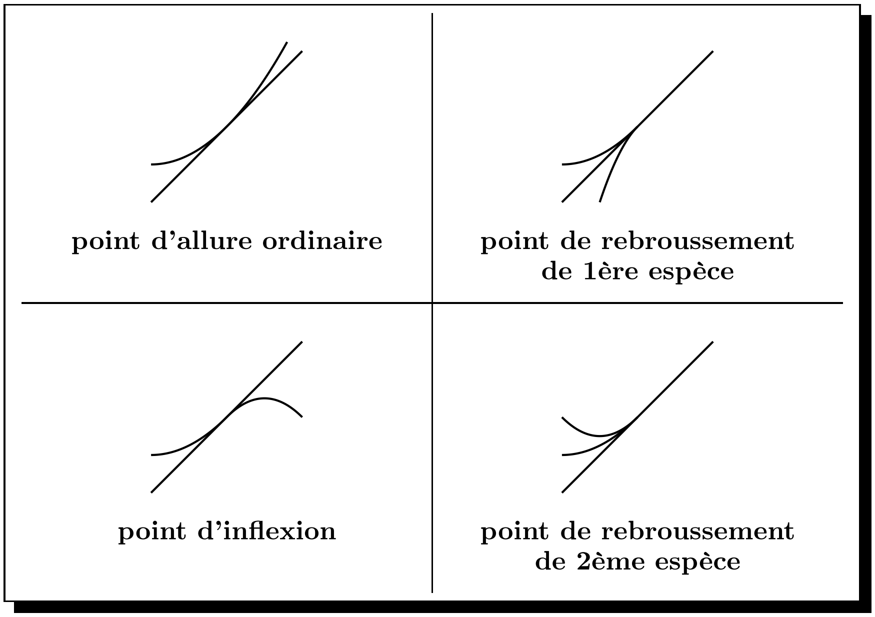
$$\frac{d(\overrightarrow{dM})}{dt.dt}(t_0) = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{(dt)^2}(t_0) = \text{« } \frac{\overrightarrow{\text{différence infinitésimale de différence infinitésimale de } M}}{(\text{différence infinitésimale de } t)^2} \text{ en } t_0 \text{ ».}$$



Ainsi, en dénominateur, on fait le produit de l'élément différentiel dt par lui-même et on le note $(dt)^2$ ou encore dt^2. En numérateur, on calcule une différence de différence et donc une double différence notée d^2. Cet exposant 2 signifie alors $d \circ d$ où d est l'« application différence ».

2.4 Position locale d'un arc par rapport à sa tangente

Quand la courbe arrive en $M(t_0)$, le long de sa tangente, on a plusieurs possiblités. La courbe peut continuer dans le même sens et ce faisant, traverser ou non sa tangente, ou bien rebrousser chemin le long de cette tangente en passant ou non de l'autre côté de cette tangente. Les deux premiers cas sont respectivement le cas du **point ordinaire** et du **point d'inflexion**. Dans les deux derniers cas, on parle de **point de rebroussement** de première ou de deuxième espèce (le point de rebroussement de 1ère espèce est l'« hirondelle »).



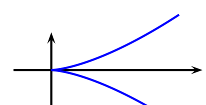
Intuitivement, **on ne peut rencontrer de point de rebroussement qu'en un point stationnaire**, car en un point où la vitesse est non nulle, on continue son chemin dans le même sens.

Le programme officiel de maths sup ne prévoit aucune connaissance spécifique sur le sujet, et on doit donc se débrouiller tout seul. Voici quelques exemples d'idées à avoir pour déterminer si un point est ordinaire, d'inflexion ou de rebroussement de première ou deuxième espèce (à allier avec un peu de bon sens géométrique).

Exercice 7. Etudier le point singulier de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3/3 \end{array}\right.$

1. grâce à des considérations de symétrie
2. en étudiant la position de la courbe par rapport à sa tangente
3. à l'aide des variations des fonctions x et y.

Solution.
Le vecteur dérivé $(2t, t^2)$ est nul si et seulement si $t = 0$. En ce point, puisque $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - (0)} = t/3$ tend vers 0 quand t tend vers 0, la tangente en $M(0) = (0, 0)$ est la droite passant par O et de coefficient directeur 0 : c'est l'axe (Ox).



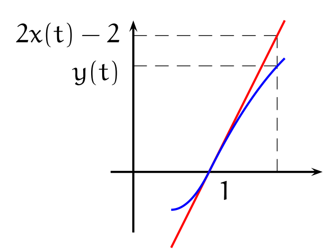
1. Pour tout réel t, $M(-t) = (t^2, -t^3/3) = s_{(Ox)}(M(t))$. Donc la portion de courbe obtenue quand t décrit $]-\infty, 0]$ est la symétrique par rapport à (Ox) de la portion de courbe obtenue quand t décrit $[0, +\infty[$. Puisque l'axe $(0x)$ est tangent à l'arc en $M(0)$, par symétrie par rapport à (Ox), $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

2. Pour tout réel t, $x(t)$ est un réel positif. Donc, le point $M(t)$ est constamment à droite de l'axe (Ox). Puisque l'axe (Ox) est tangent à l'arc en $M(0)$, $M(0)$ est un point de rebroussement. $y(t)$ est négatif quand $t \leq 0$ et positif quand $t \geq 0$. Quand t franchit 0, la courbe traverse sa tangente et $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

3. La fonction x décroît sur $]-\infty, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$. Puisque la tangente en $M(0)$ est l'axe (Ox), le point $M(0)$ est un point de rebroussement. La fonction y est croissante sur $\mathbb{R}$, donc la courbe traverse sa tangente et $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Exercice 8. Etudier la nature du point $M(1)$ de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = t^3 - t^2 + 1 \\ y = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3 \end{array}\right.$.

Solution. $M(1) = (1, 0)$. Pour tout réel non nul t, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = (3t^2 - 2t, -3t^2 + 14t - 9)$.
Pour $t = 1$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(1) = (1, 2)$ et la tangente en $M(1)$ est dirigée par le vecteur $(1, 2)$. Une équation de cette tangente est $2(x - 1) - (y - 0) = 0$ ou encore $y = 2x - 2$ (T_1). x' est strictement positive au voisinage de 1. Donc la fonction x croît et $M(1)$ est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.



Etudions alors la position relative de l'arc par rapport à sa tangente. Pour cela, comparons l'ordonnée $y(t)$ du point $M(t)$ d'abscisse $x(t)$ à l'ordonnée $2x(t)-2$ du point de (T_1) de même abscisse $x(t)$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t)-(2x(t)-2)=(-t^3+7t^2-9t+3)-2(t^3-t^2+1)+2=-3t^3+9t^2-9t+3=-3(t-1)^3.$$

L'expression $y(t)-(2x(t)-2)=-3(t-1)^3$ change de signe quand t franchit 1 ou encore, la courbe traverse sa tangente en $M(1)$. $M(1)$ est donc un point d'inflexion.

2.5 Dérivation d'expressions usuelles

Théorème 3. Soient f et g deux applications définies sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et soit $t_0 \in D$. On suppose que f et g sont dérivables en t_0. Alors,

❶ L'application $t \mapsto \overrightarrow{f(t)}.\overrightarrow{g(t)}$ est dérivable en t_0 et $\dfrac{d(\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g})}{dt}(t_0)=\overrightarrow{\dfrac{df}{dt}(t_0)}.\overrightarrow{g(t_0)}+\overrightarrow{f(t_0)}.\overrightarrow{\dfrac{dg}{dt}(t_0)}$.

