Cours de Géométrie

Affine et Euclidienne

pour la Licence de Mathématiques

Emmanuel Pedon

Université de Reims-Champagne Ardenne

Version du 23 mars 2015.

Sommaire

Préface

Ce cours présente les bases de la géométrie affine générale (disons, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et de la géométrie euclidienne. Il est destiné aux étudiants de la Licence de Mathématiques, ainsi qu'aux étudiants préparant le CAPES ou l'agrégation de mathématiques [1]. Les prérequis sont relativement élémentaires : algèbre linéaire (espaces vectoriels de dimension finie, réduction des endomorphismes) et bilinéaire (cf. Paragraphe 1 du chapitre III) tels qu'on les enseigne généralement en première et deuxième année de Licence ou en Classes Préparatoires, et un minimum de théorie des groupes.

Il existe déjà de nombreux livres intéressants sur la géométrie affine (voir la Bibliographie en fin d'ouvrage), j'ai écrit celui-ci à la fois pour le plaisir de le penser à ma façon, et pour faciliter la communication avec mes collègues enseignants. Certains étudiants préparant les concours de l'enseignement ont eu la gentillesse de me faire part de leur intérêt pour ce cours qu'ils avaient reçu en Licence, c'est pourquoi j'ai décidé de le rendre accessible à tous.

Autant l'avouer tout de suite, ce cours présente un grave défaut, voire un défaut rédhibitoire : en effet il ne contient aucune figure, ce qui est d'une certaine manière un comble pour un cours de géométrie ! Mais d'un autre point de vue, cela force le lecteur à participer activement à la compréhension du texte... La raison en est tout simplement que je n'ai pas pris le temps de m'en occuper. Pour une version ultérieure, peut-être !

Le cours présenté ici a été enseigné (donc testé) durant plusieurs années à l'université de Reims, en troisième année de Licence (il l'est encore pour la seconde moitié) [2]. À titre indicatif, il représente au total 44h de cours magistraux et 78h de travaux dirigés (constitués par les exercices situés à la fin de chaque chapitre), ce qui représente exactement deux modules semestriels d'enseignement, la répartition des chapitres étant généralement la suivante : I-II-III au premier semestre, puis IV-V-VI-VII au second semestre. Certaines années, nous avons pu également compléter le cours par un chapitre sur les coniques et quadriques euclidiennes (qui sera peut-être inclus dans une version future).

Toute remarque, suggestion ou correction sera la bienvenue. J'autorise volontiers la reprise de tout passage du texte de cet ouvrage, *à condition qu'il ne subisse aucune modification et que la source originale soit toujours citée* (par exemple, par un renvoi sur le site web mentionné ci-dessous).

Pour finir, un avertissement : ce cours est en constante mutation, puisqu'il est le fruit de mon expérience d'enseignant. Les mises à jour sont nombreuses, veuillez donc repasser régulièrement

1. Le contenu de ce cours couvre entièrement le programme du CAPES (à l'exception de la notion de conique) mais pas celui de l'agrégation (par exemple, pas de géométrie projective ici).

2. Je remercie au passage les collègues rémois qui ont participé à cet enseignement et en ont contribué à corriger et améliorer le texte : M. Pevzner, L. Foissy, V. Gayral.

sur le site pour y télécharger la dernière version. (La date de dernière modification est indiquée sur la page de garde.)

Bonne lecture !

Reims, le 8 mars 2010

Emmanuel Pedon
emmanuel.pedon@univ-reims.fr
http ://pedon.perso.math.cnrs.fr

Chapitre I : Espaces affines

Dans ce chapitre,

- K désigne l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (ou plus généralement, n'importe quel corps commutatif de caractéristique zéro);
- si V et W sont deux K-espaces vectoriels, $L(V, W)$ désigne le K-espace vectoriel des applications linéaires de V dans W. Pour simplifier, on note $L(V)$ plutôt que $L(V, V)$.

1 Espaces affines

Définition 1.1. Soit $\overrightarrow{E}$ un K-espace vectoriel. Un **espace affine (sur K) associé à $\overrightarrow{E}$** est un ensemble E **non vide**, muni d'une application $\varphi : E \times E \to \overrightarrow{E}$ vérifiant les deux axiomes suivants :
(A1) pour tous A, B, C de E, $\varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$ **(relation de Chasles)**;
(A2) pour tout $A \in E$, l'application $\varphi_A : M \mapsto \varphi(A, M)$ est une **bijection** de E sur $\overrightarrow{E}$. Autrement dit, $\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \overrightarrow{E}, \exists! B \in E : \vec{x} = \varphi(A, B)$.

Afin de retrouver des notations habituelles, on adopte la

Convention 1.2. Dorénavant, si $A, B \in E$, on notera $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\varphi(A, B)$.

Voici un peu de vocabulaire. Les éléments d'un espace affine E sont appelés **points** et ceux du corps de base K des **scalaires**. Par ailleurs, on dit que $\overrightarrow{E}$ est **la direction** de E, ou encore que E est **dirigé** par $\overrightarrow{E}$, et on appelle **dimension de E** la dimension de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. En particulier, les espaces affines de dimension 0 (i.e., associés à $\overrightarrow{E} = \{\vec{0}\}$) sont ceux réduits à un point, et par analogie avec le vocabulaire de l'algèbre linéaire, les espaces affines de dimension 1 sont appelés **droites**, ceux de dimension 2 sont appelés **plans**.

N.B. Dans ce cours, on ne considèrera que des espaces affines de **dimension finie**.

On attribue souvent un nom particulier à certains ensembles finis de points d'un espace affine. Par exemple :

1) deux points A, B forment un **bipoint**, que l'on note (A, B) ou (B, A);

2) trois points A, B, C forment un **triangle de sommets A, B, C**, qui se note ABC (l'ordre des lettres ne compte pas);

3) dans un plan, quatre points A, B, C, D forment un **quadrilatère de sommets A, B, C, D**, noté $ABCD$. De même on parlera d'un **pentagone** pour un ensemble de cinq points, d'un **hexagone** pour un ensemble de six points, et en général, d'un **polygone**;

4) dans un espace affine de dimension 3, quatre points A, B, C, D forment un **tétraèdre**, noté $ABCD$.

Donnons maintenant quelques conséquences immédiates de notre définition.

Proposition 1.3. *Soit E un K-espace affine.*

1) $\forall A \in E,\ \overrightarrow{AA} = \vec{0}$;
2) $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$;
3) $\forall A, B, C \in E,\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$;
4) $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$;
5) $\forall A, B \in E, \exists! \vec{x} \in \vec{E} : \vec{x} = \overrightarrow{AB}$;
6) *Pour tous $A, B, C, D \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
(iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, on dit que A, B, C, D forment (dans cet ordre) le **parallélogramme** *$ABCD$.*

Démonstration. 1) D'après l'axiome (A1), on a : $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, d'où $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (règle de calcul vectoriel).

2) Toujours avec (A1), on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ par 1).

3) On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \varphi_A(B) = \varphi_A(C) \Leftrightarrow B = C$ car φ_A est bijective (A2), donc injective.

4) En utilisant successivement 1) et 3), on a : $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} \Leftrightarrow B = A$.

5) est évident : c'est la traduction du fait que $\varphi : (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une application.

6) Exercice. ✓

Proposition 1.4. *Soient E, F deux K-espaces affines. Alors le produit cartésien $E \times F$ est naturellement muni d'une structure de K-espace affine associé à $\vec{E} \times \vec{F}$, et on a* $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Démonstration. Il est facile de constater que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : (E \times F) \times (E \times F) &\longrightarrow \vec{E} \times \vec{F} \\ \big((A, A'), (B, B')\big) &\longmapsto (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{aligned}$$

vérifie les deux axiomes définissant un espace affine. ✓

L'exemple le plus naturel d'espace affine est aussi le plus fondamental :

Proposition 1.5. *Tout espace vectoriel V (en particulier $V = K^n$) est un espace affine associé à lui-même pour l'application $\varphi : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y} - \vec{x}$. (Symboliquement, on a donc $\overrightarrow{\vec{x}\vec{y}} = \vec{y} - \vec{x}$.)*
Cette structure d'espace affine sur l'espace vectoriel V est dite **canonique**.

Démonstration. Pour tous $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$, on a $\vec{z} - \vec{x} = (\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{z} - \vec{y})$, c'est-à-dire (A1). D'autre part, si $\vec{a}, \vec{x} \in V$ alors $\vec{b} = \vec{a} + \vec{x}$ est l'unique élément de V vérifiant $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$, d'où (A2). ✓

L'existence d'espaces vectoriels en toute dimension ayant été prouvée dans le cours d'algèbre linéaire, on en déduit au passage :

Corollaire 1.6. *Il existe des espaces affines en toute dimension.*

Exemple 1.7. L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace affine sur lui-même : c'est une droite affine complexe. Mais on voit facilement que c'est aussi un plan affine sur le corps $K = \mathbb{R}$.

Notation 1.8. On étend aux espaces affines généraux les notations correspondant au cas des espaces vectoriels : on pourra ainsi écrire $B - A$ au lieu de $\overrightarrow{AB}$. Par cohérence, si $A \in E$ et $\vec{x} \in \overrightarrow{E}$, l'unique $B \in E$ vérifiant $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ (cf. axiome (A2)) sera également noté $A + \vec{x}$ (dans cet ordre).
Ainsi, on aura $B = A + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{AB}$ et l'écriture $B - A = (A + \vec{x}) - A = \vec{x}$ sera autorisée.

Exemples 1.9 (d'utilisation de cette notation).

1) (Exercice) La relation de Chasles (A1) se traduit par $(A + \vec{x}) + \vec{y} = A + (\vec{x} + \vec{y})$.
On obtient également les règles suivantes, souvent utilisées : $A + \vec{x} = A + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ et $(B + \vec{y}) - (A + \vec{x}) = \overrightarrow{AB} + \vec{y} - \vec{x}$.

2) Si E est un espace affine, pour tout point $A \in E$, on a $E = A + \overrightarrow{E}$: cela découle de la propriété 5) de la proposition 1.3.

Attention! Le fait de donner un sens à une différence de deux points n'autorise pas à écrire n'importe quelle combinaison de points d'un espace affine (par exemple une somme de deux points n'existe pas), sauf dans deux situations très particulières : l'une lorsqu'on vectorialise l'espace affine (voir ci-dessous), et l'autre lorsqu'on étudiera les barycentres (voir paragraphe 6).

On a montré plus haut que tout espace vectoriel est naturellement un espace affine. Pour étudier le problème inverse, donnons une autre formulation de l'axiome (A2) : si l'on fixe $A \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \psi_A : \overrightarrow{E} &\to E \\ \vec{x} &\mapsto A + \vec{x} \end{aligned}$$

est une bijection ensembliste (en fait, ψ_A n'est autre que la réciproque de l'application φ_A de l'axiome (A2)). Cette bijection permet alors de « transporter » sur E la structure d'espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. En effet, il est facile de constater que les lois $+_A$ et $\cdot_A$ définies par

$$M +_A N = \psi_A(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot_A M = \psi_A(\lambda \overrightarrow{AM})$$

munissent E d'une structure de K-espace vectoriel.

Définition 1.10. L'espace vectoriel $(E, +_A, \cdot_A)$ ainsi obtenu s'appelle le **vectorialisé de E en A** et se note E_A. On dit aussi qu'**on a fixé une origine A dans E**.

Remarques 1.11.

1) Le point A est le vecteur nul du vectorialisé E_A : pour tout $M \in E_A$, $M +_A A = \psi_A(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA}) = \psi_A(\overrightarrow{AM}) = M$. C'est pour cela qu'on qualifie A d'« origine ».

2) La vectorialisation n'est somme toute qu'une définition rigoureuse d'un phénomène intuitif : la feuille de papier (infinie. . .) est un espace affine, mais se comporte comme un espace vectoriel si on fixe un point-origine. Inversement, on peut considérer un espace affine comme un espace vectoriel dans lequel on ne veut plus privilégier l'origine (le vecteur nul).

3) Par construction de E_A, la bijection $\psi_A : \overrightarrow{E} \to E$ induit un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de $\overrightarrow{E}$ sur E_A.

4) **Attention, le procédé de vectorialisation d'un espace affine n'est pas canonique :** les lois ne sont pas les mêmes dans E_A et E_B si $A \neq B$! C'est pour cela qu'on ne peut pas dire qu'un espace affine *est* un espace vectoriel, alors que la réciproque est toujours vraie en vertu de la proposition 1.5. Autrement dit : la catégorie des espaces affines contient strictement la catégorie des espaces vectoriels.

2 Applications affines (première étude)

2.1 Généralités

Comme à chaque fois que l'on définit une nouvelle structure mathématique, on s'intéresse aux applications qui vont préserver cette structure. La suite de ce cours justifiera la pertinence de la définition suivante.

Définition 2.1. Soient E et F deux espaces affines. Une application $f : E \longrightarrow F$ est une **application affine** (ou un **morphisme affine**) s'il existe une application linéaire $\sigma : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$ vérifiant

$$\forall A \in E,\ \forall \vec{x} \in \vec{E}, \quad f(A+\vec{x}) = f(A) + \sigma(\vec{x}),$$

ou encore, ce qui revient au même,

$$\forall A, B \in E, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma(\overrightarrow{AB}).$$

Vérifions en effet l'équivalence de ces deux formules : soient $A, B \in E$; si la première formule est vraie, on a $f(B) = f(A+\overrightarrow{AB}) = f(A)+\sigma(\overrightarrow{AB})$, donc $\overrightarrow{f(A)f(B)} = f(B)-f(A) = \sigma(\overrightarrow{AB})$. La réciproque se démontre de la même façon.

Si l'on vectorialise les espaces considérés, on peut interpréter cette définition d'une manière remarquable :

Proposition 2.2. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est affine si et seulement si, pour tout $A \in E$, f est linéaire de E_A dans $F_{f(A)}$.*

Démonstration. Exercice. ✓

Proposition 2.3. *Pour une application affine $f : E \longrightarrow F$ donnée, il n'existe qu'une seule application linéaire $\sigma : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$ vérifiant la condition de la définition. On l'appelle* **partie linéaire de f**, *et on la note $\vec{f}$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait à la fois

$$\forall A \in E,\ \forall \vec{x} \in \vec{E}, \quad f(A+\vec{x}) = \begin{cases} f(A)+\sigma_1(\vec{x}) \\ f(A)+\sigma_2(\vec{x}) \end{cases}$$

Fixons alors $A \in E$. On a : $\forall \vec{x} \in \vec{E}$, $\sigma_1(\vec{x}) = f(A+\vec{x}) - f(A) = \sigma_2(\vec{x})$, d'où $\sigma_1 = \sigma_2$. ✓

Exemples 2.4.

1) L'identité $\mathrm{id}_E : M \mapsto M$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{\mathrm{id}_E} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$.

2) Une application constante $f : E \longrightarrow F$, $M \mapsto A$ est affine, de partie linéaire $\vec{f} \equiv \vec{0}$. Réciproquement, si f est affine, alors f est constante si et seulement si $\vec{f} \equiv \vec{0}$.

Les applications affines possèdent les mêmes propriétés ensemblistes que leurs parties linéaires :

Proposition 2.5. *Soit f une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.*

Démonstration. Exercice. ✓

De cette proposition et de l'analogue vectoriel on déduit immédiatement :

Corollaire 2.6. *Soit f une application affine entre espaces* **de même dimension**. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est injective;*

(ii) *f est surjective;*

(iii) *f est bijective.*

Un peu de vocabulaire et de notation, calqués sur le cas vectoriel.

Définitions 2.7.

1) Une application affine de E dans E s'appelle un **endomorphisme affine** de E.

2) Une application affine bijective s'appelle un **isomorphisme affine** (ou encore, une **transformation affine**).

3) Deux espaces affines E, F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme affine de E sur F (ils sont alors de même dimension).

4) Un endomorphisme affine bijectif s'appelle un **automorphisme affine**.

Notations 2.8. On définit :

1) $A(E, F)$ l'ensemble des morphismes affines de E dans F ;

2) $A(E) = A(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes affines de E ;

3) $GA(E)$ l'ensemble des automorphismes affines de E ;

4) pour $f \in A(E)$,

$$\mathrm{Inv}(f) = \{M \in E : f(M) = M\} = \text{ensemble des } \textbf{points fixes} \text{ de } f.$$

Énonçons maintenant un résultat simple, indispensable pour la compréhension et la pratique.

Proposition 2.9. *Soient E et F deux espaces affines, $\sigma : \vec{E} \to \vec{F}$ une application linéaire et $(A, B) \in E \times F$. Alors $f : M \mapsto B + \sigma(\overrightarrow{AM})$ est* **l'unique** *application affine de E dans F telle que $f(A) = B$ et $\vec{f} = \sigma$.*
Autrement dit, une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et de l'image d'un point (quelconque).

Démonstration. Il est clair que l'application f ainsi définie vérifie $f(A) = B$. D'autre part, pour tous $M, N \in E$, on a

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (B + \sigma(\overrightarrow{AN})) - (B + \sigma(\overrightarrow{AM})) = \sigma(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MA}) = \sigma(\overrightarrow{MN}),$$

ce qui démontre que f est affine de partie linéaire σ.

Supposons maintenant qu'il existe une autre application affine g possédant les mêmes propriétés. Pour tout $M \in E$,

$$g(M) = g(A + \overrightarrow{AM}) = g(A) + \vec{g}(\overrightarrow{AM}) = B + \sigma(\overrightarrow{AM}) = f(M),$$

si bien que $g = f$. ✓

Corollaire 2.10. *Pour prouver l'égalité de deux applications affines, il suffit d'établir l'égalité de leurs parties linéaires et leur coïncidence en (au moins) un point.*

D'autres propriétés générales des applications affines seront établies dans la suite de ce cours (et notamment dans le chapitre suivant). Passons maintenant à deux exemples concrets, parmi les plus connus.

2.2 Premiers exemples : homothéties et translations

Soit E un espace affine sur K.

Définition 2.11. Si $A \in E$ et $\lambda \in K^*$, l'application $h_{A,\lambda} : E \to E$, $M \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AM}$ s'appelle l'**homothétie** de **centre** A et de **rapport** λ.

Exemples 2.12. Une homothétie $h_{A,1}$ de rapport 1 est l'identité (pour tout A), une homothétie $h_{A,-1}$ de rapport -1 s'appelle une **symétrie centrale** (de centre A) et se note s_A.

Proposition 2.13. *Soit $h = h_{A,\lambda}$ une homothétie de E (rappel : $\lambda \in K^*$).*

1) *h est un automorphisme affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $\vec{h} = \lambda\,\mathrm{id}_{\vec{E}}$ (quel que soit A).*
2) *Si $\lambda \neq 1$, $\mathrm{Inv}(h) = \{A\}$; sinon $h = \mathrm{id}$ donc $\mathrm{Inv}(h) = E$.*

Démonstration. 1) Pour tous $M, N \in E$,

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = h(N) - h(M) = (A + \lambda\overrightarrow{AN}) - (A + \lambda\overrightarrow{AM}) = \lambda\overrightarrow{MN},$$

de sorte que h est affine, avec $\vec{h} = \lambda\,\mathrm{id}$. Comme $\vec{h}$ est bijective, h l'est aussi.

2) Supposons $\lambda \neq 1$. Pour tout $M \in E$,

$$\begin{aligned} h(M) = M &\Leftrightarrow A + \lambda\overrightarrow{AM} = M \\ &\Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{AM} = M - A = \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)\overrightarrow{AM} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow M = A. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Inv}(h) = \{A\}$. ✓

Passons à un second exemple.

Définition 2.14. Si $\vec{x} \in \vec{E}$, l'application $t_{\vec{x}} : E \to E$, $M \mapsto M + \vec{x}$ s'appelle **la translation de vecteur** $\vec{x}$.

Remarquons qu'on pourra parler **du** vecteur d'une translation donnée, puisqu'il est clair que $t_{\vec{x}} = t_{\vec{y}} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Proposition 2.15. *Soit $t = t_{\vec{x}}$ une translation de E.*

1) *t est un automorphisme affine, de partie linéaire $\vec{t} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$ (quel que soit $\vec{x}$).*
2) *Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\mathrm{Inv}(t) = \varnothing$; sinon $t = \mathrm{id}$ donc $\mathrm{Inv}(t) = E$.*

Démonstration. 1) Pour tous $M, N \in E$, $\overrightarrow{t(M)t(N)} = (N + \vec{x}) - (M + \vec{x}) = N - M = \overrightarrow{MN}$, d'où le résultat.

2) Supposons $\vec{x} \neq \vec{0}$. Alors $t(M) = M \Leftrightarrow M + \vec{x} = M \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, donc $\mathrm{Inv}(t) = \varnothing$. ✓

Les translations vont nous fournir un autre exemple naturel et fondamental d'application affine :

Proposition 2.16. *Soient E et F deux espaces vectoriels munis de leur structure affine canonique. Les applications affines de E dans F sont exactement les composées de la forme $t_{\vec{u}} \circ \sigma$, où $\vec{u} \in F$ et $\sigma \in L(E, F)$.*
Plus précisément, si l'on note $O = \vec{0}_E$ et $O' = \vec{0}_F$ (vus comme points), et si $f \in A(E, F)$, alors $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{O'f(O)}$ et $\sigma = \vec{f}$ (donc $\vec{u}$ et σ sont uniques).
En particulier, les applications linéaires de E dans F sont exactement les applications affines f vérifiant $f(O) = O'$, i.e. qui « conservent l'origine ».

Démonstration. Exercice. ✓

Autrement dit : une application affine entre espaces vectoriels est la somme d'une application linéaire et d'une constante, phénomène déjà rencontré au Lycée avec l'exemple suivant pour $K = \mathbb{R}$.

Corollaire 2.17. *Les endomorphismes affines de K (vu comme droite affine sur lui-même) sont exactement les applications de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a, b \in K$. Parmi celles-ci, les automorphismes de K sont caractérisés par la condition $a \in K^*$.*

Ce résultat dit en particulier que tout endomorphisme affine de la droite complexe $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b$. Mais **attention :** si l'on voit $\mathbb{C}$ comme plan affine sur $K = \mathbb{R}$, ses endomorphismes affines sont de la forme $z \mapsto az + b\bar{z} + c$! (Exercice.)

3 Repères cartésiens et coordonnées cartésiennes

Il existe plusieurs systèmes de repérage dans un espace affine. Nous allons étudier dans ce paragraphe le plus élémentaire d'entre eux.

3.1 Repérage des points

Soit E un K-espace affine.

Définitions 3.1. On appelle **repère cartésien** de l'espace affine E tout couple $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où O est un point de E, et $\mathcal{B}$ est une base de $\vec{E}$. On dit alors que O est **l'origine** du repère $\mathcal{R}$ et que $\mathcal{B}$ est la **base associée** au repère $\mathcal{R}$.
On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$.
En dimension n, tout point possède donc n coordonnées cartésiennes. Si $n = 1$, l'unique coordonnée cartésienne s'appelle **l'abscisse**. Si $n = 2$, la seconde coordonnée s'appelle **l'ordonnée**. Si $n = 3$, la troisième coordonnée s'appelle généralement **la hauteur**.

Proposition 3.2. *Soit E un espace affine de dimension n, et soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien de E. L'application $\varphi_{\mathcal{R}} : E \longrightarrow K^n$ qui à M associe le n-uplet formé par ses coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ est un isomorphisme affine (K^n est ici muni de sa structure affine canonique).*

Démonstration. On voit très facilement que la partie linéaire $\vec{\varphi}_{\mathcal{R}} : \vec{E} \longrightarrow K^n$ de $\varphi_{\mathcal{R}}$ n'est autre que l'isomorphisme linéaire qui envoie tout vecteur de $\vec{E}$ sur le n-uplet formé par ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ associée à $\mathcal{R}$. ✓

Ce résultat élémentaire nous dit à la fois qu'on peut effectivement utiliser des coordonnées cartésiennes pour repérer les points (c'est l'aspect bijectif) et que l'espace affine K^n est en quelque sorte un modèle « canonique » d'espace affine de dimension n (c'est l'aspect isomorphisme), tout comme il est un modèle universel d'espace vectoriel de dimension n.

Définitions 3.3. L'application $\varphi_{\mathcal{R}}$ définie ci-dessus est appelée **carte affine** de E associée à $\mathcal{R}$, et son inverse $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1}$ est appelée **représentation paramétrique** (ou **paramétrage**) de E associée à $\mathcal{R}$. Concrètement, si $\mathcal{R} = (O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$, alors $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto O + \sum \lambda_i \vec{e}_i$.

Remarque 3.4. L'application $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1}$ est aussi affine. On peut le prouver directement, mais on verra plus loin que l'inverse d'un isomorphisme affine est automatiquement affine.

Voici une formule de changement de coordonnées cartésiennes.

Proposition 3.5. *Soient $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O'; \mathcal{B}')$ deux repères cartésiens de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, i.e. $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.*
Si $M \in E$, notons X_M (resp. X'_M) la matrice colonne des coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$).
Alors, pour tout $M \in E$, $X_M = PX'_M + X_{O'}$.

Démonstration. Observons que $X_M - X_{O'}$ représente la matrice colonne des composantes du vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'M}$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme X'_M n'est autre que la matrice colonne des composantes de $\overrightarrow{O'M}$ dans la base $\mathcal{B}'$, la formule résulte donc du cours d'algèbre linéaire. ✓

Dans le cadre vectoriel, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Il y a un analogue dans le cadre affine.

Proposition 3.6. *Soient E, F deux K-espaces affines, E étant supposé de dimension n. Soit $(O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ un repère cartésien de E, soient $P \in F$ et $(\vec{f}_i)_{i=1}^n$ une famille quelconque de vecteurs de $\vec{F}$. Il existe une unique $f \in A(E, F)$ telle que $f(O) = P$ et $\vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pour tout i. En outre,*

1) *f est injective si et seulement si $(\vec{f}_i)$ est libre dans $\vec{F}$;*
2) *f est surjective si et seulement si $(\vec{f}_i)$ est génératrice dans $\vec{F}$;*
3) *f est bijective si et seulement si $(P; (\vec{f}_i))$ est un repère cartésien de F.*

Démonstration. Comme $(\vec{e}_i)$ est une base de $\vec{E}$, le cours d'algèbre linéaire assure l'existence d'une unique $\sigma \in L(\vec{E}, \vec{F})$ vérifiant $\sigma(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pour tout i. En utilisant la proposition 2.9, on trouve alors qu'il existe une unique $f \in A(E, F)$ telle que $\vec{f} = \sigma$ et $f(O) = P$.

Pour le reste, rappelons encore un résultat d'algèbre linéaire :

1) σ est injective si et seulement si $(\vec{f}_i)$ est libre dans $\vec{F}$;
2) σ est surjective si et seulement si $(\vec{f}_i)$ est génératrice dans $\vec{F}$;
3) σ est bijective si et seulement si $(\vec{f}_i)$ est une base de $\vec{F}$.

On conclut donc grâce à la proposition 2.5. ✓

3.2 Représentation matricielle d'une application affine

Rappelons que si l'on dispose de deux espaces vectoriels munis de bases, la donnée d'une application linéaire entre ces espaces est équivalente à la donnée d'une matrice. Donnons l'analogue de ce phénomène dans le cadre affine.

Théorème 3.7. *Soient E et F deux espaces affines de dimensions respectives m et n. Soient $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ et $\mathcal{S} = (P; \mathcal{C})$ deux repères cartésiens, respectivement de E et F.*
Si $M \in E$, on note $X_M \in M(m, 1; K)$ la matrice colonne des coordonnées de M dans $\mathcal{R}$.
Si $N \in F$, on note $Y_N \in M(n, 1; K)$ la matrice colonne des coordonnées de N dans $\mathcal{S}$.
Soit $f : E \to F$ une application.

1) *Supposons f affine, et notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\vec{f}) \in M(n, m; K)$. Alors*

$$\forall M \in E, \quad Y_{f(M)} = AX_M + Y_{f(O)}.$$

Cette écriture s'appelle la **représentation matricielle** *(on dit aussi* **expression analytique***) de f dans les repères $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$. Concrètement, elle se traduit par une expression du type :*

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m + b_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m + b_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m + b_n \end{cases}$$

2) *Réciproquement, supposons qu'il existe des matrices $A \in M(n,m;K)$ et $B \in M(n,1;K)$ telles que $Y_{f(M)} = AX_M + B$ pour tout $M \in E$, alors f est affine, et l'écriture précédente n'est autre que sa représentation matricielle dans les repères $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ (en particulier, A et B sont uniques).*

Démonstration. 1) est clair, puisque X_M est formé des composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$, $Y_{f(M)} - Y_{f(O)}$ est formé des composantes de $\overrightarrow{Pf(M)} - \overrightarrow{Pf(O)} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ dans $\mathcal{C}$, et puisqu'on a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$.

2) Comme nous l'avons rappelé, la donnée de A, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ détermine une unique $\sigma \in L(\vec{E}, \vec{F})$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\sigma)$. On a par ailleurs, pour tous $M, N \in E$:

$$\underbrace{Y_{f(N)} - Y_{f(M)}}_{\substack{\text{composantes de} \\ \overrightarrow{f(M)f(N)} \text{ dans } \mathcal{C}}} = AX_N + B - (AX_M + B) = A \underbrace{(X_N - X_M)}_{\substack{\text{composantes de} \\ \overrightarrow{MN} \text{ dans } \mathcal{B}}},$$

d'où $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \sigma(\overrightarrow{MN})$ pour tous $M, N \in E$. Par suite, f est affine de partie linéaire σ, et comme $Y_{f(O)} = AX_O + B = B$, l'écriture $Y_{f(M)} = AX_M + B$ est bien la représentation matricielle de f. ✓

4 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe, E désigne un K-espace affine de direction $\vec{E}$.

4.1 Généralités

Définition 4.1. Un **sous-espace affine** (en abrégé, un **sea**) de E est une partie de la forme

$$F = A + V := \{A + \vec{x},\ \vec{x} \in V\},$$

où A est un point de E et V est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Voyons les premières propriétés des sous-espaces affines.

Proposition 4.2. *Soit $F = A + V$ un sous-espace affine de E. Alors :*

1) *$F \subset E$ et $F \neq \varnothing$;*

2) *Pour tout $B \in E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$B \in F$;*

(ii) *$\overrightarrow{AB} \in V$;*

(iii) *$F = B + V$;*

3) *$V = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\}$;*

4) *$V = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F\}$.*

Démonstration. 1) est évident.

2) On a :

$$B \in F \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : B = A + \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : B - A = \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : \overrightarrow{AB} = \vec{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V,$$

si bien que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Montrons maintenant (ii) $\Rightarrow$ (iii) : soit $M \in F$, i.e. $M = A + \vec{x}$ avec $\vec{x} \in V$. Alors $M = (B + \overrightarrow{BA}) + \vec{x} = B + (\overrightarrow{BA} + \vec{x})$ appartient à $B + V$. Ainsi $F \subset B + V$ et l'inclusion réciproque s'obtient de la même façon.

Enfin, l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale.