❷ Si $\overrightarrow{f(t_0)} \neq \vec{0}$, l'application $t \mapsto \|\overrightarrow{f(t)}\|$ est dérivable en t_0 et dans ce cas, $\dfrac{d\|\overrightarrow{f}\|}{dt}(t_0)=\dfrac{\overrightarrow{f(t_0)}.\overrightarrow{\frac{df}{dt}(t_0)}}{\|\overrightarrow{f(t_0)}\|}$.

❸ L'application $t \mapsto [\overrightarrow{f(t)},\overrightarrow{g(t)}]$ est dérivable en t_0 et $\dfrac{d[\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}]}{dt}(t_0)=[\overrightarrow{\dfrac{df}{dt}(t_0)},\overrightarrow{g(t_0)}]+[\overrightarrow{f(t_0)},\overrightarrow{\dfrac{dg}{dt}(t_0)}]$.

Démonstration. Les trois fonctions considérées sont des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

❶ Posons $\overrightarrow{f}=(x_1,y_1)$ et $\overrightarrow{g}=(x_2,y_2)$. Alors, $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}=x_1x_2+y_1y_2$ est dérivable en t_0 et

$$(\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g})'(t_0)=(x_1'x_2+x_1x_2'+y_1'y_2+y_1y_2')(t_0)=(\overrightarrow{f}'.\overrightarrow{g}+\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}')(t_0).$$

❷ La fonction $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}$ est positive, strictement positive en t_0 et est dérivable en t_0. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, la fonction $\|\overrightarrow{f}\|=\sqrt{\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}}$ est dérivable en t_0 et

$$(\|\overrightarrow{f}\|)'(t_0)=\frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}}}(\overrightarrow{f}'.\overrightarrow{f}+\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}')(t_0)=\frac{\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}'}{\|\overrightarrow{f}\|}(t_0).$$

❸ $[\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}]=x_1y_2-x_2y_1$ est dérivable en t_0 et

$$([\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}])'(t_0)=(x_1'y_2+x_1y_2'-x_2'y_1-x_2y_1')(t_0)=([\overrightarrow{f}',\overrightarrow{g}]+[\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}'])(t_0).$$

❏

Par exemple, l'application $t \mapsto M(t)=(\cos t,\sin t)$ est une paramétrisation du cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout réel t, on a $OM(t)=1$ ou encore $\|\overrightarrow{OM(t)}\|=1$. En dérivant cette fonction constante, on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM(t)}.\overrightarrow{\dfrac{dM}{dt}(t)}=0$ et on retrouve le fait que la tangente au cercle en le point $M(t)$ est orthogonale au rayon $\overrightarrow{OM(t)}$.

De manière générale, les résultats précédents sont fréquemment utilisés pour trouver des propriétés de la tangente en un point d'une courbe. Nous les réutiliserons dans le chapitre « Coniques » pour découvrir des propriétés remarquables de la tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Théorème 4. Soient f, g deux applications définies sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et λ une application de D dans $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in D$. On suppose que f, g et λ sont dérivables en t_0. Alors, $f+g$ et λf sont dérivables en t_0, et

$$\overrightarrow{\frac{d(f+g)}{dt}}(t_0)=\overrightarrow{\frac{df}{dt}}(t_0)+\overrightarrow{\frac{dg}{dt}}(t_0)\text{ et }\overrightarrow{\frac{d(\lambda.f)}{dt}}(t_0)=\lambda'(t_0)\overrightarrow{f(t_0)}+\lambda(t_0)\overrightarrow{\frac{df}{dt}}(t_0).$$

Démonstration. Posons $\overrightarrow{f}=(x_1,y_1)$ et $\overrightarrow{g}=(x_2,y_2)$. Alors,

$$(\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g})'(t_0)=(x_1+x_2,y_1+y_2)'(t_0)=(x_1'+x_2',y_1'+y_2')(t_0)=\overrightarrow{f}'(t_0)+\overrightarrow{g}'(t_0).$$

et aussi $(\lambda\overrightarrow{f})'(t_0)=(\lambda x_1,\lambda y_1)'(t_0)=(\lambda'x_1+\lambda x_1',\lambda'y_1+\lambda y_1')(t_0)=\lambda'(x_1,y_1)(t_0)+\lambda(x_1',y_1')(t_0)=(\lambda'\overrightarrow{f}+\lambda\overrightarrow{f}')(t_0)$. ❏

De même, toujours en travaillant sur les coordonnées, on établit aisément que

Théorème 5. Soient $t \mapsto \theta(t)$ une application dérivable sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un domaine D' de $\mathbb{R}$ et $u \mapsto f(u)$ une application dérivable sur D' à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $f \circ \theta$ est dérivable sur D et, pour $t_0 \in D$,

$$\overrightarrow{\frac{d(f\circ\theta)}{dt}}(t_0)=\theta'(t_0).\overrightarrow{\frac{df}{dt}}(\theta(t_0)).$$

3 Etude des branches infinies

Dans ce paragraphe, l'arc $f : t \mapsto M(t)$ est défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe. t_0 désigne l'une des bornes de I et n'est pas dans I. t_0 est soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Définition 9. Il y a *branche infinie* en t_0, dès que l'une au moins des deux fonctions $|x|$ ou $|y|$ tend vers l'infini quand t tend vers t_0. Il revient au même de dire que $\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

Dans la pratique, on mène l'étude suivante :

❶ Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et $y(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

❷ Si, quand t tend vers t_0, $y(t)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et $x(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $x = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

❸ Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$, il faut affiner. On étudie $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ avec les sous-cas suivants :

a. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0, la courbe admet une **direction asymptotique** d'équation $y = 0$ ou encore une **branche parabolique** de direction (Ox).

b. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe admet une **direction asymptotique** d'équation $x = 0$ ou encore une **branche parabolique** de direction (Oy).

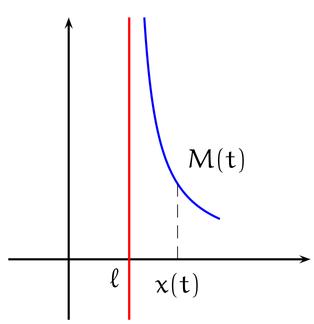
c. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers un réel **non nul** a, la courbe admet une **direction asymptotique** d'équation $y = ax$. Il faut encore affiner l'étude. On étudie alors $\lim_{t \to t_0}(y(t) - ax(t))$ avec les deux sous-cas :

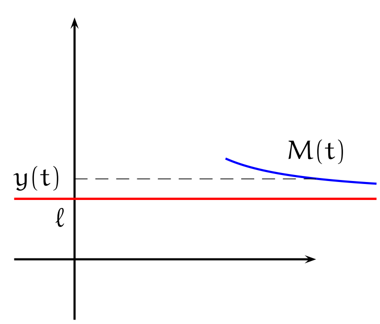
(i) Si $y(t) - ax(t)$ tend vers un réel b (nul ou pas), alors $\lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - (ax(t) + b)) = 0$ et la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

(ii) Si $y(t) - ax(t)$ tend vers $+\infty$, ou $-\infty$ ou n'a pas de limite, la courbe n'a qu'une direction asymptotique d'équation $y = ax$, mais n'admet pas de droite asymptote.