3) Il suffit d'écrire : pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$,

$$\vec{x} \in V \Leftrightarrow A + \vec{x} \in A + V = F \Leftrightarrow \exists M \in F : A + \vec{x} = M \Leftrightarrow \exists M \in F : \vec{x} = \overrightarrow{AM}.$$

4) Soit $\vec{x} \in V$. Alors $\vec{x} = \overrightarrow{AM}$ avec $A, M \in F$ d'après 3). Réciproquement, soient $M, N \in F$. Alors $\overrightarrow{AM} \in V$ et $\overrightarrow{AN} \in V$ d'après 3). Comme V est un sous-espace vectoriel, on obtient que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ est aussi dans V. ✓

Corollaire 4.3. *Soit $F = A + V$ un sous-espace affine de E.*

1) *Le sous-espace vectoriel V est indépendant de A (i.e., si $F = B + W$, alors $W = V$).*

2) *F est naturellement muni d'une structure d'espace affine, pour laquelle sa direction $\vec{F}$ n'est autre que V.*

3) *F est l'unique sous-espace affine de E passant par A et dirigé par $\vec{F}$.*

Démonstration. 1) résulte du 4) de la proposition précédente.

2) Considérons l'application $F \times F \to V$, $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ (elle est bien définie en vertu du 4) de la proposition précédente). L'axiome (A1) est vérifié par cette application puisque $F \subset E$ et $V \subset \vec{E}$. D'autre part, soient $A \in F$ et $\vec{x} \in V$. D'après le 3) de la proposition précédente, il existe $B \in F$ tel que $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. D'après l'axiome (A2) dans E, ce B est unique, donc (A2) est bien vérifié dans F également.

3) Soit G un sous-espace de direction $\vec{F}$: il existe $B \in E$ tel que $G = B + \vec{F}$. Mais si l'on impose la condition $A \in G$, le 2) de la proposition précédente implique $G = A + \vec{F} = F$. ✓

Remarque 4.4. Puisqu'un sous-espace affine F de E est un espace affine, il peut être muni d'un repère cartésien. Il est même alors entièrement déterminé par la donnée d'un tel repère $(A; \mathcal{C})$, puisqu'on a $F = A + \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

D'autre part, tout repère cartésien d'un sous-espace F peut se **compléter** en un repère cartésien de E (cela résulte du théorème de la base incomplète).

Définitions 4.5. On appelle **dimension** de F (resp. **codimension** de F) la dimension de $\vec{F}$ (resp. la codimension de $\vec{F}$) dans $\vec{E}$. Comme dans le cas vectoriel, si $\dim F = 1$, on dit que F est une **droite** de E, si $\dim F = 2$, on dit que F est un **plan** de E, et si $\mathrm{codim}\, F = 1$, on dit que F est un **hyperplan** de E.

Remarque 4.6. Un espace affine de dimension n possède des sous-espaces affines de dimension d, pour tout $d \in [\![0, n]\!]$ (puisque ceci est vrai dans le cadre vectoriel). Par exemple, les sous-espaces affines d'un espace affine de dimension 3 sont les points, les droites, les plans et l'espace tout entier.

Voici quelques caractérisations des sous-espaces, souvent utiles dans la pratique.

Proposition 4.7. *Pour une partie $F \subset E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un sous-espace affine de E ;*

(ii) *F est non vide et, pour tout $A \in F$, l'ensemble $V = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$;*

(ii)′ *F est non vide, et pour tout $A \in F$, F est un sous-espace vectoriel de E_A ;*

(iii) *il existe $A \in F$ tel que l'ensemble $V = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.*

(iii)′ *il existe $A \in F$ tel que F soit un sous-espace vectoriel de E_A.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) a déjà été vu.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : On a

$$A + V = A + \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\} = \{A + \overrightarrow{AM},\ M \in F\} = \{M \in F\} = F.$$

Mais V est par hypothèse un sous-espace vectoriel, donc $F = A + V$ est un sous-espace affine.

On a pour l'instant démontré l'équivalence entre (i), (ii) et (iii). Pour finir, supposons $F \neq \varnothing$, fixons $A \in F$ et désignons comme précédemment par ψ_A la bijection définissant le vectorialisé E_A de E en A : $\psi_A : \vec{E} \to E, \vec{x} \mapsto A + \vec{x}$. Comme ψ_A induit un isomorphisme linéaire entre $\vec{E}$ et E_A, le fait que V soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ se traduit par le fait que $\psi_A(V)$ soit un sous-espace vectoriel de E_A. Or $\psi_A(V) = A + V = F$ (cf. ci-dessus). Ceci prouve simultanément les équivalences (ii) $\Leftrightarrow$ (ii)′ et (iii) $\Leftrightarrow$ (iii)′. ✓

Voici maintenant un exemple fondamental :

Proposition 4.8. *Soit E un espace vectoriel muni de sa structure affine canonique. Les sous-espaces affines de E sont exactement les translatés des sous-espaces vectoriels de E (i.e., sont de la forme $t_{\vec{x}}(V)$ avec V sous-espace de $\vec{E}$ et $\vec{x} \in \vec{E}$). En particulier, les sous-espaces vectoriels de E sont précisément les sous-espaces affines de E passant par « l'origine » $\vec{0}$, ou encore, les sous-espaces affines de E coïncidant avec leur direction.*

Démonstration. Exercice. ✓

Continuons quelques résultats simples, mais très utiles.

Proposition 4.9.

1) *Soient F et G deux sous-espaces de E.*

a) *Si $F \subset G$, alors $\vec{F} \subset \vec{G}$ et* $\dim F \leq \dim G$.

b) *Si $F \subset G$ et* $\dim F = \dim G$, *alors $F = G$.*

c) *Si $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $F \cap G \neq \varnothing$, alors $F \subset G$.*

2) *Soit F un sous-espace de dimension p de E. Si $p \leq d \leq$* $\dim E$, *alors il existe (au moins) un sous-espace G de dimension d de E qui contient F.*

Démonstration. Exercice. ✓

Exemples 4.10. Supposons $\dim E \geq 2$.

1) Par tout point de E il passe au moins une droite, un plan, un hyperplan.

2) Toute droite de E est contenue dans au moins un plan, un hyperplan.

Pour finir ce paragraphe, encore du vocabulaire courant.

Définitions 4.11.

1) On appelle **vecteur directeur** d'une droite D d'un espace affine, toute base de sa direction $\vec{D}$, i.e. tout vecteur non nul pris dans $\vec{D}$. Il y en a donc une infinité (ne jamais écrire « le » vecteur directeur !).

2) Des points d'un espace affine de dimension ≥ 1 sont dits **alignés** s'ils appartiennent à une même droite. En dimension 2, un polygone (triangle, parallélogramme, quadrilatère général, etc.) est dit **aplati** si ses sommets sont alignés.

3) Des points d'un espace affine de dimension ≥ 2 sont dits **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan. En dimension 3, un tétraèdre est dit **aplati** si ses sommets sont coplanaires.

Remarque 4.12. Soit $D = A + \vec{D}$ une droite de E. On a : $\forall M \in E,\ M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{D}$. Par suite, trois points A, B, C de E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent à une même droite vectorielle de $\vec{E}$, ou encore, si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée dans $\vec{E}$. On généralisera ce résultat au paragraphe 5.

Une intersection de sous-espaces vectoriels est toujours, comme on le sait, un sous-espace vectoriel. Ce n'est plus nécessairement vrai dans le cadre affine :

Proposition 4.13. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de sous-espaces affines de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est* **soit** *vide,* **soit** *un sous-espace affine de E, auquel cas $\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} F_i} = \bigcap_{i\in I} \vec{F_i}$.*

Démonstration. Supposons $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. Il existe donc $A \in E$ tel que $A \in F_i$ pour tout i et on peut écrire : $\forall i \in I,\ F_i = A + \vec{F}_i$. Mais alors, pour tout $M \in E$,

$$\begin{aligned} M \in \bigcap_{i\in I} F_i &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ M \in F_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ \overrightarrow{AM} \in \vec{F}_i \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i\in I} \vec{F}_i \\ &\Leftrightarrow M \in A + \bigcap_{i\in I} \vec{F}_i . \end{aligned}$$

Ainsi $\bigcap_{i\in I} F_i = A + \bigcap_{i\in I} \vec{F}_i$, ce qui prouve que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace affine de E, de direction $\bigcap_{i\in I} \vec{F}_i$. ✓

Remarque 4.14. On a clairement $\dim\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \leq \min_{i\in I}(\dim F_i)$.

4.2 Sous-espace engendré par une partie

Proposition 4.15. *Si X est une partie non vide de E, alors l'intersection des sous-espaces de E contenant X est un sous-espace affine de E, et c'est le plus petit sous-espace de E contenant X. On l'appelle* **sous-espace affine de E engendré par X** *et on le note* Aff X.

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}$ la famille des sous-espaces affines de E contenant X. Elle est non vide puisqu'elle contient E. Posons donc $F = \bigcap_i F_i$. Comme F contient X et $X \neq \varnothing$, on voit que $F \neq \varnothing$, donc F est un sous-espace par la proposition 4.13. Enfin, si G est un sous-espace de E contenant X, il existe $i_0 \in I$ tel que $G = F_{i_0}$, de sorte que $F \subset G$. ✓

Observons qu'on ne peut définir de la même façon Aff $\varnothing$ car il n'y aurait pas unicité d'un tel sous-espace : tout singleton de E conviendrait.

Voyons maintenant deux propriétés :

Proposition 4.16.

1) *X est un sous-espace affine de E si et seulement si* $\operatorname{Aff} X = X$.
2) $X \subset Y \Rightarrow \operatorname{Aff} X \subset \operatorname{Aff} Y$.

Démonstration. 1) est évidente.

2) $\operatorname{Aff} Y$ est un sous-espace de E contenant Y, donc contenant aussi X. Comme $\operatorname{Aff} X$ est le plus petit sous-espace de E contenant X, on a donc $\operatorname{Aff} X \subset \operatorname{Aff} Y$. ✓

Le résultat suivant est d'une grande importance.

Théorème 4.17. *Soit X une partie non vide de E.*

1) *Pour tout $A \in X$,* $\overrightarrow{\operatorname{Aff} X} = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}$.
2) $\overrightarrow{\operatorname{Aff} X} = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{MN},\ M, N \in X\}$.

Démonstration. 1) Fixons $A \in X$ et soit $M \in X$. Comme $A, M \in X \subset \operatorname{Aff} X$, on a $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\operatorname{Aff} X}$. Par conséquent, $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\} \subset \operatorname{Vect}(\overrightarrow{\operatorname{Aff} X}) = \overrightarrow{\operatorname{Aff} X}$. D'autre part, $A + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}$ est un sous-espace de E qui contient X (si $M \in X$, alors $M = A + \overrightarrow{AM}$), donc il contient $\operatorname{Aff} X$ d'après les résultats de la proposition 4.16. En passant aux directions, on obtient $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\} \supset \overrightarrow{\operatorname{Aff} X}$, d'où l'égalité voulue.

2) Soit $A \in X$. Montrons l'égalité $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\} = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{PQ},\ P, Q \in X\}$. L'inclusion directe étant triviale, donnons-nous deux points $P, Q \in X$. On a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} \in \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}$. Par suite,

$$\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{PQ},\ P, Q \in X\} \subset \operatorname{Vect}\big(\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}\big) = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\},$$

d'où le résultat. ✓

On retiendra en particulier le cas suivant :

Corollaire 4.18. *Si $X = \{A_0, \dots, A_p\}$ est une famille finie de points de E, alors* $\operatorname{Aff} X = A_0 + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p})$.

Exemples 4.19.

1) Si $A, B \in E$ sont distincts, alors $\operatorname{Aff}(A, B) = A + K\overrightarrow{AB}$ est une droite. C'est même **l'unique** droite passant par A et B, on la note (AB).
Pourquoi unique ? Car si D est une droite contenant $\{A, B\}$, alors $D = \operatorname{Aff} D \supset \operatorname{Aff}(A, B)$ (par les résultats de la proposition 4.16) et donc $D = \operatorname{Aff}(A, B)$ pour des raisons de dimensions (cf. proposition 4.9).

2) De même, si $A, B, C \in E$ sont non alignés (i.e. si ABC est un triangle non aplati), alors $\operatorname{Aff}(A, B, C) = A + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un plan (cf. remarque 4.12), et c'est **le seul** passant par A, B, C. On le note (ABC).

4.3 Parallélisme

La notion de parallélisme entre sous-espaces est typique de la géométrie affine. Rappelons sa signification.

Définitions 4.20. Deux sous-espaces affines F et G de E sont dits

- **parallèles** si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}$. On note alors $F \parallel G$;
- **strictement parallèles** si $\vec{F} = \vec{G}$, c'est-à-dire si $F \parallel G$ et $\dim F = \dim G$.

Attention, ce vocabulaire n'est pas standard et peut varier selon les auteurs (dans certains livres on trouvera les vocables « faiblement parallèles » et « parallèles », respectivement).

Exemples 4.21.

1) Tout point est parallèle à n'importe quel autre sous-espace.

2) Deux droites sont parallèles si et seulement si elles possèdent des vecteurs directeurs colinéaires.

3) Un quadrilatère $ABCD$ vérifiant $(AB) \parallel (CD)$ s'appelle un **trapèze**.

4) Quatre points non alignés A, B, C, D forment un parallélogramme si et seulement si $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$ (Exercice).

Proposition 4.22. *Soient F et G deux sous-espaces affines de E.*

1) *Si F et G sont parallèles, alors $F \cap G = \varnothing$ ou $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

2) *Si F et G sont strictement parallèles, alors $F \cap G = \varnothing$ ou $F = G$.*

Démonstration. 1) Supposons $F \cap G$ non vide. Si $\vec{F} \subset \vec{G}$ (resp. si $\vec{G} \subset \vec{F}$) alors $F \subset G$ (resp. $G \subset F$) d'après un résultat de la proposition 4.9.

2) découle directement de 1). ✓

Voici maintenant un résultat célèbre.

Proposition 4.23 (Postulat d'Euclide, alias postulat des parallèles). *Si $A \in E$ et F est un sous-espace de E, alors il existe un unique sous-espace G de E qui passe par A et est strictement parallèle à F : c'est tout simplement $G = A + \vec{F}$.*

Démonstration. L'existence de G est évidente, et l'unicité vient du 3) du corollaire 4.3. ✓

Le qualificatif de cette proposition vient du fait qu'on doit la prendre effectivement comme un postulat lorsqu'on veut définir la géométrie affine de manière axiomatique. Plus précisément, cet énoncé est le dernier des cinq axiomes qu'Euclide avait retenus pour définir la géométrie affine « euclidienne » plane dans ses *Éléments*, au IIIe siècle avant notre ère. On a longtemps cru qu'on pourrait prouver ce cinquième axiome à partir des quatre premiers, et ce n'est qu'au XIXe siècle que fut définitivement établie sa nécessité, lorsque certains mathématiciens démontrèrent qu'en l'échangeant contre un autre (bien choisi), on aboutissait à la construction d'autres géométries.

4.4 Incidence

Étudier l'incidence de deux sous-espaces, c'est étudier la nature de leur intersection. Avant d'énoncer un théorème fondamental pour ce type d'étude, donnons un résultat technique.

Lemme 4.24. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces de E. Soient $A_1 \in F_1$ et $A_2 \in F_2$. Alors :*

1) $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \in \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.
2) $\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) = A_1 + (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + K\overrightarrow{A_1A_2})$.

Démonstration. 1) Supposons qu'il existe $A \in F_1 \cap F_2$. Alors $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2} \in \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Réciproquement, soit $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ une décomposition de $\overrightarrow{A_1A_2}$ dans $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. D'une part, $A_1 + \vec{x}_1 \in F_1$ et d'autre part, $A_1 + \vec{x}_1 = A_1 + (\overrightarrow{A_1A_2} - \vec{x}_2) = A_2 - \vec{x}_2 \in F_2$, donc $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$.

2) Posons $G = A_1 + (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + K\overrightarrow{A_1A_2})$. On a

$$F_1 = A_1 + \overrightarrow{F_1} \subset G, \quad F_2 = A_2 + \overrightarrow{F_2} = A_1 + (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{F_2}) \subset G,$$

d'où $\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) \subset \mathrm{Aff}\, G = G$.

Comme $A_1 \in G \cap \mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2)$, pour obtenir l'inclusion réciproque il suffit d'obtenir l'inclusion des directions $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2)}$ (cf. proposition 4.9). Mais celle-ci devient évidente lorsqu'on écrit $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2)} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F_1 \cup F_2\}$ (voir théorème 4.17). ✓

Théorème 4.25 (Propriété d'incidence). *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E.*

1) *Si $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ (donc si $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace), alors*

$$\dim \mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2);$$

2) *Si $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors*

$$\dim \mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2}) + 1.$$

Démonstration. Ayons à l'esprit la formule de Grassmann : $\dim(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = \dim \overrightarrow{F_1} + \dim \overrightarrow{F_2} - \dim(\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2})$.

1) En utilisant les résultats du lemme, on trouve : $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2)} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + K\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. De là,

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) &= \dim(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) \\ &= \dim \overrightarrow{F_1} + \dim \overrightarrow{F_2} - \dim(\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2}) \\ &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).\end{aligned}$$

2) Comme dans le premier cas, on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2)} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) \oplus K\overrightarrow{A_1A_2}$, d'où

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) &= \dim(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) + 1 \\ &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2}) + 1,\end{aligned}$$

cqfd. ✓

Ce théorème permet d'obtenir facilement de nombreux résultats d'incidence, dont voici les plus utiles :

Corollaire 4.26.

1) *Un sous-espace de dimension p et un point hors de ce sous-espace engendrent un sous-espace de dimension $p+1$.*

2) *Dans un plan affine, deux droites sont soit parallèles, soit sécantes en un unique point.*

3) *Dans un espace affine de dimension 3,*

   a) *si deux droites ne sont pas coplanaires, elles engendrent l'espace tout entier;*

   b) *si une droite n'est pas parallèle à un plan, elle le coupe en un unique point;*

   c) *si deux plans ne sont pas parallèles, ils se coupent selon une droite.*

Démonstration. Exercice. ✓

Avant de donner une autre application très importante, voici une définition.

Définition 4.27. Deux sous-espaces affines de E sont dits **supplémentaires** si leurs directions le sont dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$.

Corollaire 4.28. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E.*

1) *Si $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, alors $F_1 \cup F_2$ engendre E et $F_1 \cap F_2$ est non vide (donc est un sous-espace affine de E).*

2) *Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, alors $F_1 \cap F_2$ est un singleton.*

Ce corollaire est le point de départ de l'étude des projections (cf. paragraphe 4.7).

Démonstration. 1) Soient $A_1 \in F_1$ et $A_2 \in F_2$. Comme $\overrightarrow{A_1A_2} \in \overrightarrow{E} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, le 1) du lemme 4.24 implique $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ et le 2) de ce même lemme 4.24 implique l'égalité $\mathrm{Aff}(F_1 \cup F_2) = A_1 + (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + K\overrightarrow{A_1A_2}) = A_1 + \overrightarrow{E} = E$.

2) résulte de 1) et du théorème 4.25. ✓

Exemple 4.29. L'intersection d'un hyperplan et d'une droite non parallèle à cet hyperplan est un singleton.

4.5 Mesures algébriques et rapports de vecteurs

Il est naturel de vouloir chercher à comparer deux vecteurs lorsque cela paraît intuitivement possible, c'est-à-dire lorsque ces vecteurs sont colinéaires. Pour cela, posons tout d'abord :

Définition 4.30. Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $\overrightarrow{E}$, et soit Δ une droite de E dirigée par $\vec{i}$. Si $A, B \in \Delta$, l'unique scalaire $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{i}$ s'appelle **mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à $\vec{i}$**, et se note $\overline{AB}$.

Les mesures algébriques possèdent des propriétés quasi-évidentes :

Proposition 4.31. *Soit Δ une droite de E munie d'une mesure algébrique définie par rapport à un vecteur directeur $\vec{i}$.*

1) *Si Δ est munie d'une origine O, donc d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \vec{i})$, alors pour tous $A, B \in \Delta$, $\overline{AB} = x_B - x_A$, où x_M désigne l'abscisse de M relativement à $\mathcal{R}$.*

2) *Si $A, B, C \in \Delta$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (relation de Chasles). En particulier, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.*

3) *Si $A, B, C \in \Delta$, $\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow B = C$. En particulier, $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.*

4) *Si on change $\vec{i}$ en $\vec{j} = \alpha\vec{i}$ (avec $\alpha \neq 0$), on divise alors les mesures algébriques par α.*

5) *Si $A, B \in \Delta$ et $\mathrm{Aff}(C, D) \parallel \Delta$, alors $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{CD} = \lambda\overline{AB}$.*

6) *Avec les hypothèses de 5), et si $A \neq B$, le rapport* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ *est indépendant du choix de $\vec{i}$ et vaut l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$.*

Démonstration. 1) On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overline{AC}\,\vec{i} = \overline{AB}\,\vec{i} + \overline{BC}\,\vec{i} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

3) Similaire à 2).

4) Si $\widehat{AB}$ désigne la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à $\vec{j} = \alpha \vec{i}$, on a $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i} = \widehat{AB}\alpha\vec{i}$, d'où $\widehat{AB} = \alpha^{-1}\overline{AB}$.

5) Similaire à 2).

6) découle de 4) et 5). ✓

Comme on préfère avoir des notions intrinsèques, la dernière propriété ci-dessus motive la

Définition 4.32. Soient $A, B, C, D \in E$ tels que $A \neq B$ et $\mathrm{Aff}(C, D) \parallel (AB)$. On appelle **rapport (de colinéarité) de $\overrightarrow{CD}$ par $\overrightarrow{AB}$** l'unique scalaire $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$. On le note $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ (en raison du dernier point de la proposition précédente).

Remarques 4.33.

1) L'emploi de la notation $\mathrm{Aff}(C, D)$ plutôt que (CD) dans la définition permet de considérer le cas éventuel où $C = D$.

2) Insistons bien sur un point : la notation $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ est utilisée pour être cohérente avec l'emploi *éventuel* de mesures algébriques, mais **les rapports de colinéarité des vecteurs existent indépendamment de la notion de mesure algébrique.** C'est d'ailleurs ce qui fait leur intérêt (pas besoin de fixer un vecteur directeur de référence), et sauf cas particulier il n'y a pas lieu d'interpréter un rapport de colinéarité comme un rapport de mesures algébriques.

Cela n'empêche pas, bien sûr, de constater que les rapports de vecteurs ont des propriétés similaires à celles des mesures algébriques :

Proposition 4.34. *Soient A, B, C, C', D, D', G, H des points de E, avec $A \neq B$.*

1) *Si $C, D \in (AB)$ et si la droite (AB) est munie d'un repère cartésien $\mathcal{R}$, alors* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{x_D - x_C}{x_B - x_A}$, *où x_M désigne l'abscisse de M dans $\mathcal{R}$.*

2) *Si C, C', D sont alignés sur une parallèle à (AB), alors* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{AB}} + \dfrac{\overline{C'D}}{\overline{AB}}$ **(relation de Chasles)**. *En particulier,* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$.

3) *Si $C \neq D$, $(CD) \parallel (AB)$ et $\mathrm{Aff}(G, H) \parallel (AB)$, alors* $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{CD}} \cdot \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$. *En particulier,* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\right)^{-1}$.

4) *Si C, D, D' sont alignés sur une parallèle à (AB), alors* $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CD'}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow D = D'$.

Démonstration. On peut, soit se fixer un vecteur directeur $\vec{i}$ arbitraire et appliquer les propriétés des mesures algébriques (puisqu'on les connaît, ce sera plus rapide), soit retrouver ces propriétés directement en utilisant la définition. (Encore une fois, rappelons qu'il n'est pas indispensable de penser qu'un rapport de colinéarité est un rapport de mesures algébriques.) ✓

4.6 Sous-espaces et applications affines

Dans ce paragraphe, F désigne un autre K-espace affine.

L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est encore un sous-espace vectoriel. Dans le cas affine, une précaution s'impose pour l'image réciproque.

Proposition 4.35. *Soit $f \in A(E, F)$.*

1) *Si G est un sous-espace affine de E, alors $f(G)$ est un sous-espace affine de F, de direction $\overrightarrow{f(G)} = \vec{f}(\vec{G})$. En outre,* $\dim f(G) \leq \dim G$, *avec égalité si f est injective (ou bijective).*

2) *Si H est un sous-espace affine de F, alors $f^{-1}(H)$ est* **soit** *vide,* **soit** *un sous-espace affine de E, de direction $\overrightarrow{f^{-1}(H)} = \vec{f}^{-1}(\vec{H})$.*

Démonstration. Exercice. ✓

Exemple 4.36. Si $f \in A(E, F)$ est bijective et si A, B sont deux points distincts de E, alors $f\big((AB)\big) = \big(f(A)f(B)\big)$ (car c'est une droite, et elle doit contenir les deux points distincts $f(A)$ et $f(B)$).

Regardons maintenant si les applications affines conservent les relations ensemblistes entre sous-espaces.

Rappel 4.37. Soient E, F deux ensembles (quelconques), $f : E \longrightarrow F$ une application, G_1, G_2 deux parties de E, H_1, H_2 deux parties de F.

1) Si $G_1 \subset G_2$, alors $f(G_1) \subset f(G_2)$.
2) $f(G_1 \cap G_2) \subset f(G_1) \cap f(G_2)$, avec égalité si f est injective.
3) Si $H_1 \subset H_2$, alors $f^{-1}(H_1) \subset f^{-1}(H_2)$.
4) $f^{-1}(H_1 \cap H_2) = f^{-1}(H_1) \cap f^{-1}(H_2)$.

Bien entendu, ces résultats généraux s'appliquent au cas des applications affines et des sous-espaces. Deux cas particuliers sont à noter.

Proposition 4.38. *Soit $f \in A(E, F)$, supposée* **injective** *(ou bijective). Si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces de E, alors $f(G_1) \cap f(G_2) = f(G_1 \cap G_2)$. En particulier :*

1) *si $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, alors $f(G_1) \cap f(G_2) = \varnothing$;*

2) *sinon (i.e. si $G_1 \cap G_2$ est un sous-espace de E), alors $f(G_1) \cap f(G_2)$ est un sous-espace de F, et* $\dim\big(f(G_1) \cap f(G_2)\big) = \dim(G_1 \cap G_2)$.

On retient souvent cette propriété en disant qu'une injection affine « conserve le contact » (entre sous-espaces).

Exemple 4.39. Toute injection ou bijection affine transforme deux droites sécantes en deux droites sécantes.

Enfin, les applications affines (injectives ou non) conservent trois autres notions fondamentales, typiquement affines cette fois.

Théorème 4.40. *Soit $f \in A(E, F)$.*

1) *f conserve l'alignement, c'est-à-dire : si A, B, C sont alignés, alors $f(A), f(B), f(C)$ le sont aussi.*

2) *f conserve le parallélisme des sous-espaces, c'est-à-dire : si $G_1 \parallel G_2$, alors $f(G_1) \parallel f(G_2)$.*

3) *f conserve le rapport, c'est-à-dire : si A, B, C, D sont des points de E tels que $A \neq B$, $f(A) \neq f(B)$ et $\mathrm{Aff}(C, D) \parallel (AB)$, alors*

$$\mathrm{Aff}(f(C), f(D)) \parallel (f(A)f(B)) \quad \text{et} \quad \frac{\overline{f(C)f(D)}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Démonstration. 1) Soit Δ une droite contenant A, B, C. Par la proposition 4.35, $f(\Delta)$ est un sous-espace de dimension 0 ou 1, contenant $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$.

2) Si par exemple $\vec{G_1} \subset \vec{G_2}$, alors $\vec{f}(\vec{G_1}) \subset \vec{f}(\vec{G_2})$ (cf. premier rappel ci-dessus), et donc $f(G_1) \parallel f(G_2)$.

3) La première assertion résulte de 2) et ne sert qu'à justifier l'existence du rapport $\dfrac{\overline{f(C)f(D)}}{\overline{f(A)f(B)}}$. Ensuite on écrit

$$\overrightarrow{f(C)f(D)} = \vec{f}(\overrightarrow{CD}) = \vec{f}\Big(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}\Big) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

D'où l'égalité voulue par définition (donc unicité) d'un rapport. ✓

4.7 Projections et théorème(s) de Thalès

Soit F un sous-espace affine de E. On se donne un supplémentaire $\vec{G}$ de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$ et, pour tout point M de E, on pose $G_M = M + \vec{G}$. D'après le corollaire 4.28, l'intersection $F \cap G_M$ est constituée d'un unique point M'.

Définition 4.41. L'application $p : E \longrightarrow E$, $M \longmapsto M' = F \cap G_M$ s'appelle la **projection de E sur F parallèlement à $\vec{G}$** (ou : **de direction $\vec{G}$**). On dit également que M' est le **projeté de M sur F parallèlement à $\vec{G}$**.

Proposition 4.42. *Soit p la projection de E sur F parallèlement à $\vec{G}$.*

1) *p est un endomorphisme affine de E, et sa partie linéaire $\vec{p}$ n'est autre que la projection vectorielle de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$. En particulier, $\vec{G} = \mathrm{Ker}\,\vec{p}$.*

2) $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}(p) = F$.

3) *Si $F \neq E$, p n'est ni injective, ni surjective.*

4) $p \circ p = p$.

5) $\{\overrightarrow{Mp(M)},\ M \in E\} = \vec{G}$.

Démonstration. 1) Notons π la projection de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$: si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \in \vec{F} \oplus \vec{G}$, alors $\pi(\vec{x}) = \vec{y}$. Soient $M, N \in E$ et posons $M' = p(M)$, $N' = p(N)$. On a

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} + (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{NN'}).$$

Or $M', N' \in F$ donc $\overrightarrow{M'N'} \in \vec{F}$, et $\overrightarrow{MM'} \in \vec{G_M} = \vec{G}$, $\overrightarrow{NN'} \in \vec{G_N} = \vec{G}$ donc $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{NN'} \in \vec{G}$. Par conséquent, la formule ci-dessus reflète la décomposition du vecteur $\overrightarrow{MN}$ dans la somme directe $\vec{F} \oplus \vec{G}$. Par unicité de cette décomposition, on en déduit que $\overrightarrow{p(M)p(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \pi(\overrightarrow{MN})$, si bien que p est affine, de partie linéaire π.

2) Si $M \in \mathrm{Inv}(p)$, alors $p(M) = M$, donc $M \in \mathrm{Im}(p)$; on a donc $\mathrm{Inv}(p) \subset \mathrm{Im}(p)$. Ensuite l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset F$ est évidente par définition de p. Enfin, si $M \in F$, alors $M \in F \cap G_M$, donc $M = p(M)$, i.e. $M \in \mathrm{Inv}(p)$.

3) Si $F \neq E$, alors d'une part $\mathrm{Im}(p) \neq E$ par 2), donc p n'est pas surjective. D'autre part, $\vec{F} \neq \vec{E}$, donc $\vec{G} \neq \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,\vec{p} \neq \{\vec{0}\}$: ainsi $\vec{p}$ n'est pas injective, donc p non plus.

4) résulte immédiatement de la définition de p.

5) L'inclusion directe est évidente, puisque $p(M) \in G_M = M + \vec{G}$ par définition. Réciproquement, soient $\vec{x} \in \vec{G}$, $N \in F$ et $M = N - \vec{x}$. Alors $N = M + \vec{x} \in G_M$, donc $N \in G_M \cap F = \{p(M)\}$. Ainsi il existe $M \in E$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{MN} = \vec{x}$, cqfd. ✓

En réalité l'une des propriétés énoncées caractérise les projections parmi les endomorphismes de E :

Proposition 4.43. *Soit f un endomorphisme affine de E. Alors f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.*

Démonstration. Exercice. ✓

L'utilisation des projections permet une démonstration rapide[1] du plus célèbre théorème de géométrie affine.