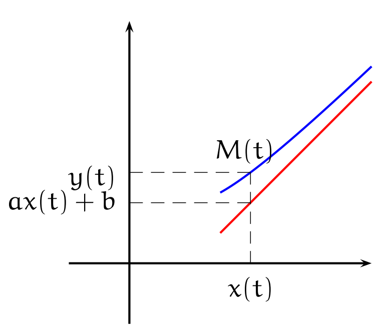
On trouvera des exemples d'études de branches infinies dans les exercices du paragraphe suivant.

On peut de plus vouloir étudier la **position relative** d'une courbe et d'une droite asymptote. Dans le cas d'une droite asymptote d'équation $x = \ell$ (asymptote parallèle à (Oy)), on veut savoir si, à t donné, le point $M(t)$ est « à gauche ou à droite » de cette droite, ou encore si son abscisse $x(t)$ est plus petite ou plus grande que que le réel ℓ. On étudie pour cela le signe de $x(t) - \ell$ en fonction de t. De même, dans le cas d'une droite asymptote d'équation $y = \ell$ (asymptote parallèle à (Oy)), la connaissance du signe de $y(t) - \ell$ permet de savoir si le point $M(t)$ est « au-dessus ou au-dessous » de cette droite.





Dans le cas d'une droite asymptote d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, on doit comparer l'ordonnée $y(t)$ du point de la courbe $M(t)(x(t), y(t))$ à l'ordonnée $ax(t) + b$ du point de la droite de même abscisse $x(t)$. Le signe $y(t) - (ax(t) + b)$ à t donné, permet donc de savoir si le point $M(t)$ est au-dessus ou au-dessous de la droite d'équation $y = ax + b$.



Les études de signes envisagées ici sont **globales**, c'est-à-dire que l'on détermine un signe pour tout réel t de I. Dans la pratique, il n'est pas si fréquent de pouvoir mener à bien une telle étude (on est très loin de savoir résoudre toute inéquation). Par la suite, nous découvrirons de nouveaux outils très efficaces, permettant d'effectuer une étude **locale** (c'est-à-dire pour des réels t au voisinage de t_0), type d'étude bien plus fréquemment réalisable. Ces nouveaux outils sont les développements limités.

4 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Dans la pratique, les arcs sont traités de manière différente à l'écrit et à l'oral. A l'écrit, l'étude d'un arc est souvent détaillée en un grand nombre de petites questions. Par contre, à l'oral un énoncé peut prendre la forme « étudier et construire la courbe... », ou plus simplement « construire la courbe... ».

Dans ce cas, on peut adopter le plan d'étude qui suit. Ce plan n'est pas universel et n'est qu'une proposition. Chaque élève ou professeur a ses petites manies, son ordre personnel et d'autre part, pour deux arcs différents, il peut être utile d'adopter deux plans d'étude différents.

① **Domaine de définition** de l'arc (le point $M(t)$ est défini si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont définis) et détermination d'un **domaine d'étude** par utilisation de symétries, périodicités ... A ce sujet, les symétries ou périodicités sont fréquemment étudiées **avant** la recherche du domaine de définition, celles-ci allégeant souvent la recherche de ce domaine.

② **Dérivée** de $t \mapsto M(t)$ et étude des **variations conjointes** des fonctions x et y.

③ Reporter les résultats obtenus dans un **tableau de variations conjointes** des fonctions x et y. L'ordre des lignes est une question de goût. On peut vouloir voir évoluer les fonctions x et y côte à côte et d'autre part, vouloir que le signe de x' soit accolé aux variations de x et de même pour y. Cela donne alors :

t	
$x'(t)$	
x	
y	
$y'(t)$	

Ce tableau n'est pas le tableau de variations de la fonction x ou le tableau de variations de la fonction y, mais des deux ensemble. Il nous montre l'évolution du point $M(t)$. Par suite, pour une valeur de t donnée, on doit lire verticalement des résultats concernant et x, et y. Par exemple, x tend vers $+\infty$, pendant que y « vaut » 3.

Les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ founissent les points à tangentes verticales et les valeurs de t pour lesquelles $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ fournissent les points à tangentes horizontales. Enfin, les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$ fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.

④ **Etude des points singuliers.**

⑤ **Etude des branches infinies.**

⑥ **Construction méticuleuse de la courbe**. On place dans l'ordre les deux axes et les unités. On construit ensuite toutes les droites asymptotes (ou plus généralement toutes les courbes asymptotes). On place ensuite les points importants avec leur tangentes (points à tangentes verticales, horizontales, points singuliers, points multiples, points d'intersection avec une droite asymptote, ...). On n'hésite pas à écrire explicitement sur les axes (Ox) et (Oy) les coordonnées des points importants, s'il n'y en a pas trop. Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer l'arc grâce aux règles suivantes :

Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut
Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas
Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut
Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

⑦ Recherche des **points multiples** s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

Exercice 9. Construire la courbe $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$.

Solution. On note $(\mathscr{C})$ la courbe à construire.

• **Domaine d'étude.** Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ est défini si et seulement si $t \neq \pm 1$. Aucune réduction intéressante du domaine n'apparaît clairement et on étudie donc sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

• **Variations conjointes des coordonnées.** La fonction x est dérivable sur D, et pour $t \in D$,

$$x'(t) = \frac{3t^2(t^2-1) - t^3(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}.$$

La fonction x est donc strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

La fonction y est dérivable sur $D \cup \{-1\}$ et pour $t \in D \cup \{-1\}$,

$$y'(t) = \frac{(6t-2)(t-1) - (3t^2-2t)}{3(t-1)^2} = \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2}.$$

La fonction y est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}]$ et sur $[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, strictement décroissante sur $[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$ et sur $]1, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Les fonctions x' et y' ne s'annulent jamais simultanément et l'arc est donc régulier. En particulier, il n'y a pas de point de rebroussement. La tangente en un point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}, \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2})$ ou encore par le vecteur $(\frac{3t^2(t^2-3)}{(t+1)^2}, 3t^2-6t+2)$.

• **Tangentes parallèles aux axes.** y' s'annule en $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. En les points $M(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $M(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$, la courbe admet une tangente parallèle à (Ox). On a

$$\begin{aligned} x(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) &= (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^3/((1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1) = (1 - \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}})/(-\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}) = \frac{6\sqrt{3}-10}{-6+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{33}(6\sqrt{3}-10)(-6-\sqrt{3}) = \frac{42-26\sqrt{3}}{33} = -0.09\ldots, \end{aligned}$$

et de même,

$$y(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(3 - \sqrt{3} - 2)/(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3}) = \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = 0,17\ldots$$

Puis, par un calcul conjugué (c'est-à-dire en remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$ en début de calcul, et donc aussi en milieu et en fin de calcul), on a $x(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{42+26\sqrt{3}}{33} = 2.63\ldots$ et $y(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} = 2,48\ldots$.

x' s'annule en 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. En les points $M(0) = (0, 0)$, $M(\sqrt{3}) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+7\sqrt{3}}{6}) = (2,59\ldots, 2,52\ldots)$ et $M(-\sqrt{3}) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-7\sqrt{3}}{6}) = (-2,59\ldots, -1,52\ldots)$, il y a une tangente parallèle à (Oy).