Théorème 4.44 (Théorème de Thalès[2], énoncé général). *Dans un espace affine de dimension ≥ 2, soient H_A, H_B, H_C trois hyperplans parallèles et distincts, et soient D, D' deux droites non parallèles à ces hyperplans.*
Notons A, B, C (resp. A', B', C') les points d'intersection de D (resp. de D') avec H_A, H_B, H_C, respectivement[3].
Alors $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. (Ces rapports existent puisque A, B, C (resp. A', B', C') sont deux à deux distincts vu les hypothèses sur les hyperplans.)

Démonstration. Soit p la projection sur D', parallèlement à la direction commune $\vec{H}$ des hyperplans H_A, H_B, H_C. Alors $p(A) = (A + \vec{H}) \cap D' = H_A \cap D' = A'$, et de même $p(B) = B'$, $p(C) = C'$. Le théorème s'ensuit puisqu'on sait qu'une application affine conserve les rapports. ✓

Dans un plan affine, ce résultat reste évidemment vrai, mais possède également une réciproque[4] :

Théorème 4.45 (Théorème de Thalès et réciproque dans le plan). *Dans un plan affine, soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ trois droites distinctes, avec $\Delta_A \parallel \Delta_B$. Soient D, D' deux autres droites, on suppose qu'elles coupent $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ respectivement en des points A, B, C et A', B', C', et que ces six points sont deux à deux distincts.*

Alors Δ_C est parallèle à Δ_A et Δ_C si et seulement si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Démonstration. Le sens direct est un cas particulier du théorème précédent.

Pour la réciproque, considérons C'' le point d'intersection entre D' et la parallèle Δ à Δ_A et Δ_B passant par C. Alors $C'' \neq A'$ (sinon $C = A$) et d'après le sens direct, on a $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$. Or par hypothèse $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc par transitivité $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$. Par une propriété des rapports ceci implique $C'' = C'$, donc $(CC'') = (CC')$ c'est-à-dire $\Delta = \Delta_C$, cqfd. ✓

---

1. Le théorème de Thalès peut également se démontrer par calcul vectoriel, par calcul dans un repère, par utilisation d'homothéties et translations; mais la preuve présentée ici est de loin la plus rapide.
2. Thalès de Milet, env. 625-547 av. J.C.
3. Leur existence et unicité ont été justifiées dans l'exemple 4.29.
4. Dans l'espace le théorème de Thalès possède plusieurs réciproques, mais pas aussi intéressantes que dans le plan.

Pour terminer, voici une autre version du théorème de Thalès dans le plan, plus traditionnelle peut-être et en tout cas très utile.

Théorème 4.46 (Théorème de Thalès et réciproque dans un triangle). *Dans un plan affine, soient D, D' deux droites sécantes en un point O, et soient A, B (resp. A', B') deux points de D (resp. de D') distincts de O.*

Alors (AA') et (BB') sont parallèles si et seulement si $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$. En outre, si ces conditions sont réalisées, on a $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$.

Démonstration. Exercice. ✓

4.8 Formes affines et équations

Il est souvent commode de réaliser un sous-espace affine comme un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes vérifient certaines relations (cf. l'analogue vectoriel). Nous allons montrer comment obtenir de telles relations en les justifiant d'abord par la théorie. Pour cela, nous utiliserons en particulier des résultats d'algèbre linéaire qui ont été (re)vus dans l'exercice 5.

Définition 4.47. On appelle **forme affine sur E** tout élément de l'ensemble $A(E, K)$ (K étant ici muni de sa structure affine canonique).

Théorème 4.48.

1) *Soit $f \in A(E, K)$ non constante et soit $\alpha \in K$. Alors $f^{-1}(\alpha)$ est un hyperplan H de E, de direction* $\operatorname{Ker} \vec{f}$. *Comme $M \in H \Leftrightarrow f(M) = \alpha$, on dit que l'équation $f(M) = \alpha$ est une* **équation de H**.

2) *Soit H un hyperplan de E. Alors il existe $f \in A(E, K)$ non constante telle que $H = f^{-1}(0)$, i.e. telle que $f(M) = 0$ soit une équation de H. En outre, $f'(M) = 0$ est une autre équation de H si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $f' = \lambda f$. (Un hyperplan admet donc une infinité d'équations, deux à deux proportionnelles.)*

3) *Soit H un hyperplan d'équation $f(M) = 0$. Alors les hyperplans parallèles à H sont exactement ceux dont une équation est $f(M) = \alpha$, pour un $\alpha \in K$.*

Démonstration. 1) Comme $\{\alpha\}$ est un sous-espace de K, et comme f est affine, on sait déjà que $f^{-1}(\alpha)$ est soit vide, soit un sous-espace de E, de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{0}) = \operatorname{Ker} \vec{f}$. Montrons donc que $f^{-1}(\alpha) \neq \varnothing$: puisque $f \in A(E, K)$, $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un sous-espace de K, c'est donc un point de K ou bien K tout entier. Mais f est non constante, d'où $\operatorname{Im} f = K$, i.e. f surjective, si bien qu'on peut trouver au moins un $A \in E$ tel que $f(A) = \alpha$. On a donc prouvé que $f^{-1}(\alpha)$ est bien un sous-espace de E, de direction $\operatorname{Ker} \vec{f}$. Or $\vec{f}$ est une forme linéaire non nulle sur $\vec{E}$ (cf. deuxième exemple de 2.4), donc on sait que $\operatorname{Ker} \vec{f}$ est un hyperplan de $\vec{E}$.

2) Ecrivons $H = A + \vec{H}$. L'hyperplan vectoriel $\vec{H}$ peut se réaliser comme le noyau $\operatorname{Ker} \sigma$ d'une forme linéaire non nulle σ sur $\vec{E}$. Définissons alors une forme affine f par les données $f(A) = 0$ et $\vec{f} = \sigma$ (voir proposition 2.9). Alors f est non constante, et on a, pour tout $M \in H$,

$$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \sigma(\underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in \vec{H}}) = 0 + \vec{0} = 0.$$

D'où l'inclusion $H \subset f^{-1}(0)$, et même l'égalité, car on sait par 1) que $f^{-1}(0)$ est un hyperplan.

Supposons maintenant que $f'(M) = 0$ soit une autre équation de H, avec $f' \in A(E, K)$ non constante. De l'égalité $H = f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$ on déduit $\vec{H} = \operatorname{Ker} \vec{f} = \operatorname{Ker} \vec{f'}$. Ainsi, il existe

$\lambda \in K^*$ tel que $\vec{f'} = \lambda \vec{f}$. Par ailleurs, pour tout $M \in H$, on a $\lambda f(M) = 0 = f'(M)$, ce qui établit l'égalité $f' = \lambda f$ sur E tout entier (cf. corollaire 2.10).

Réciproquement, il est clair que $f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$ si $f' = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$.

3) Soient H et H' deux hyperplans d'équations respectives $f(M) = 0$ et $f'(M) = 0$. Observons déjà que

$$\begin{aligned} H \parallel H' &\Leftrightarrow \vec{H} = \vec{H'} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \vec{f} = \operatorname{Ker} \vec{f'} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* : \vec{f'} = \lambda \vec{f} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* : \vec{f'} - \lambda \vec{f} \equiv \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, \exists \mu \in K : f' = \lambda f + \mu. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons $H \parallel H'$. Alors $M \in H' \Leftrightarrow f'(M) = 0 \Leftrightarrow f(M) = -\frac{\mu}{\lambda}$ et on a donc trouvé $\alpha \in K$ tel que $f(M) = \alpha$ soit une équation de H'.

Réciproquement, supposons que H' admette pour équation $f(M) = \alpha$. Pour tout $M \in E$, posons $f'(M) = f(M) - \alpha$. Comme f est une forme affine non constante, on voit que f' est aussi une forme affine non constante et que $f'(M) = 0$ est une équation de H'. Ce qui précède montre alors que $H' \parallel H$. ✓

Afin d'adapter la notion d'équation à un sous-espace affine général, donnons maintenant la :

Définition 4.49. Des formes affines sur E seront dites **indépendantes** si leurs parties linéaires respectives sont linéairement indépendantes dans $\vec{E}^*$.

On observera que des formes affines indépendantes sont nécessairement non constantes.

Théorème 4.50. *Posons $n = \dim E$. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, et soit F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un sous-espace affine de dimension p de E ;*

(ii) *il existe $n-p$ formes affines indépendantes $f_1, \dots, f_{n-p}$ sur E telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} f_i^{-1}(0)$.*

Si ces conditions sont réalisées, on dira que le sous-espace F admet $\{f_i(M) = 0\}_{i=1}^{n-p}$ pour ***système d'équations****.*

Démonstration. Supposons d'abord que F soit un sous-espace affine de dimension p : $F = A + \vec{F}$, avec $\vec{F}$ sous-espace vectoriel de dimension p de $\vec{E}$. D'après les résultats de l'exercice 5, il existe des formes linéaires indépendantes $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-p}$ telles que $\vec{F} = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \sigma_i$. Par suite, $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} (A + \operatorname{Ker} \sigma_i)$. Par ailleurs, en utilisant la proposition 2.9 on peut définir des formes affines indépendantes f_i ($i = 1, \dots, n-p$) en décrétant que $f_i(A) = 0$ et $\vec{f_i} = \sigma_i$. On a alors $f_i^{-1}(0) = A + \operatorname{Ker} \sigma_i$ (par le théorème précédent), d'où l'écriture voulue pour F.

Réciproquement, supposons qu'il existe des formes affines indépendantes $f_1, \dots, f_{n-p}$ sur E, telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} f_i^{-1}(0)$. Comme en particulier chaque f_i est non constante, d'après le théorème 4.48 chaque $f_i^{-1}(0)$ est un hyperplan de E, de direction $\operatorname{Ker} \vec{f_i}$. Supposons qu'on sache que F est non vide. Alors F est un sous-espace affine, de direction $\vec{F} = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \vec{f_i}$ avec les $\vec{f_i}$ linéairement indépendantes. Par suite (cf. exercice 5), $\vec{F}$ est de dimension p, c'est-à-dire que F est de dimension p.

Il reste donc à voir que $F \neq \varnothing$. Pour cela, on construit l'application $f : E \longrightarrow K^{n-p}$, $M \longmapsto (f_1(M), \dots, f_{n-p}(M))$. Elle est clairement affine, et sa partie linéaire est surjective car les $\vec{f_i}$ sont indépendantes (preuve laissée en exercice). Par suite, f est surjective donc $F = f^{-1}(\vec{0}_{K^{n-p}})$ est non vide. ✓

On observera en particulier que tout sous-espace affine de dimension p s'écrit comme intersection de $n-p$ hyperplans (ou plus), et ne peut s'écrire comme intersection de k hyperplans, avec $k < n-p$.

Par ailleurs, il est bien clair que l'énoncé du théorème n'a pas de sens pour $p = n$, i.e. pour $F = E$.

Enfin, lorsqu'on interprète les résultats précédents avec des coordonnées cartésiennes, on retrouve bien entendu les classiques (systèmes d') équations cartésiennes (voir exercice 34).

5 Familles libres, familles génératrices, bases (repères affines)

Dans tout ce paragraphe, on fixe un espace affine E.

Définition 5.1. On dit qu'une partie non vide X de E est **(affinement) génératrice** dans E si $\mathrm{Aff}\, X = E$.

Par exemple, deux points distincts d'une droite engendrent cette droite (cf. le premier exemple de 4.19).

Définition 5.2. Soit $X = \{A_0, \ldots, A_p\}$ une famille finie de $p+1$ points de E. On appelle **rang de X** et on note $\mathrm{rg}\, X$ la dimension de $\mathrm{Aff}\, X$.

Comme on sait que $\mathrm{Aff}(A_0, \ldots, A_p) = A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ (cf. corollaire 4.18), on voit que le rang de $\{A_0, \ldots, A_p\}$ n'est autre que le rang de la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. En particulier, on observera que $0 \leq \mathrm{rg}\, X \leq p$.

Définitions 5.3. Soit $X = \{A_0, \ldots, A_p\}$ une famille finie de $p+1$ points de E.

1) Si $\mathrm{rg}\, X = p$, on dit que la famille X est **(affinement) libre** dans E ou que les A_i sont **(affinement) indépendants** dans E. Dans le cas contraire ($\mathrm{rg}\, X < p$), on dira que la famille X est **(affinement) liée**, ou que les A_i sont **(affinement) dépendants**.

2) Si X est une famille à la fois libre et génératrice dans E, on dit que X est une **base (affine)** de E, ou encore un **repère affine** de E.

Avec ces définitions et quelques rappels d'algèbre linéaire, ce qui vient d'être vu se traduit par la :

Proposition 5.4. *Soit $X = \{A_0, \ldots, A_p\}$ une famille finie de $p+1$ points de E. On suppose E de dimension n et on note $Y = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. Alors :*

1) *X est libre dans E si et seulement si Y est libre dans $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p \leq n$;*

2) *X est génératrice dans E si et seulement si Y est génératrice dans $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p \geq n$;*

3) *X est une base de E si et seulement si Y est une base de $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p = n$. (En dimension n, toute base de l'espace possède donc $n+1$ éléments.)*

4) *Si $p = n$, il y équivalence entre les assertions :*

(i) *X est libre;*

(ii) *X est génératrice;*

(iii) *X est une base.*

Définition 5.5. Lorsque $X = \{A_0, \ldots, A_n\}$ est un repère affine de E, la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ de $\overrightarrow{E}$ s'appelle **base de $\overrightarrow{E}$ associée à X**.

Remarque 5.6. Dans tous ces énoncés, nous avons privilégié le premier point A_0 de la famille $X = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$, pour former des vecteurs notamment. Il est très facile de voir que nos résultats ne dépendent pas de ce choix. Par exemple, il est équivalent de dire :

(i) les points A, B, C sont indépendants;

(ii) les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants;

(iii) les vecteurs $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ sont linéairement indépendants;

(iv) les vecteurs $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ sont linéairement indépendants.

Voici encore une caractérisation très utile.

Proposition 5.7. *Soit $X = \{A_0, \dots, A_p\}$ une famille finie de points de E.*
Alors : X est liée $\Leftrightarrow \exists i \in [\![0, p]\!] : A_i \in \mathrm{Aff}(A_1, \dots, \widehat{A_i}, \dots, A_p)$.
Par conséquent : X est libre $\Leftrightarrow \forall i \in [\![0, p]\!] : A_i \notin \mathrm{Aff}(A_1, \dots, \widehat{A_i}, \dots, A_p)$.

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
X \text{ est liée } &\Leftrightarrow \{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\} \text{ est liée (cf. proposition précédente)} \\
&\Leftrightarrow \exists i \in [\![0, p]\!] : \overrightarrow{A_0A_i} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \widehat{\overrightarrow{A_0A_i}}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in [\![0, p]\!] : A_i \in A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \widehat{\overrightarrow{A_0A_i}}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in [\![0, p]\!] : A_i \in \mathrm{Aff}(A_0, \dots, \widehat{A_i}, \dots, A_p) \quad \text{(cf. corollaire 4.18)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ✓

Il est bien clair que toute sous-famille d'une famille libre est encore libre, et que toute sur-famille d'une famille génératice est encore génératrice. Dans le même ordre d'idées, on obtient facilement les résultats suivants à partir de leurs analogues vectoriels.

Théorème 5.8.

1) **Théorème de la base incomplète :** *soit X une famille libre de points de E. Alors il existe (au moins) une base de E contenant X.*

2) *De toute partie génératrice (finie ou non) X de E on peut extraire (au moins) une sous-famille qui soit une base de E.*

Voici maintenant une caractérisation plus géométrique des notions abordées dans ce paragraphe.

Théorème 5.9. *Soit $X = \{A_0, \dots, A_p\}$ une famille finie de $p + 1$ points d'un espace affine E de dimension n. Alors :*

1) *X est libre si et seulement si $p \leq n$ et X n'est contenue dans aucun sous-espace de dimension $p - 1$ de E;*

2) *X est génératrice si et seulement si $p \geq n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E;*

3) *X est un repère affine si et seulement si $p = n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E.*

Démonstration. Exercice. ✓

Exemples 5.10.

1) Deux points A, B d'une droite en forment un repère affine si et seulement s'ils sont distincts.

2) Trois points A, B, C d'un plan en forment un repère affine si et seulement s'ils sont non alignés, i.e. si et seulement si ABC est un triangle non aplati.

3) Quatre points A, B, C, D d'un espace tridimensionnel en forment un repère affine si et seulement s'ils sont non coplanaires, i.e. si et seulement si $ABCD$ est un tétraèdre non aplati.

Pour finir, une traduction simple de la proposition 3.6 en termes de bases affines.

Théorème 5.11. *Soient E, F deux espaces affines, E étant supposé de dimension n. Soit $(A_i)_{i=0}^n$ un repère affine de E, et soit $(B_i)_{i=0}^n$ une famille quelconque de points de F.*
Alors il existe une unique $f \in A(E, F)$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i. En outre,

1) *f est injective si et seulement si (B_i) est libre dans F ;*
2) *f est surjective si et seulement si (B_i) est génératrice dans F ;*
3) *f est bijective si et seulement si (B_i) est un repère affine de F.*

Grâce à ce théorème et à la proposition 3.6, on retiendra donc qu'**une application affine est entièrement déterminée par la donnée d'un repère (cartésien ou affine) et de son image**, exactement comme dans le cas vectoriel.

Remarque 5.12. En général, qui dit « base » dit systèmes de coordonnées associées à cette « base » (penser aux repères cartésiens). Les repères affines ont eux aussi un système de coordonnées privilégié, les coordonnées barycentriques, que nous allons définir dans le paragraphe suivant.

6 Barycentres

En algèbre linéaire, la notion fondamentale est celle de combinaison linéaire : un sous-espace vectoriel est une partie stable par toute combinaison linéaire de vecteurs, une application linéaire est une application qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs en la combinaison linéaire de leurs images, etc. Dans le contexte affine, un rôle similaire va être joué par la notion de barycentre.

Comme d'habitude, dans ce paragraphe la lettre E désigne un K-espace affine.

6.1 Définitions, propriétés élémentaires et notations

Définitions 6.1.

1) **Une famille (un système) de points pondérés de E** est une famille **finie** $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $E \times K$. On dit alors que λ_i est le **poids**, la **masse** ou le **coefficient** du point A_i.

2) Si $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de points pondérés de E, l'application $f : E \to \vec{E}$, $M \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ s'appelle **fonction vectorielle de Leibniz associée à la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$**.

Théorème 6.2. *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ une famille de points pondérés de E, et soit f la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.*

1) *L'application f est affine ($\vec{E}$ étant supposé muni de sa structure affine canonique).*

2) *Si $\sum_i \lambda_i \neq 0$, f est bijective. En particulier, il existe un unique point $G \in E$ vérifiant $f(G) = \vec{0}$, c'est-à-dire $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.*

3) *Si $\sum_i \lambda_i = 0$, f est constante. Il existe donc un unique vecteur $\vec{v} \in \vec{E}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{v}$ pour tout $M \in E$.*

Démonstration. 1) Pour tous $M, N \in E$, on a $\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (-\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{MN}$. Donc f est affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $\vec{f} = (-\sum_i \lambda_i)\,\mathrm{id}$.

2) Si $\sum_i \lambda_i \neq 0$, $\vec{f}$ est bijective, donc f aussi.

3) Si $\sum_i \lambda_i = 0$, $\vec{f}$ est identiquement nulle, donc f est constante. ✓

Définitions 6.3. Lorsque $\sum_i \lambda_i \neq 0$, le point G défini par la condition $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ est appelé le **barycentre** de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$, et noté $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.
Si de plus tous les λ_i sont égaux (et donc non nuls), on dira que G est l'**isobarycentre** de la famille $(A_i)_{i\in I}$. En particulier, l'isobarycentre I de deux points A et B s'appelle le **milieu du bipoint**

(A, B). [Attention à ne pas dire milieu d'un segment : cette notion n'a pas encore été définie et n'a de sens que lorsque $K = \mathbb{R}$.] Il est donc défini par la relation $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ou encore, par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Remarque 6.4. Lorsqu'on considère un triangle (non aplati) ABC, l'isobarycentre de A, B, C coïncide avec le ou le **centre de gravité** (au sens physique) du triangle ABC. Ce n'est pas le cas pour des polygones généraux. De même on pourra employer (avec la même précaution) le terme de **centre de gravité d'un tétraèdre** pour parler de l'isobarycentre de ses sommets.

Proposition 6.5. *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ *;*

(ii) $\forall M \in E,\ (\sum_{i\in I} \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$*;*

(ii)$'$ $G = \dfrac{\sum_{i\in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i\in I} \lambda_i}$ *dans tout vectorialisé E_M de E ;*

(iii) $\exists M \in E,\ (\sum_{i\in I} \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$*;*

(iii)$'$ $G = \dfrac{\sum_{i\in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i\in I} \lambda_i}$ *dans un vectorialisé E_M de E.*

Démonstration. Observons que, pour tous $M, N \in E$, on a : $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{MN} + \sum \lambda_i \overrightarrow{NA_i}$. Cette relation prouve (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i), et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale.

Pour démontrer (ii) $\Leftrightarrow$ (ii)$'$ et (iii) $\Leftrightarrow$ (iii)$'$, rappelons que le vectorialisé E_M de E en M est isomorphe comme K-espace vectoriel à $\vec{E}$ via la bijection $\psi_M : \vec{E} \to E, \vec{x} \mapsto M + \vec{x}$. Ainsi l'écriture $(\sum \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ dans $\vec{E}$ se traduit par $(\sum \lambda_i)G = \sum \lambda_i A_i$ dans E_M. ✓

L'expression des barycentres en termes de vectorialisés motive la :

Notation 6.6. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$. On emploiera l'écriture $G = \dfrac{\sum_{i\in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i\in I} \lambda_i}$ pour signifier que $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$, avec le sous-entendu qu'il s'agit d'une égalité entre **vecteurs** d'un (de tout) vectorialisé de E. En particulier, le membre de droite de cette égalité sera considéré comme une **combinaison linéaire** de vecteurs.

Utiliser cette notation, c'est donc ramener le calcul barycentrique à un calcul vectoriel. Ce point de vue possède de nombreux avantages, notamment en ce qui concerne la manipulation concrète de barycentres. Voici tout de suite un premier exemple d'application.

Exemple 6.7. Soit G le barycentre d'un système $((A, \lambda), (B, \mu))$, où $\lambda + \mu \neq 0$. On peut donc écrire $G = \frac{\lambda A + \mu B}{\lambda + \mu}$. Puisqu'il s'agit d'une écriture vectorielle, on obtient l'identité $(\lambda + \mu)G = \lambda A + \mu B$, et on en déduit immédiatement deux formulations équivalentes, à savoir :

$$A = \tfrac{\lambda+\mu}{\lambda} G - \tfrac{\mu}{\lambda} B \quad (\text{si } \lambda \neq 0), \qquad B = \tfrac{\lambda+\mu}{\mu} G - \tfrac{\lambda}{\mu} A \quad (\text{si } \mu \neq 0),$$

qui permettent d'exprimer cette fois A (resp. B) comme barycentre de G et B (resp. de G et A).

Remarque 6.8. Il est clair que si G est un barycentre de deux points A et B, alors G, A, B sont alignés. En particulier, si $A \neq B$, on a $G \in (AB)$.

Comme autres exemples d'utilisation de notre notation vectorielle, on trouve la preuve des propriétés classiques des barycentres.

Proposition 6.9. *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$.*

1) *S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$, alors $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.*

Conséquence : *on peut toujours se ramener à une famille où tous les poids sont non nuls.*

2) **Commutativité :** $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(A_{\sigma(i)}, \lambda_{\sigma(i)})_{i\in I}$ *pour toute permutation σ de l'ensemble I.*

3) **Homogénéité :** $\mathrm{bar}(A_i, \alpha\lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ *pour tout $\alpha \in K^*$.*

Conséquence : *quitte à diviser chaque λ_i par $\sum_i \lambda_i$, on peut toujours se ramener à un système où $\sum_i \lambda_i = 1$. On pourra ainsi écrire* $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \lambda_i A_i$.

4) **Associativité :** *Soit $I = \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k$ une partition de I. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le scalaire $\mu_k = \sum_{i\in I_k} \lambda_i$ est* **non nul**, *et on note $G_k = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I_k}$. Alors* $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(G_k, \mu_k)_{k=1}^{p}$.

Conséquence : *la construction d'un barycentre de $m \geq 2$ points peut se ramener, par étapes successives, à $m - 1$ constructions de barycentres de 2 points.*

Démonstration. Les points 1) et 2) sont évidents.

3) Il suffit d'écrire : $\frac{\sum \alpha\lambda_i A_i}{\sum \alpha\lambda_i} = \frac{\alpha}{\alpha}\frac{\sum \lambda_i A_i}{\sum \lambda_i} = \frac{\sum \lambda_i A_i}{\sum \lambda_i}$, puisqu'en utilisant cette notation on raisonne dans un espace vectoriel.

4) Là encore, la notation introduite donne :

$$\frac{\sum_{k=1}^{p} \mu_k G_k}{\sum_{k=1}^{p} \mu_k} = \frac{\sum_{k=1}^{p} \mu_k \frac{\sum_{i\in I_k} \lambda_i A_i}{\sum_{i\in I_k} \lambda_i}}{\sum_{k=1}^{p} \mu_k} = \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{i\in I_k} \lambda_i A_i}{\sum_{k=1}^{p} \sum_{i\in I_k} \lambda_i} = \frac{\sum_{i\in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i\in I} \lambda_i},$$

cqfd. ✓

Exemples 6.10.

1) Le milieu I d'un bipoint (A, B) peut se noter $I = \frac{A+B}{2}$ (homogénéité). Comme $I = \frac{A+B}{2}$ (commutativité), I est aussi milieu de (B, A).

2) Soit ABC un triangle non aplati. Posons $A' = \frac{B+C}{2}$, $B' = \frac{C+A}{2}$, $C' = \frac{A+B}{2}$. Alors (AA'), (BB') et (CC') sont des droites distinctes, appelées **médianes** du triangle ABC. Ce sont bien des droites, car si par exemple $A = A'$, cela signifie que $A \in (BC)$, ce qui est impossible. De même, si par exemple $(AA') = (BB')$, alors en particulier $A' \in (AB)$. Mais comme $A' \in (BC)$ aussi, cela donnerait $A' = B$ et donc $B = C$, contradiction.

Soit maintenant $G = \frac{A+B+C}{3}$ l'isobarycentre du triangle ABC. En utilisant la propriété d'associativité, on trouve :

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\frac{B+C}{2} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A'.$$

On en déduit que $G \in (AA')$ et que $\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{2}{3}$. Avec d'autres calculs similaires, on obtient finalement les identités suivantes :

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') = \{G\}, \qquad \frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CC'}} = \frac{2}{3},$$
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}, \qquad G = \frac{A' + B' + C'}{3}.$$

Soient maintenant A, B, C trois points quelconques de E, et soit $G = A - 2B + 2C$. Pour déterminer G, on écrit naturellement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{BC}\\ &\Leftrightarrow G = A + 2\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Autrement dit, on a $A - 2B + 2C = A + 2\overrightarrow{BC}$. Puisque $C - B = \overrightarrow{BC}$, on voudrait pouvoir écrire directement $A - 2B + 2C = A + 2C - 2B = A + 2(C - B) = A + 2\overrightarrow{BC}$.

Pour autoriser effectivement cette écriture, on donne plus généralement la :

Notation 6.11. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$. On pose $\sum_{i\in I} \lambda_i A_i = \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la valeur constante du vecteur $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ (cf. théorème 6.2).

Cette notation permet bien d'écrire : $\forall \lambda \in K$, $\lambda B - \lambda A = \lambda\overrightarrow{AB}$. On retrouve en particulier la convention $B - A = \overrightarrow{AB}$ introduite en 1.8.

Remarques 6.12.

1) Le fait d'avoir choisi la même notation $\sum \lambda_i A_i$ pour désigner deux objets de nature différente (un point ou un vecteur) trouve son explication dans un résultat théorique que nous ne développerons pas ici (plongement d'un espace affine dans un espace vectoriel, voir exercice 45).

2) **Attention!** L'écriture $\sum \lambda_i A_i$ possède un sens (dans un vectorialisé de E) pour n'importe quelle valeur de $\sum \lambda_i$, mais elle ne représente un barycentre (resp. un vecteur) que si $\sum \lambda_i = 1$ (resp. si $\sum \lambda_i = 0$).
Par exemple, on peut écrire : $D = A - B + C \Leftrightarrow D + B = A + C \Leftrightarrow \frac{B+D}{2} = \frac{A+C}{2}$ car les trois équations ont un sens dans un vectorialisé, mais seules les première et troisième ont une signification en termes de barycentres.

Observons au passage que $D = A - B + C$ équivaut à $D = A + \overrightarrow{BC}$, donc à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Nous venons donc de démontrer :

Proposition 6.13. *$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si (A, C) et (B, D) ont même milieu, appelé* **centre** *du parallélogramme.*

6.2 Caractérisations barycentriques des sous-espaces et des morphismes affines

Théorème 6.14. *Pour qu'une partie non vide F de E soit un sous-espace affine de E, il faut et il suffit que tout barycentre d'une famille de points pondérés de F reste dans F.*

Démonstration. Supposons que F soit un sous-espace de E, et soit $A \in F$. Soit (A_i, λ_i) une famille de points pondérés de F, avec $\sum \lambda_i \neq 0$. Alors $G = \frac{\sum \lambda_i A_i}{\sum \lambda_i}$ comme combinaison linéaire d'éléments de F dans E_A. Mais F est un sous-espace vectoriel de E_A, donc $G \in F$.

Réciproquement, soit $A \in F$, montrons que F est un sous-espace vectoriel de E_A. Si $M, N \in F$ et $\lambda, \mu \in K$, la combinaison linéaire $\lambda M + \mu N$ existe dans E_A. L'astuce consiste à écrire $\lambda M + \mu N = (1 - \lambda - \mu)A + \lambda M + \mu N$ (car A est le vecteur nul de E_A), si bien que $\lambda M + \mu N$ est barycentre de points de F, donc reste dans F par hypothèse. ✓

Dans le même ordre d'idées, on obtient ceci :

Théorème 6.15. *Soit X une partie non vide de E. Alors* Aff X *est exactement l'ensemble des barycentres des familles de points pondérés à support dans X, i.e.*

$$\operatorname{Aff} X = \left\{\sum_i \lambda_i A_i;\ \sum_i \lambda_i = 1 \text{ et } (A_i) \in X\right\}.$$

Démonstration. Soit M un barycentre de points de X. Alors M est en particulier barycentre de points de Aff X, donc reste dans Aff X par le théorème précédent.

Réciproquement, soit $M \in \operatorname{Aff} X$. Fixant $A \in X$, on sait que $\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AP},\ P \in X\}$ (cf. théorème 4.17). Dans le vectorialisé E_A ceci se traduit par le fait que M est une combinaison linéaire $\sum \lambda_i P_i$ de points de X. L'astuce employée dans la preuve précédente donne alors $M = (1 - \sum \lambda_i)A + \sum \lambda_i P_i$, c'est-à-dire que M est barycentre de points de X. ✓

Exemple 6.16. Si A, B sont distincts, alors

$$(AB) = \{\lambda A + (1 - \lambda)B,\ \lambda \in K\} = \{(1 - \lambda)A + \lambda B,\ \lambda \in K\} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda \in K\}.$$

On a bien sûr une écriture similaire pour des plans.