• **Etude en l'infini.** Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes deux vers $+\infty$ et il y a donc branche infinie. Etudions $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

Pour $t \in D \setminus \{0\}$, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} \times \frac{t^2-1}{t^3} = \frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}$. Cette expression tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Pour $t \in D$, $y(t) - x(t) = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} - \frac{t^3}{t^2-1} = \frac{t(3t-2)(t+1) - 3t^3}{3(t-1)(t+1)} = \frac{t^2-2t}{3(t-1)(t+1)}$. Cette expression tend vers $\frac{1}{3}$ quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} (y(t) - (x(t) + \frac{1}{3})) = 0$. Quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la droite

(Δ) d'équation $y = x + \dfrac{1}{3}$ est asymptote à la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Etudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ). Pour $t \in D$, $y(t) - (x(t) + \dfrac{1}{3}) = \dfrac{t^2 - 2t}{3(t-1)(t+1)} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{-2t+1}{3(t-1)(t+1)}$.

t	$-\infty$	-1	$1/2$	1	$+\infty$
signe de $y(t) - (x(t) + \frac{1}{3})$	$+$	‖ $-$	$+$	‖ $-$	
position relative	$\mathcal{C}$ au-dessus de (Δ)	‖ $\mathcal{C}$ au-dessous de (Δ)	$\mathcal{C}$ au-dessus de (Δ)	‖ $\mathcal{C}$ au-dessous de (Δ)	

$\mathscr{C}$ et (Δ) se coupent au point $M(1/2) = (-1/6, 1/6) = (-0,16\ldots, 0,16\ldots)$.

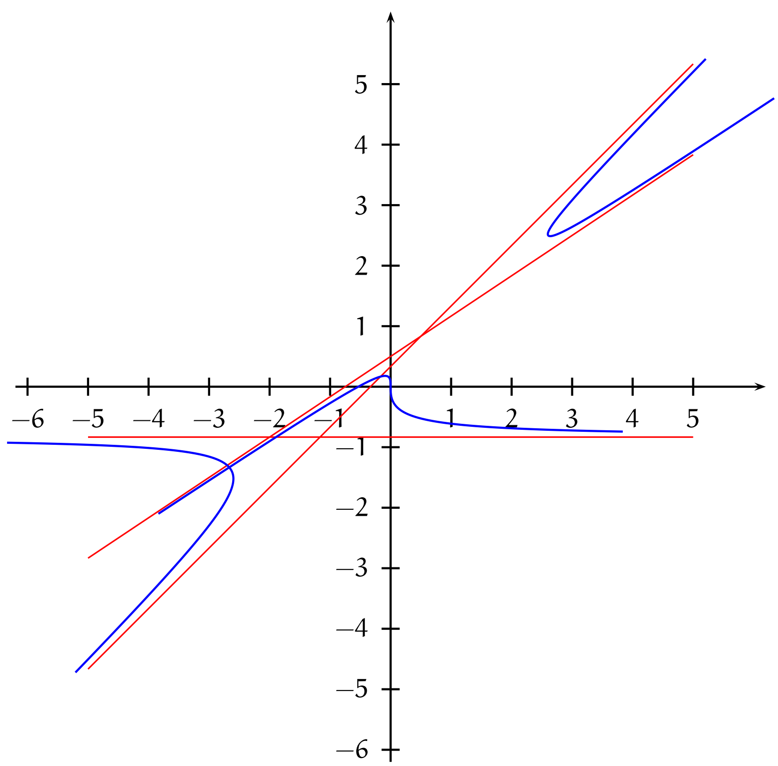
• **Etude en -1.** Quand t tend vers -1, $y(t)$ tend vers $-5/6$, et $x(t)$ tend vers $-\infty$ en -1^- et vers $+\infty$ en -1^+. La droite d'équation $y = -\dfrac{5}{6}$ est asymptote à $\mathscr{C}$. La position relative est fournie par le signe de $y(t) + \dfrac{5}{6} = \dfrac{6t^2+t-5}{6(t-1)}$.

• **Etude en 1.** Quand t tend vers 1, x et y tendent vers l'infini, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}$ tend vers $\dfrac{2}{3}$ et $y(t) - \dfrac{2}{3}x(t) = \dfrac{t^3+t^2-2t}{3(t^2-1)} = \dfrac{t+2}{3(t+1)}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$. La droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe...

• **Tableau de variations conjointes.**

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$1+\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	$-2,59\ldots$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$2,59\ldots$	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗		↗		↗	$0,17\ldots$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2,48\ldots$	↗		↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	

• **Intersection avec les axes.** $x(t) = 0$ équivaut à $t = 0$. La courbe coupe (Oy) au point $M(0) = (0,0)$. $y(t) = 0$ équivaut à $t = 0$ ou $t = \dfrac{2}{3}$. La courbe coupe (Ox) au point $M(0) = (0,0)$ et $M(\dfrac{2}{3}) = (-\dfrac{8}{9}, 0)$.



Le tracé fait apparaître un **point double**. Je vous laissons le chercher (et le trouver).

⩾ **Commentaire** . *Oui, c'est très long !*

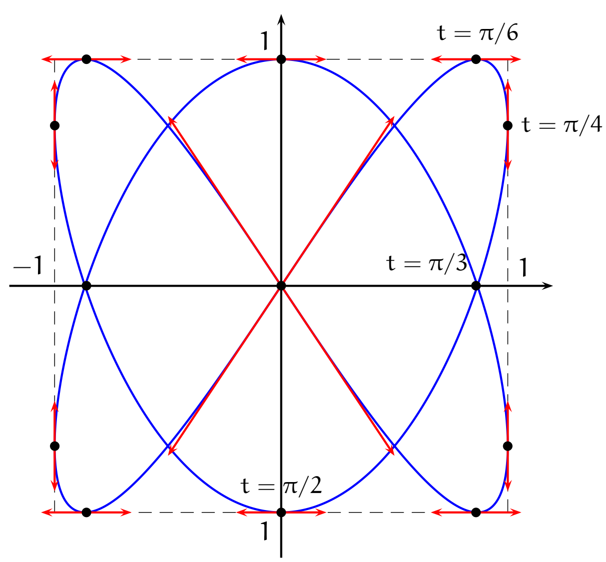
Exercice 10. Construire la courbe $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$ (courbe LISSAJOUS).

Solution.

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe et $M(t+2\pi) = M(t)$. On obtient la courbe complète quand t décrit $[-\pi, \pi]$.
Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t) = s_O(M(t))$, puis pour $t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$. On étudie et on construit l'arc quand t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par symétrie centrale de centre O. Puisque pour tout réel t, $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, l'axe $(0x)$ est également axe de symétrie de la courbe.
• Pour tout réel t, $|x(t)| \leq 1$ et $|y(t)| \leq 1$. La support de l'arc est donc contenu dans le carré
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.
• D'après les propriétés usuelles de la fonction sinus, la fonction x est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, et de même, la fonction y croît sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ et décroît sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.
• Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = (2\cos(2t), 3\cos(3t))$. Par suite,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow t \in (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}) \cap (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}) = \varnothing.$$

Donc, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ ne s'annule pas et l'arc est régulier. La tangente en tout point est dirigée par le vecteur $(2\cos(2t), 3\cos(3t))$.
Cette tangente est parallèle à (Ox) si et seulement si $\cos(3t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{2}$, et cette tangente est parallèle à (Oy) si et seulement si $\cos(2t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = \frac{\pi}{4}$.
• La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(2, 3)$ et a donc pour coefficient directeur $3/2$.
• Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $M(t) \in (Ox)$ si et seulement si $\sin(3t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{3}$. La tangente en
$M(\pi/3)$ est dirigée par le vecteur $(-1, -3)$ et a donc pour coefficient directeur 3.