Passons maintenant à une caractérisation des applications affines.

Théorème 6.17. *Soit $f : E \to F$ une application (ensembliste) entre deux espaces affines sur un même corps K. Alors f est affine si et seulement si « f conserve les barycentres », c'est-à-dire si et seulement si*

$$\forall (A_i, \lambda_i)_{i\in I} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0, \quad f(\operatorname{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}) = \operatorname{bar}(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I},$$

ou encore, si et seulement si

$$\forall (A_i, \lambda_i)_{i\in I} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i\in I} \lambda_i = 1, \quad f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i A_i\Big) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(A_i).$$

Démonstration. Supposons que f soit affine et fixons $A \in E$. Alors $f \in L(E_A, F_{f(A)})$, donc, dans $F_{f(A)}$, on a bien $f(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i f(A_i)$ pour toute famille (A_i, λ_i) telle que $\sum \lambda_i = 1$.

Réciproquement, supposons que f conserve les barycentres, et fixons encore $A \in E$. Pour tous $M, N \in E_A$ et tous $\lambda, \mu \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= f((1 - \lambda - \mu)A + \lambda M + \mu N) \\ &= (1 - \lambda - \mu)f(A) + \lambda f(M) + \mu f(N) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N), \end{aligned}$$

car A (resp. $f(A)$) est le vecteur nul de E_A (resp. $F_{f(A)}$). Par suite $f \in L(E_A, F_{f(A)})$, cqfd. ✓

6.3 Coordonnées barycentriques dans un repère affine

Grâce aux barycentres, nous allons introduire un autre système de repérage que celui des coordonnées cartésiennes.

Proposition 6.18. *Soit $\{A_0, \dots, A_p\}$ un système affinement libre de E. Si* $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i=0}^p = \mathrm{bar}(A_i, \mu_i)_{i=0}^p$, *alors il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\lambda_i = \alpha\mu_i$ pour tout i.*

Observons qu'il s'agit là d'une forme de réciproque de la propriété d'homogénéité des barycentres, mais qu'elle n'est valable que pour une famille libre.

Démonstration. Posons $\lambda = \sum \lambda_i$ et $\mu = \sum \mu_i$. Par hypothèse $\lambda, \mu \neq 0$ et $\sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i = \sum_{i=0}^p \frac{\mu_i}{\mu} A_i$. Dans le vectorialisé E_{A_0}, cette relation devient $\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{\mu} A_i$. Mais comme dans E_{A_0} la famille de vecteurs $\{A_i\}_{i=1}^p$ est libre (car $\{\overrightarrow{A_0A_i}\}_{i=1}^p$ est libre dans $\vec{E}$ par hypothèse), on doit avoir : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\mu_i}{\mu}$, i.e. $\lambda_i = \alpha\mu_i$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \in K^*$. En outre,

$$\lambda_0 = \lambda - \sum_{i=1}^p \lambda_i = \lambda - \alpha \sum_{i=1}^p \mu_i = \lambda - \alpha(\mu - \mu_0) = \alpha\mu_0,$$

si bien que la relation $\lambda_i = \alpha\mu_i$ est valide pour tout $i \in [\![0, p]\!]$. ✓

Corollaire 6.19. *Soit $(A_i)_{i=0}^n$ un repère affine de E. Alors pour tout point M de E, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i=0}^n$, unique à une constante multiplicative près, telle que* $M = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i=0}^n$. *En particulier, si l'on impose $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, la famille $(\lambda_i)_{i=0}^n$ est unique. On dit alors que les λ_i sont les* **coordonnées barycentriques** *de M dans le repère $(A_i)_{i=0}^n$.*

Démonstration. Puisque $(A_i)_{i=0}^n$ est une base affine, c'est une famille génératrice dans E. D'après le théorème 6.15, tout $M \in E$ s'écrit $M = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i=0}^n$. Comme $(A_i)_{i=0}^n$ est aussi une famille libre, les λ_i sont définis à un (même) scalaire près par la proposition précédente.

Si en outre on normalise la masse totale des barycentres considérés, alors $\alpha = 1$ dans l'énoncé de cette proposition, d'où l'unicité des λ_i. ✓

Remarques 6.20.

1) Dans certains ouvrages, les scalaires de la définition sont appelés coordonnées barycentriques **normalisées** (par la condition $\sum \lambda_i = 1$).

2) Attention, en dimension n, tout point possède $n+1$ coordonnées barycentriques.

3) Par définition, si $(A_i)_{i=0}^n$ est un repère affine de E, alors les coordonnées barycentriques du point A_i sont données par le vecteur ${}^t(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$, où le 1 figure à la $(i+1)$-ième ligne.

Pour finir ce paragraphe, expliquons le passage du repérage barycentrique au repérage cartésien (et vice versa).

Proposition 6.21. *On suppose que E est de dimension n.*

1) *Si $\mathcal{R} = (A_i)_{i=0}^n$ est un repère affine de E, alors $\mathcal{S} = (A_0; (\overrightarrow{A_0A_i})_{i=1}^n)$ est un repère cartésien de E.*
Si M a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{i=0}^n$ dans $\mathcal{R}$, alors M aura pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{S}$. Il suffit donc d'« oublier » la première coordonnée.

2) *Réciproquement, si $\mathcal{S} = (O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ est un repère cartésien de E, alors $\mathcal{R} = (O, O + \vec{e}_1, \dots, O + \vec{e}_n)$ est un repère affine de E.*
Si M a pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{S}$, alors M aura pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{i=0}^n$ dans $\mathcal{R}$, où $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Démonstration. 1) Si M a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{i=0}^n$ dans $\mathcal{R}$, alors $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ dans tout vectorialisé de E (car $\sum \lambda_i = 1$). En particulier on a $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ dans E_{A_0}, ce qui se traduit précisément par $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

2) Réciproquement, si $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$, alors $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$, où l'on a posé $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Autrement dit, $M = \operatorname{bar}(A_i, \lambda_i)_{i=0}^n$. ✓

Remarques 6.22.

1) Au vu des derniers résultats importants (caractérisation des sous-espaces et des morphismes, coordonnées) il apparaît clairement que la notion de barycentre joue en géométrie affine le même rôle que la notion de combinaison linéaire en géométrie vectorielle.

2) On peut bien sûr parler d'équations barycentriques pour les sous-espaces affines, c'est-à-dire d'équations traduites en coordonnées barycentriques. Nous en verrons un aperçu en Exercice.

7 Convexité dans un espace affine réel

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que E est un espace affine **réel**. En effet, la notion de convexité nécessite que le corps de base soit ordonné (c'est aussi le cas de $\mathbb{Q}$, mais ce corps dispose d'une topologie trop pauvre pour le développement ultérieur de la théorie de la convexité).

7.1 Segments

Définition 7.1. Si A et B sont des points quelconques de E, le **segment joignant A à B** est l'ensemble

$$[AB] = \{\operatorname{bar}((A, \lambda), (B, \mu)),\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu \neq 0\}.$$

Les segments possèdent des propriétés évidentes :

Proposition 7.2. *Soient $A, B \in E$.*

1) *A et B sont des éléments de $[AB]$, ainsi que le milieu I du bipoint (A, B). On pourra donc dire aussi (lorsque E est un espace affine réel) que* ***I est le milieu du segment $[AB]$***.

2) $[AB] = [BA]$.

3) *Le segment $[AB]$ est une partie (non vide) de* $\operatorname{Aff}(A, B)$.

4) *Soit M un point de E distinct de A et de B. Alors $M \in [AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires, de sens contraires.*

5) *On dispose des écritures suivantes :*

$$\begin{aligned}[AB] &= \{\lambda A + \mu B,\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\} \\ &= \{(1-\lambda)A + \lambda B,\ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\lambda A + (1-\lambda)B,\ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{A + \lambda \overrightarrow{AB},\ \lambda \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Les points 1) à 3) sont évidents. Pour 4), on écrit : pour tout M distinct de A et B,

$$\begin{aligned} M \in [AB] &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu > 0 : M = \operatorname{bar}((A, \lambda), (B, \mu)) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu > 0 : \lambda \overrightarrow{MA} + \mu \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu > 0 : \overrightarrow{MA} = -\frac{\mu}{\lambda} \overrightarrow{MB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \text{ et } \overrightarrow{MB} \text{ sont colinéaires et de sens contraires.} \end{aligned}$$

Enfin, les différentes formulations de 5) sont immédiates compte-tenu de la signification de nos notations. ✓

7.2 Parties convexes

Définition 7.3. Une partie X de E est dite **convexe** si $A, B \in X \Rightarrow [AB] \subset X$.

Exemples 7.4.

1) E, tout sous-espace affine, l'ensemble vide, sont des convexes de E.

2) Tout segment est convexe (exercice).

3) Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (de tous types), i.e. les parties connexes de $\mathbb{R}$ (c'est un résultat non trivial, basé sur un argument topologique).

4) Une **fonction** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **convexe (sur I)** si son épigraphe $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ est convexe (dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$). On peut formuler cela d'autres façons :

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

ou encore f' croissante sur I ou $f'' \geq 0$ si f est dérivable au moins deux fois. Par exemple, $x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$, mais pas $x \mapsto \ln x$ qui est **concave** (c'est-à-dire que son opposée $-f$ est convexe).

Comme les convexes sont définis au moyen de segments, donc de barycentres, on se doute qu'il va être possible de les caractériser directement par une écriture barycentrique. Donnons d'abord la

Définition 7.5. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie) de points de E, on appelle **combinaison convexe** des A_i tout barycentre des A_i affectés de coefficients positifs, c'est-à-dire toute écriture du type $\sum_{i \in I} \lambda_i A_i$, avec $A_i \in E$, $\sum \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$.

Théorème 7.6. *Une partie X de E est convexe si et seulement si elle est stable par combinaisons convexes, c'est-à-dire si et seulement si toute combinaison convexe de points de X reste dans X.*

Démonstration. Il faut démontrer l'équivalence

$$X \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall A_1, \ldots, A_p \in X,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \text{ on a } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i \in X.$$

L'implication réciproque est évidente (il suffit de prendre $p = 2$). Montrons l'implication directe par récurrence sur $p \geq 2$.

Pour $p = 2$, la propriété est vraie : c'est la traduction de la convexité de X.

Soit maintenant $p \geq 3$. Supposons la propriété vérifiée pour toute combinaison convexe de $p-1$ points de X, et donnons-nous une combinaison convexe $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ de p points de X. Observons qu'on peut faire l'hypothèse $\lambda_2 + \cdots + \lambda_p \neq 0$, car dans le cas contraire on aurait $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_1 = 1$, donc le résultat à prouver serait trivial. En utilisant la propriété d'associativité des barycentres, on peut écrire l'astuce suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i &= \lambda_1 A_1 + \underbrace{\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2 + \cdots + \lambda_p}}_{\text{fraction valant } 1} (\lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_p A_p) \\
&= \lambda_1 A_1 + (1-\lambda_1) \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \cdots + \lambda_p} A_2 + \cdots + \frac{\lambda_p}{\lambda_2 + \cdots + \lambda_p} A_p \right)}_{:= B \in X \text{ par hypothèse de récurrence}}.
\end{aligned}$$

De là, on déduit que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ appartient au segment $[A_1 B]$, donc à X par convexité. ✓

Remarque 7.7. Les combinaisons convexes jouent donc pour les convexes d'un espace affine le même rôle que les barycentres (resp. les combinaisons linéaires) pour les sous-espaces affines (resp. les sous-espaces vectoriels) d'un espace affine (resp. d'un espace vectoriel).

Voici un résultat immédiat.

Proposition 7.8. *Toute intersection (finie ou non) de parties convexes est encore convexe.*

En revanche, on prendra garde au fait que la réunion de deux convexes n'est généralement plus convexe.

7.3 Enveloppes convexes

On définit maintenant l'analogue des sous-espaces (affines ou vectoriels) engendrés par une partie de E.

Proposition 7.9. *Soient X, Y deux parties de E.*

1) *L'intersection de tous les convexes de E contenant X est un convexe de E, et c'est le plus petit convexe de E contenant X. On l'appelle* **enveloppe convexe de X** *et on le note* $\operatorname{Conv} X$.

2) $\operatorname{Conv} X = X$ *si et seulement si X est convexe.*

3) $X \subset Y \Rightarrow \operatorname{Conv} X \subset \operatorname{Conv} Y$.

Démonstration. La preuve de ces résultats est similaire à celles des propositions proposition 4.15 et 4.16. ✓

Avant de traiter des exemples, voyons une caractérisation barycentrique des enveloppes convexes.

Théorème 7.10. *Soit X une partie de E. Alors* $\operatorname{Conv} X$ *est exactement l'ensemble des combinaisons convexes de points de X.*

Démonstration. Exercice. ✓

Exemples 7.11.

1) $\operatorname{Conv} \varnothing = \varnothing$.

2) Si A est un point de E, $\operatorname{Conv} A = \{A\}$.

3) Si A, B sont deux points de E, alors $\operatorname{Conv}\{A, B\} = [AB]$.

4) Si A, B, C sont trois points de E, alors $\operatorname{Conv}\{A, B, C\}$ s'appelle **l'intérieur du triangle ABC**.

7.4 Parties convexes et applications affines, demi-espaces et demi-droites

Observons tout d'abord que la notion de segment est une nouvelle notion invariante par une application affine :

Proposition 7.12. *Les applications affines conservent les segments. Plus précisément : si f est une application affine, alors $f([AB]) = [f(A)f(B)]$.*

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} f([AB]) &= \{f(\lambda A + (1-\lambda)B),\ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\lambda f(A) + (1-\lambda) f(B),\ \lambda \in [0,1]\} \\ &= [f(A)f(B)]. \end{aligned}$$

✓

On en déduit que la convexité est également un invariant affine. On a même mieux :

Corollaire 7.13. *L'image directe ou réciproque d'un convexe par une application affine est encore un convexe.*

Démonstration. Soit $f \in A(E, F)$.

1) Soit X un convexe de E, montrons que $f(X)$ est un convexe de F. Soient donc $C, D \in f(X)$, c'est-à-dire $C = f(A)$ et $D = f(B)$ avec $A, B \in X$. D'après la proposition précédente, $[CD] = [f(A)f(B)] = f([AB])$. Mais $[AB] \subset X$ par convexité de X, donc $[CD] \subset f(X)$, cqfd.

2) Soit maintenant Y un convexe de F, montrons que $f^{-1}(Y)$ est convexe dans X. Soient $A, B \in f^{-1}(Y)$, il existe donc $C, D \in Y$ tels que $f(A) = C$ et $f(B) = D$. Comme Y est convexe, $[f(A)f(B)] = [CD] \subset Y$. En vertu de la proposition précédente, ceci donne $f([AB]) \subset Y$ et donc $[AB] \subset f^{-1}(Y)$, cqfd. ✓

Remarque 7.14. On peut aussi démontrer que, pour toute application affine f, $f(\operatorname{Conv} X) = \operatorname{Conv} f(X)$. [Utiliser le théorème 7.10.]

Finissons avec l'importante notion de demi-espace.