---

5 Courbes en polaires

5.1 Généralités

5.1.1 Représentation polaire d'une courbe

Rappelons tout d'abord la définition précise des coordonnées polaires. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour θ réel, on pose $\overrightarrow{u}_\theta = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\theta = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{u}_{\theta+\pi/2}$. M étant un point du plan, on dit que $[r, \theta]$ est un couple de coordonnées polaires du point M si et seulement si $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\theta$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ M[r,\theta] \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}_\theta \Leftrightarrow M = O + r\overrightarrow{u}_\theta.}$$

Nous allons maintenant faire varier ce point en supposant que r et θ sont des fonctions d'un paramètre t (et donc les lettres r et θ peuvent tout à la fois désigner des coordonnées polaires de points ou des fonctions). On a alors la description la plus générale d'une courbe en polaires, D étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f : & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & M(t) = O + r(t)\overrightarrow{u(\theta(t))} \end{array}.$$

⩥ Commentaire .

◇ *Si $\mathscr{C}$ est le support de l'arc f, la fonction f s'appelle une **représentation polaire** de la courbe $\mathscr{C}$.*

◇ $r(t)$ *n'est pas nécessairement la distance* $FM(t)$ *car, la fonction* r *peut tout à fait prendre des valeurs strictement négatives. En général,* $FM(t) = |r(t)|$. *Il est essentiel d'aller revoir tout ce qui concerne les coordonnées polaires d'un point, avant de lire ce qui suit.*

◇ *Grâce aux relations usuelles entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires d'un point, on peut à tout moment écrire une représentation polaire sous la forme d'une représentation paramétrique classique :*

$$t \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{array} \right..$$

5.1.2 Calcul de la vitesse et de l'accélération en polaires

Pour pouvoir dériver un arc en polaires, il faut d'abord savoir dériver les vecteurs $\overrightarrow{u}_\theta = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ en tant que fonction de θ :

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta}(\theta) = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{v}_\theta = \overrightarrow{u}_{\theta+\pi/2}.\ \text{puis, } \frac{d\overrightarrow{v}_\theta}{d\theta}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\theta+\pi/2+\pi/2} = \overrightarrow{u}_{\theta+\pi} = -\overrightarrow{u}_\theta.$$

On peut continuer à dériver et on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} = \overrightarrow{v}_\theta,\ \dfrac{d\overrightarrow{v}_\theta}{d\theta} = -\overrightarrow{u}_\theta, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{d^n\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta^n} = \overrightarrow{u}_{\theta+n\frac{\pi}{2}}. \end{array}}$$

Soient alors r et θ deux fonctions deux fois dérivables sur un domaine D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après les différents résultats de la page 10, la fonction $t \mapsto M(t) = O + r(t)\overrightarrow{u(\theta(t))}$ est deux fois dérivables sur D et,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = r'\overrightarrow{u}_\theta + r\theta'\overrightarrow{v}_\theta,$$

puis

$$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = (r''\overrightarrow{u}_\theta + r'\theta'\overrightarrow{v}_\theta) + (r'\theta'\overrightarrow{v}_\theta + (r\theta''\overrightarrow{v}_\theta - r\theta'^2\overrightarrow{u}_\theta)) = (r'' - r\theta'^2)\vec{u}_\theta + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{v}_\theta.$$

Donc,

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = r'\vec{u}_\theta + r\theta'\vec{v}_\theta \text{ et } \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2)\vec{u}_\theta + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{v}_\theta.}$$

5.2 Courbes d'équations polaires $r = f(\theta)$

5.2.1 Généralités

On se place dorénavant dans le cas particulier où le paramètre t est « l »'angle polaire θ lui même, ce qui revient à dire que la fonction θ du paragraphe précédent est définie par $\theta(t) = t$ (et donc $\theta'(t) = 1$ et $\theta''(t) = 0$). En renotant de manière plus cohérente θ la lettre t, on obtient la représentation polaire d'une courbe $\mathscr{C}$ sous la forme

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & M(t) = O + r(\theta)\vec{u}_\theta \end{array},$$

ou encore, sous forme complexe $\theta \mapsto r(\theta)e^{i\theta}$ ou sous la forme d'une représentation paramétrique classique
$\theta \mapsto \left\{\begin{array}{l} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) \end{array}\right.$.

Dans cette présentation, la lettre r désigne à la fois la première des deux coordonnées polaires du point $[r, \theta]$ et aussi la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$, cette confusion des notations étant résumée dans l'égalité $r = r(\theta)$. Cette notation unique pour deux objets différents se révèle parfois pratique, pour énoncer et mémoriser des formules par exemple. Mais elle est parfois source d'incompréhension. Dans ce dernier cas, il faut différencier les notations en notant par exemple f la fonction. L'égalité $r = f(\theta)$ s'appelle alors une **équation polaire** de la courbe $\mathscr{C}$.

Une telle équation ($r = f(\theta)$) ressemble à une équation cartésienne ($y = f(x)$). Mais la non unicité d'un couple de coordonnées polaires en fait un objet plus compliqué.

Considérons par exemple la courbe d'équation polaire $r = \theta$ (spirale d'ARCHIMÈDE) correspondant à la fonction $f\ :\ \theta \mapsto \theta$. Les points de coordonnées polaires $[0, 0]$ ou $[1, 1]$ sont bien sûr sur cette courbe, mais le point de coordonnées polaires $[-2\pi, \pi]$ y est aussi (car $[-2\pi, \pi] = [2\pi, 2\pi]$) et pourtant $-2\pi \neq \pi$. Ainsi, si en cartésien on peut écrire $M(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$, ce n'est pas le cas en polaires, même si bien sûr, $r = f(\theta) \Rightarrow M[r, \theta] \in \mathscr{C}$.

> Soient $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ et M un point du plan
> $(M \in \mathscr{C}) \Leftrightarrow$(**il existe** un couple $[r, \theta]$ de coordonnées polaires de M tels que $r = f(\theta)$).

5.2.2 Tangentes à une courbe d'équation $r = f(\theta)$

Soient r une fonction dérivable sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ ou encore de représentation polaire $\theta \mapsto O + r(\theta)\overrightarrow{u}_\theta$. On a

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = r'\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v}.}$$

(ce qui signifie $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + r(\theta)\overrightarrow{v}_\theta$).

Déterminons alors les éventuels points singuliers. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{v}_\theta$ ne sont pas colinéaires,

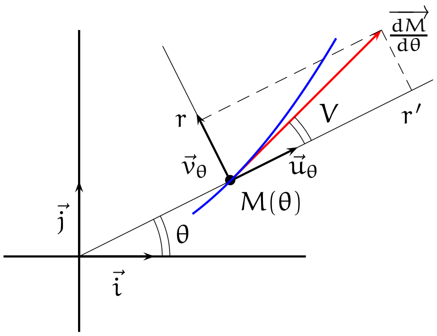
$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow r(\theta) = r'(\theta) = 0$$

(si par exemple $r(\theta) \neq 0$, alors $\overrightarrow{v}_\theta = -\dfrac{r'(\theta)}{r(\theta)}\overrightarrow{u}_\theta$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}_\theta$, ce qui n'est pas). Maintenant, comme $r(\theta) = 0 \Leftrightarrow M(\theta) = O$, on en déduit

Théorème 6 (Tangente en un point distinct de l'origine). $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ où r est une application dérivable sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

❶ Tout point de $\mathscr{C}$ distinct de l'origine O est un point régulier.

❷ Si $M(\theta) \neq O$, la tangente en $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + r(\theta)\overrightarrow{v}_\theta$.



(Le dessin ci-contre est fait dans le cas $r > 0$). Le repère $(M(\theta), \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est le **repère polaire** en $M(\theta)$. Dans ce repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\dfrac{dM}{d\theta}}$ sont (r', r).

On note traditionnellement V l'angle $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{\dfrac{dM}{d\theta}})$ et α l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\dfrac{dM}{d\theta}})$ de sorte que $\boxed{\alpha = V + \theta}$. On a alors

$$\boxed{\cos(V) = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \text{ et } \sin(V) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.}$$

Ces égalités définissent V mudulo 2π. Ensuite, (puisque $r \neq 0$) on a

$$\boxed{\text{cotan}(V) = \frac{r'}{r}}$$

et si de plus $r' \neq 0$,

$$\boxed{\tan(V) = \frac{r}{r'}}.$$

Les deux dernières égalités déterminent V modulo π, ce qui est suffisant pour construire une droite (la tangente), mais insuffisant pour construire un vecteur (le vecteur $\overrightarrow{\dfrac{dM}{d\theta}}$).

⩥ **Commentaire** . *Ainsi, tout point distinct de O de la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ est un point régulier. Une conséquence pratique de ce résutat est qu'* ***un point distinct de l'origine n'est pas un point de rebroussement****. On ne peut trouver de point de rebroussement qu'en O.*

On sait donc tracer la tangente en un point distinct de l'origine. Supposons maintenant que pour un certain réel θ_0, la courbe passe par l'origine O. On suppose comme d'habitude que l'arc est localement simple, ce qui revient à dire qu'au voisinage de θ_0, la fonction r ne s'annule qu'en θ_0. Dans ce cas, pour $\theta \neq \theta_0$, le vecteur

$$\frac{1}{r(\theta)}\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)} = \frac{1}{r(\theta)}\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{u}_\theta,$$

dirige la droite $(M(\theta_0)M(\theta))$. Or, quand θ tend vers θ_0, $\overrightarrow{u}_\theta$ tend vers $\overrightarrow{u}_{\theta_0}$,ce qui montre que :

Théorème 7 (tangente à l'origine). Si $M(\theta_0) = O$, la tangente en $M(\theta_0)$ est la droite d'angle polaire θ_0. Une équation cartésienne de cette droite dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donc $y = \tan(\theta_0)x$ si $\theta_0 \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $x = 0$ si $\theta_0 \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

⩥ **Commentaire** . *Si r s'annule en changeant de signe, le point $M(\theta)$ franchit l'origine en tournant dans le sens direct : c'est un point d'allure ordinaire. Si r s'annule sans changer de signe, en arrivant en O, on rebrousse chemin en traversant la tangente (puisque l'on tourne toujours dans le même sens) : c'est un rebroussement de première espèce.* ***En l'origine****, on ne peut avoir qu'un* ***point d'allure ordinaire*** *ou un* ***rebroussement de première espèce****.*

Exercice10.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = 1 + 2\cos(\theta)$.
Déterminer l'angle polaire de la tangente à $\mathscr{C}$ en les points $M(\dfrac{\pi}{2})$ et $M(\dfrac{2\pi}{3})$.
Dans chaque cas, fournir une équation cartésienne de la tangente considérée.

Solution.
1) $r' = -2\sin(\theta)$ et donc $r'(\dfrac{\pi}{2}) = -2$. De plus, $r(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$. Donc, modulo π

$$\alpha = \theta + V = \theta + \arctan(\frac{r}{r'}) = \frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{1}{-2}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{2}) = \arctan(2).$$

L'angle polaire de la tangente en $M(\dfrac{\pi}{2})$ est donc $\boxed{\alpha = \arctan(2)}$. Cette tangente est dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}}(\frac{\pi}{2}) = -2\overrightarrow{u}_{\pi/2} + 1.\overrightarrow{v}_{\pi/2} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$$

et passe par le point $M(\frac{\pi}{2}) = (r(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}), r(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})) = (0, 1)$. Une équation cartésienne de cette tangente est donc $2.(x-0) - 1(y-1) = 0$ ou encore $y = 2x + 1$.

2) $r(\frac{2\pi}{3}) = 0$. Donc, la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(\frac{2\pi}{3})$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ (ou aussi $-\frac{\pi}{3}$) ou encore la droite d'équation cartésienne $y = \tan(\frac{2\pi}{3})x = -\sqrt{3}x$.

Exercice11. Etudier le point $M(\frac{\pi}{2})$ dans les deux cas suivants : **1)** $r = \cos(\theta)$, **2)** $r = \cos^2(\theta)$.

Solution. Dans les deux cas, $M(\frac{\pi}{2}) = O$ et dans les deux cas, la tangente en $M(\frac{\pi}{2})$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

Dans le premier cas, r change de signe en franchissant $\frac{\pi}{2}$, de positif à négatif. Ainsi, en tournant toujours dans le même sens, on se rapproche de l'origine, on la franchit et on s'en réécarte : c'est un point d'allure ordinaire.
Dans le deuxième cas, r ne change pas de signe. On ne franchit pas l'origine. On rebrousse chemin tout en tournant toujours dans le même sens : c'est un point de rebroussement de première espèce.

5.3 Plan d'étude et exemples d'études

5.3.1 Réduction du domaine d'étude

On doit connaître l'effet de transformations géométriques usuelles sur les coordonnées polaires d'un point. M étant le point de coordonnées polaires $[r, \theta]$:

Réflexion d'axe (Ox) : $s_{(Ox)}(M)[r, -\theta]$.
Réflexion d'axe (Oy) : $s_{(Oy)}(M)[r, \pi - \theta]$.
Symétrie centrale de centre O : $s_O(M)[r, \theta + \pi] = [-r, \theta]$.
Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $s_D(M)[r, \frac{\pi}{2} - \theta]$.
Réflexion d'axe la droite (D') d'équation $y = -x$: $s_{D'}(M)[-r, \frac{\pi}{2} - \theta] = [r, -\frac{\pi}{2} - \theta]$.
Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O : $r_{O,\pi/2}(M)[r, \theta + \frac{\pi}{2}]$.
Rotation d'angle φ autour de O : $r_{O,\varphi}(M)[r, \theta + \varphi]$.

Exercice 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos^2(\theta)$.

Solution. La fonction r est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Donc, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

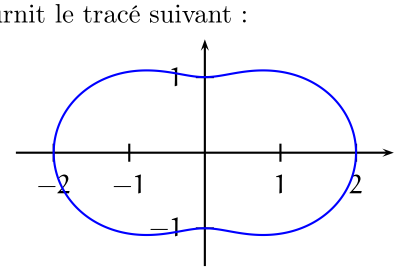
La courbe complète est donc obtenue quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple.
La fonction r est paire. Donc, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la courbe sur $[0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).
$r(\pi - \theta) = r(\theta)$. Donc, pour $\theta \in [0, \pi]$,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox). La machine fournit le tracé suivant :



➢ **Commentaire**. *La plus petite période strictement positive de la fonction* r *n'est pas* 2π, *mais* π. *Néanmoins, il ne faut surtout pas dire : « puisque* r *est* π*-périodique, on étudie sur un intervalle de longueur* π *» et s'arrêter là. On n'obtient pas la courbe complète quand* θ *décrit* $[0,\pi]$, *car le point* $M(\theta)$ *n'a fait qu'un demi-tour. La* π*-périodicité peut s'utiliser proprement :* $M(\theta+\pi) = [r(\theta+\pi), \theta+\pi] = [r(\theta), \theta+\pi] = s_O(M(\theta))$. *Donc, on étudie et on construit la courbe quand* θ *décrit* $[0,\pi]$ *et on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre* O. *Enfin, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'exercice 10, page 15, cette symétrie est « contenue dans les autres » déjà découvertes :* $M(\theta+\pi) = s_{(Ox)}(M(-\pi-\theta)) = s_{(Ox)}(s_{(Oy)}(M(\pi-(-\pi-\theta)))) = s_O(M(\theta))$.

Exercice 13. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = \cos(\theta) + \sin(\theta)$.

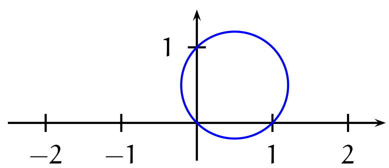
Solution. La fonction r est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Donc, on obtient la courbe complète quand t décrit un intervalle de longueur 2π au choix. La fonction r est π-antipériodique ($r(\theta+\pi) = -r(\theta)$). Donc,

$$M(\theta+\pi) = [r(\theta+\pi), \theta+\pi] = [-r(\theta), \theta+\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

Donc, on obtient la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur π au choix. En raison des calculs qui suivent, on choisit l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (intervalle de longueur π dont le milieu est $\frac{\pi}{4}$).
Pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

$$r(\frac{\pi}{2}-\theta) = [r(\frac{\pi}{2}-\theta), \frac{\pi}{2}-\theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2}-\theta] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

Donc, on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la première bissectrice.
La machine fournit le tracé suivant :



➢ **Commentaire**. *La machine était bien superflue pour tacer cette courbe car nous savons que le cercle d'équation cartésienne* $x^2+y^2-2ax = 0$ *(cercle passant par* O *et centré sur* (Ox)*) a pour équation polaire* $r = 2a\cos(\theta)$. *Ici, la courbe d'équation polaire* $r = \cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$ *n'est autre que l'image du cercle d'équation polaire* $r = \sqrt{2}\cos(\theta)$ *par la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *(montrez-le).*

Exercice 13. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = \tan(\frac{2\theta}{3})$.

Solution. $\frac{2\theta}{3} \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\mathbb{Z}$. La fonction r est donc définie sur $D_r = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.
La fonction r est 6π-périodique. Donc, pour $\theta \in D_r$, $M(\theta+6\pi) = [r(\theta+6\pi), \theta+6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta)$. Donc, on obtient la courbe complète quand θ décrit l'intersection de D_r avec un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi] \setminus \{-\frac{9\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\}$.
La fonction r est impaire. Donc, pour $\theta \in [-3\pi, 3\pi] \setminus \{-\frac{9\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\}$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi-\theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

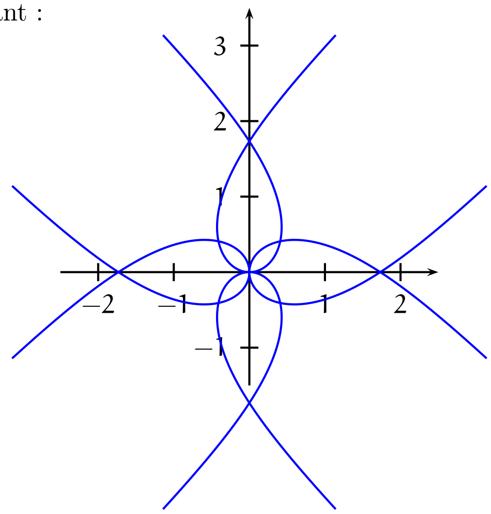
Donc, on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}[\cup]\frac{9\pi}{4}, 3\pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy).
Pour $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}[\cup]\frac{9\pi}{4}, 3\pi]$, $r(3\pi-\theta) = -r(\theta)$. Donc,

$$M(3\pi-\theta) = [r(3\pi-\theta), 3\pi-\theta] = [-r(\theta), \pi-\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

Donc, on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \dfrac{3\pi}{4}[\cup]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy).
Enfin, pour $\theta \in [0, \dfrac{3\pi}{4}[\cup]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}]$,

$$r(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -r(\theta) \text{ et } M(\frac{3\pi}{2} - \theta) = [-r(\theta), \tfrac{3\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \tfrac{\pi}{2} - \theta] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

Donc, on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \frac{3\pi}{4}[$, puis on reconstitue la courbe complète par réflexion d'axe la première bissectrice, puis par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy).
La machine fournit le tracé suivant :



⪢ Commentaire . *Il s'agit d'analyser définitivement la conséquence de l'existence d'une période strictement positive T de la fonction r sur le tracé de la courbe. On a $M(\theta + T) = [r(\theta + T), \theta + T] = [r(\theta), \theta + T]$. Ce point est le point $M(\theta)$ si et seulement si T est un multiple entier de 2π.*

On a donc cherché dans l'ensemble des périodes de la fonction $\theta \mapsto \tan(\dfrac{2\theta}{3})$, la plus petite période strictement positive qui était de plus un multiple entier de 2π :

0	$\frac{3\pi}{2}$		3π		$\frac{9\pi}{2}$	6π
0		2π		4π		6π

La période cherchée est 6π (il y a bien sûr une idée de PPCM sous-jacente).
Plus généralement, le point $M(\theta + T) = [r(\theta), \theta + T] = \text{rot}_{O,T}(M(\theta))$. Ici, $M(\theta + \dfrac{3\pi}{2}) = \text{rot}_{O,\frac{3\pi}{2}}(M(\theta))$. Donc, quand $\theta \in [\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi]$, la portion de courbe à construire est l'image de la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ (ou encore le quart de tour indirect de centre O).

5.3.2 Plan d'étude

① Domaine de définition et réduction du **domaine d'étude** en détaillant à chaque fois les transformations géométriques permettant de reconstituer la courbe.

② **Passages par l'origine.** On résout l'équation $r(\theta) = 0$ et on précise les tangentes en les points correspondants.

③ **Variations** de la fonction r et **signe** de la fonction r. Ce signe aura une influence sur le tracé (voir « construction de la courbe » ci-dessous). Ce signe permet aussi de savoir si l'origine est un point de rebroussement ou un point ordinaire.

④ Recherche éventuelle des points en lesquels la tangente est parallèle à un axe de coordonnées (pour une tangente en un point distinct de O, parallèle à (Ox) on résout $(r\sin(\theta))' = y' = 0$).

⑤ **Etude des branches infinies.** Aucun cours spécifique n'est prévu par le programme officiel de maths sup. Le plus simple est alors de se ramener à l'étude des branches infinies d'un arc paramétré classique : $\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) \end{array}\right.$.

⑥ **Construction de la courbe.**

Tracé de la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$
Si r est positif et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine,
Si r est négatif et décroit, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine,
Si r est positif et décroît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine,
Si r est négatif et croît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

⑦ Recherche éventuelle de points multiples si le tracé de la courbe le suggère (et si les calculs sont simples).

Exercice 14. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Construire la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1 + 2\sin(\theta)}{1 + 2\cos(\theta)}$.

Solution.
• **Domaine d'étude.** La fonction r est 2π-périodique. De plus, pour $r \in [-\pi, \pi]$,

$$1 + 2\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow (\theta = -\tfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = \tfrac{2\pi}{3}).$$

On obtient la courbe complète quand θ décrit $D = [-\pi, -\dfrac{-2\pi}{3}[\cup] - \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}[\cup]\dfrac{2\pi}{3}, \pi]$.

• **Passages par l'origine.** Pour $\theta \in D$, $1 + 2\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow (\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\dfrac{5\pi}{6})$. En $M(-\dfrac{\pi}{6}) = O$, la tangente est la droite d'équation $y = \tan(-\dfrac{\pi}{6})x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ et en $M(-\dfrac{5\pi}{6}) = O$, la tangente est la droite d'équation $y = \tan(-\dfrac{5\pi}{6})x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

• **Signe et variations de r.** r est strictement positive sur $] - \dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{2\pi}{3}[\cup] - \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}[$, et strictement négative sur $[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}[\cup] - \dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6}[\cup]\dfrac{2\pi}{3}, \pi]$. Ensuite, r est dérivable sur D et pour $\theta \in D$,

$$r'(\theta) = \frac{2\cos(\theta)(1 + 2\cos(\theta)) + 2\sin(\theta)(1 + 2\sin(\theta))}{(1 + 2\cos(\theta))^2} = \frac{2(\cos(\theta) + \sin(\theta) + 2)}{(1 + 2\cos(\theta))^2} = \frac{2\sqrt{2}(\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2})}{(1 + 2\cos(\theta))^2} > 0.$$

Ainsi, r est strictement croissante sur $[-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}[$, sur $] - \dfrac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ et sur $]\dfrac{2\pi}{3}, \pi]$.

• **Etude des branches infinies**. Quand θ tend vers $-\dfrac{2\pi}{3}$, $|r(\theta)|$ tend vers $+\infty$. Plus précisément,

$$x(\theta) = \frac{(1 + 2\sin(\theta))\cos(\theta)}{1 + 2\cos(\theta)} \text{ tend vers } \pm\infty \text{ et } y(\theta) = \frac{(1 + 2\sin(\theta))\sin(\theta)}{1 + 2\cos(\theta)} \text{ tend vers } \pm\infty.$$

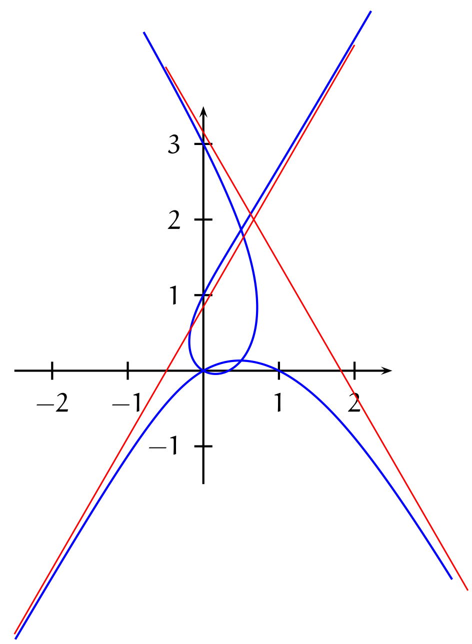
$\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)} = \tan(\theta)$ tend vers $\tan(-\dfrac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Donc la courbe admet une direction asymptotique d'équation $y = \sqrt{3}x$.
Ensuite,

$$y(\theta)-\sqrt{3}.x(\theta)=\frac{(1+2\sin(\theta))(\sin(\theta)-\sqrt{3}\cos(\theta))}{1+2\cos(\theta)}=\frac{(1+2\sin(\theta))(-2\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}))}{2(\cos(\theta)-\cos(\frac{2\pi}{3}))}$$
$$=\frac{(1+2\sin(\theta))(-4\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}))}{-4\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})}=\frac{(1+2\sin(\theta))\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}$$

Quand θ tend vers $-\dfrac{2\pi}{3}$, cette dernière expression tend vers $2(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ et on en déduit que la droite d'équation $y=\sqrt{3}x+2(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ est asymptote à la courbe.

On trouve de même que, quand θ tend vers $\dfrac{2\pi}{3}$, la droite d'équation $y=-\sqrt{3}x+2(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ est asymptote à la courbe.

• **Graphe.**



6 Description d'une courbe

Nous avons maintenant à disposition de nombreuses descriptions d'une courbe.

Graphe de fonction du type $y=f(x)$ ou $x=g(y)$ (par exemple, $y=x^2$ ou $x=y^2$).
Courbes paramétrées du type $\left\{\begin{array}{l}x=x(t)\\ y=y(t)\end{array}\right.$ (par exemple, $\left\{\begin{array}{l}x=\cos(t)\\ y=\sin(t)\end{array}\right.$).
Equation polaire du type $r=r(\theta)$ (par exemple, $r=1+\cos(\theta)$).
Equation cartésienne du type $f(x,y)=0$ (par exemple, $x^2+y^2-1=0$).

La dernière situation est de loin celle qui a été le moins étudiée, et c'est normal car il nous manque à l'évidence un cours sur les fonctions de deux variables. Néanmoins, il est possible aujourd'hui de construire de telles courbes en en trouvant une paramétrisation. Une idée (parmi tant d'autres), fréquemment utilisée en pratique, est de chercher **l'intersection de la courbe avec toutes les droites passant par l'origine** comme le montre l'exercice suivant. Ceci revient en gros à prendre comme paramètre le réel $t=\dfrac{y}{x}$.

Exercice 15. Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^3+y^3-3axy=0$, a réel strictement positif donné (folium de Descartes).

Solution.
$M(x,y)\in\mathscr{C}\cap(Oy)\Leftrightarrow x^3+y^3-3axy=0$ et $x=0\Leftrightarrow x=y=0$. Donc, $\mathscr{C}\cap(Oy)=\{O\}$.
Soient $t\in\mathbb{R}$ et (D_t) la droite d'équation $y=tx$.

$$M(x,y) \in D_t \cap \mathscr{C} \setminus (Oy) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y = tx \\ x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y = tx \\ (1+t^3)x - 3at = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{array}\right. \text{ pour } t \notin -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{array}\right. \text{ pour } t \notin \{-1, 0\}.$$

Ainsi, les droites D_{-1} et D_0 n'ont qu'un point commun avec $\mathscr{C}$ à savoir le point O. D'autre part, $\mathscr{C}$ est la réunion de $\{O\}$ et de l'ensemble des points $(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$, $t \notin \{-1, 0\}$. Comme $t = 0$ refournit le point O, on a plus simplement $\mathscr{C} = \{(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3}),\ t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$. Une paramétrisation de la courbe est donc $t \mapsto \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{array}\right.$.

Après étude, on obtient le graphe suivant :