Proposition 7.15. *Soit H un hyperplan de E, et soit f une forme affine non constante sur E telle que $H = f^{-1}(0)$. On pose*

$$\begin{aligned} H_+ &= \{M \in E : f(M) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*),\\ H_- &= \{M \in E : f(M) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_-^*),\\ H'_+ &= \{M \in E : f(M) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+),\\ H'_- &= \{M \in E : f(M) \leq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_-). \end{aligned}$$

1) *Les paires $\{H_+, H_-\}$ et $\{H'_+, H'_-\}$ sont indépendantes du choix de la forme affine f telle que $H = f^{-1}(0)$.*

2) *On a les égalités $E = H'_+ \cup H_-$, $H = H'_+ \cap H'_-$, ainsi que la partition $E = H_+ \sqcup H \sqcup H_-$.*

3) *Les parties H_+ et H_- (resp. H'_+ et H'_-) sont convexes.*

Démonstration. 1) Soit g une autre forme affine non constante sur E telle que $H = g^{-1}(0)$. D'après le théorème 4.48, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $g = \lambda f$. Si $\lambda > 0$, alors $\{M \in E : f(M) > 0\} = \{M \in E : g(M) > 0\}$; si $\lambda < 0$, alors $\{M \in E : f(M) > 0\} = \{M \in E : g(M) < 0\}$. Par suite, la paire $\{H_+, H_-\}$ est la même dans les deux cas. (Le raisonnement est similaire pour $\{H'_+, H'_-\}$.)

2) est évident.

3) Il suffit d'observer que les quatre parties en question sont des images réciproques de convexes par une application affine. ✓

Définition 7.16. Avec les notations précédentes, H_+ et H_- (resp. H'_+ et H'_-) sont appelés **demi-espaces ouverts** (resp. **demi-espaces fermés**) **de E délimités par H**.

Exemple 7.17. Soit $A \in E$ et soit $\vec{u} \in \vec{E}$ non nul. L'ensemble $d = A + \mathbb{R}_+\vec{u}$ est une demi-droite (fermée) de la droite $D = A + \mathbb{R}\vec{u}$, puisqu'en effet $d = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, où f est la forme affine sur D définie par $f(A + \lambda\vec{u}) = \lambda$. On dit que d est la **demi-droite d'origine A dirigée par $\vec{u}$**, et que D est son **support**.
Observons qu'il y a une (et une seule) autre demi-droite d'origine A supportée par D : celle qui est dirigée par tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ et de sens contraire, c'est-à-dire la demi-droite $d' = A + \mathbb{R}_-\vec{u}$. Elle est dite **opposée** à d.

Voici une caractérisation des demi-espaces.

Théorème 7.18. *Soit H un hyperplan de E, soit $A \in E \setminus H$, et soit H_A le demi-espace ouvert de E contenant A. Alors $H_A = \{M \in E : [AM] \cap H = \varnothing\}$.*

Démonstration. Supposons par exemple que $A \in H_+$ (i.e. $f(A) > 0$), et démontrons la contraposée de l'assertion, c'est-à-dire : $M \notin H_+ \Leftrightarrow [AM] \cap H \neq \varnothing$.

Supposons donc d'abord que M n'est pas dans H_+, c'est-à-dire que $f(M) \leq 0$. Soit $P \in [AM]$: $P = \lambda A + (1-\lambda)M$ pour un $\lambda \in [0,1]$. Analysons la condition $P \in H$, c'est-à-dire l'équation $f(P) = 0$: comme f est affine,

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \lambda f(A) + (1-\lambda) f(M) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(M)}{f(M) - f(A)}.$$

Observons que $f(M) - f(A) < f(M) \leq 0$, de sorte que le quotient $\lambda_0 = \frac{f(M)}{f(M)-f(A)}$ est bien défini et appartient à l'intervalle $[0, 1[$. Par conséquent, si on pose $P_0 = \lambda_0 A + (1-\lambda_0)M$, ce qui précède démontre que $[AM] \cap H$ contient P_0, donc est non vide (en fait, cette intersection est clairement réduite à $\{P_0\}$).

Réciproquement, supposons que $[AM] \cap H$ contienne un point P. Alors $P = \lambda A + (1-\lambda)M$ pour un $\lambda \in [0,1]$ et $f(P) = 0$. On en déduit que $\lambda f(A) + (1-\lambda) f(M) = 0$ et donc que $f(M) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} f(A)$ ($\lambda \neq 1$ sinon $P = A$, ce qui est absurde puisque $A \notin H$). Comme $\lambda \in [0, 1[$ et $f(A) > 0$, on trouve que $f(M) \leq 0$, cqfd. ✓

Remarque 7.19. Les demi-espaces possèdent également d'autres caractérisations lorsqu'on prend des coordonnées cartésiennes : cela résulte de leur définition et de l'expression des hyperplans en coordonnées cartésiennes (voir exercice 34). Par exemple, dans un plan affine euclidien, les demi-plans ouverts sont les parties définies par une inéquation du type $ax + by + c > 0$ (ou < 0).

8 Exercices

8.1 Révisions et compléments d'algèbre linéaire

N.B. Dans tous les exercices de cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1.

1) Rappeler la définition d'un espace vectoriel E sur K, d'un sous-espace vectoriel de E.

2) L'intersection, la réunion, la somme d'une famille (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E est-elle encore un sous-espace vectoriel ? Même question pour le complémentaire d'un sous-espace vectoriel. Qu'est-ce que la « formule de Grassmann » ?

Exercice 2. Soit A une partie de E.

1) Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par A, que l'on notera $\mathrm{Vect}\, A$.

2) Comment décrire explicitement $\mathrm{Vect}\, A$ lorsque A est non vide ? Que vaut par ailleurs $\mathrm{Vect}(\varnothing)$?

3) Soit B une autre partie de E. Que peut-on dire de $\mathrm{Vect}(A \cup B)$?

4) Soient $x, y \in E$. A-t-on $\mathrm{Vect}(x+y) = \mathrm{Vect}\, x + \mathrm{Vect}\, y$?

Exercice 3. On suppose que E est de dimension 3, et on considère les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z) \in E \;:\; 2x - y + 3z = 0\},\\
G &= \{(x,y,z) \in E \;:\; \exists \lambda \in K \;:\; x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = -2\lambda\},\\
H &= \{(x,y,z) \in E \;:\; \exists \lambda, \mu \in K \;:\; x = \lambda,\ y = \mu,\ z = -3\lambda + \mu\}.
\end{aligned}$$

1) Vérifier que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E, puis calculer leur dimension.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3) Montrer que $G \subset H$. La somme $F + H$ est-elle directe ?

4) Déterminer $F \cap G \cap H$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Exercice 4. On note $n = \dim E$.

1) Rappeler les définitions d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base de vecteurs de E. Que peut-on dire sur le nombre d'éléments de telles familles ?

2) Qu'est-ce que le rang d'une famille de vecteurs ? d'une matrice ? d'une application linéaire ? Qu'est-ce que la « formule du rang » ?

3) On suppose que $n = 3$ et on munit E d'une base. Déterminer, en fonction du paramètre $a \in K$, le rang de la famille de vecteurs $(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)$. [Plusieurs méthodes sont possibles.]

Exercice 5. On note $n = \dim E$, et E^* le dual algébrique de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel $L(E, K)$ des formes linéaires sur E.

1) Soit $x \neq 0$ dans E. Prouver qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \neq 0$.

2) Notons $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E. Soit alors $\varphi : E \longrightarrow E^{**}$ définie par $x \mapsto (\varphi(x) : f \mapsto f(x))$.

a) Montrer que φ est linéaire et injective.

b) Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i^* : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_i$. Montrer que e_i^* est une forme linéaire, qu'elle est caractérisée par la relation $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, et qu'elle constitue une base de E^* (qui est donc de dimension n), appelée **base duale de la base (e_i)**.

c) Déduire des résultats précédents que φ est bijective, puis que si $(f_i)_{i=1}^n$ est une base de E^*, alors il existe une base $(e_i)_{i=1}^n$ telle que $e_i^* = f_i$ pour chaque i.

3) Soient (e_i) une base de E, (e_i^*) sa base duale, $p \in [\![1, n]\!]$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que si $x \in E$, alors $x \in F \Leftrightarrow e_i^*(x) = 0$ pour tout $i \in [\![p + 1, n]\!]$.

4) Soient F une partie non vide de E et $p \in [\![0, n - 1]\!]$. Montrer l'équivalence :

(i) F est un sous-espace de dimension p de E ;

(ii) il existe des formes linéaires $f_1, \dots, f_{n-p}$ linéairement indépendantes dans E^* telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \mathrm{Ker}\, f_i$.

5) Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E. Soit H une partie non vide de E. Établir l'équivalence :

(i) H est un hyperplan de E ;

(ii) il existe une forme linéaire non nulle f sur E, définie à un facteur multiplicatif non nul près, telle que $H = \mathrm{Ker}\, f$;

(iii) il existe un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de scalaires non tous nuls, défini à un facteur multiplicatif non nul près, tel que pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in E$, on ait $x \in H \Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.

On dit alors que l'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est **une équation cartésienne de l'hyperplan H** (dans la base (e_i)).

6) Prouver que, dans l'implication précédente (i) $\Rightarrow$ (ii), on peut prendre pour f l'application définie par $f(x) = \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_{n-1}, x)$, où $(u_i)_{i=1}^{n-1}$ est une base de H et $\mathcal{B}$ une base de E.
Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, déterminer une équation cartésienne du plan engendré par $u = (2, -3, 1)$ et $v = (1, -1, 2)$.

7) Soit F un sous-espace de dimension $p \leq n - 1$. Prouver qu'il existe une matrice $A = (a_{ij}) \in M(n - p, n; K)$, de rang $n - p$, telle que F soit l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.
Ce système est alors appelé **système d'équations cartésiennes du sous-espace F**.

Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite engendrée par $u = (2, -3, 1)$.

8) Réciproquement, démontrer que l'ensemble F des solutions d'un système du type $AX = 0$, avec $A \in M(n-p, n; K)$ est un sous-espace de dimension $\geq p$, et que c'est un sous-espace de dimension exactement p si et seulement si A est de rang $n - p$.

Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, trouver l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 7y - 2z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 6.

1) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.

a) Rappeler la définition de la **projection p de E sur F parallèlement à G**.

b) Montrer que p est linéaire, déterminer alors son noyau et son image. Est-elle injective, surjective ?

c) Vérifier que $p \circ p = p$.

d) Montrer qu'il existe une base naturelle de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

e) Soit q la projection de E sur G parallèlement à F. Quel lien existe-t-il entre p et q ?

2) Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$. Prouver que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 7. Avec les notations de l'exercice précédent, l'application $s = 2p - \mathrm{id}$ s'appelle la **symétrie par rapport à F parallèlement à G**.
Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, prouver que $s(x) = y - z$, puis établir les analogues des résultats de l'exercice précédent.

8.2 Espaces affines, applications affines

N.B. Sauf mention explicite du contraire, dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K, avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Démontrer les assertions suivantes.

1) Pour tous $A, B, C, D \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

(iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

2) La relation de Chasles (A1) se traduit par : $\forall A \in E, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{E}, (A + \vec{x}) + \vec{y} = A + (\vec{x} + \vec{y})$.

3) Pour tout $A \in E$ et tous $\vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{E}$, $A + \vec{x} = A + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

4) Pour tous $A, B \in E$ et tous $\vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{E}$, $(B + \vec{y}) - (A + \vec{x}) = \overrightarrow{AB} + \vec{y} - \vec{x}$.

Exercice 9. Soit F un K-espace affine, et soit $f \in A(E, F)$. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

Exercice 10. Soit F un K-espace affine. Pour tout $A \in E$ et tout $B \in F$, on note respectivement $\psi_{A,E} : \overrightarrow{E} \to E_A$ et $\psi_{B,F} : \overrightarrow{F} \to F_B$ les isomorphismes linéaires induits par la vectorialisation de E en A et de F en B. Dans ce qui suit, on fixe une application $f : E \to F$.

1) Pour $\sigma \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$, prouver l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

(i) $\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \overrightarrow{E}, f(A + \vec{x}) = f(A) + \sigma(\vec{x})$;

(ii) $\forall A \in E,\ f = \psi_{f(A),F} \circ \sigma \circ \psi_{A,E}^{-1}$.

2) En déduire l'équivalence des conditions :

(i) f est affine;

(ii) pour tout $A \in E$, f est linéaire de E_A dans $F_{f(A)}$.

Exercice 11.

1) Démontrer les propriétés suivantes des translations :

a) Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, $t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{y}} = t_{\vec{x}+\vec{y}} = t_{\vec{y}} \circ t_{\vec{x}}$;

b) Pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $t_{\vec{x}}$ est bijective, d'inverse $t_{\vec{x}}^{-1} = t_{-\vec{x}}$.

c) Pour tout $f \in A(E)$, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $f \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{f}(\vec{x})} \circ f$.

d) Pour tout couple $(A, B) \in E \times E$, il existe une unique translation t telle que $t(A) = B$.

2) Soit $h = h_{A,\lambda}$ une homothétie de E. Démontrer les résultats suivants.

a) Si $h' = h_{A,\lambda'}$ est une autre homothétie de centre A, alors la composée $h \circ h'$ est encore une homothétie de centre A, et cette composée est commutative.

b) h est bijective, d'inverse $h^{-1} = h_{A,\frac{1}{\lambda}}$.

Exercice 12. Rappelons qu'une homothétie de centre A et de rapport $\lambda = -1$ s'appelle symétrie de centre A. On note alors $s_A = h_{A,-1}$.
Soient A, B deux points de E (distincts ou non). Prouver : $s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

Exercice 13. Dans cet exercice, E et F désignent deux K-espaces vectoriels, munis de leur structure affine canonique. On note O le vecteur nul $\vec{0}_E$ de E, vu comme point de E, et O' le vecteur nul $\vec{0}_F$ de F, vu comme point de F.

1) Soient $\vec{u} \in F$ et $\sigma \in L(E, F)$. Montrer que la composée $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$ est une application affine de E dans F.

2) Réciproquement, soit $f \in A(E, F)$. Montrer que f s'écrit $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{O'f(O)}$ et $\sigma = \vec{f}$ (en particulier, $\vec{u}$ et σ sont uniques).

3) En déduire une caractérisation des applications linéaires parmi l'ensemble des applications affines de E dans F.

4) En déduire également une description des ensembles $A(K)$ et $GA(K)$.

Exercice 14. Soit $f \in A(E)$ telle que $\vec{f} = \lambda\, \mathrm{id}_{\vec{E}}$ pour un $\lambda \in K^*$. Démontrer :

1) si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie [prouver d'abord l'existence d'un unique point fixe];

2) si $\lambda = 1$, f est une translation.

Exercice 15. Écrire la représentation matricielle d'une homothétie, d'une translation, dans un repère cartésien donné de E.

Exercice 16.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes possède une structure de plan affine sur $\mathbb{R}$. (Dans la suite de cet exercice, c'est ainsi qu'on le considèrera.)

2) Démontrer : pour toute $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f est affine si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b\bar{z} + c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3) Parmi les endomorphismes affines du plan $\mathbb{C}$, caractériser ceux qui sont bijectifs.

4) Comparer les résultats précédents avec ceux de l'exercice 13.

Exercice 17. Soient G un groupe (noté multiplicativement) et E un ensemble. On appelle **action (ou opération) de G sur E** toute application $\psi : G \times E \to E$ vérifiant

(i) pour tout $x \in E$, $\psi(1, x) = x$;

(ii) pour tout $x \in E$ et tous $g_1, g_2 \in G$, $\psi(g_1 g_2, x) = \psi(g_1, \psi(g_2, x))$.

En outre, on dira que cette action est **simplement transitive** si, pour tous $x, y \in E$ il existe un et un seul $g \in G$ vérifiant $\psi(g, x) = y$.
Démontrer qu'un espace affine n'est autre qu'un ensemble non vide sur lequel agit simplement transitivement un espace vectoriel $\vec{E}$ (vu comme groupe abélien).

8.3 Sous-espaces affines

N.B. Sauf mention explicite du contraire, dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K, avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 18.

1) Soient F, G deux sous-espaces de E. Démontrer les résultats suivants.

a) Si $F \subset G$, alors $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $\dim F \leq \dim G$.

b) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

c) Si $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $F \cap G \neq \varnothing$, alors $F \subset G$.

2) Soit F un sous-espace de dimension p de E. Montrer : si $p \leq d \leq \dim E$, il existe au moins un sous-espace G de dimension d de E qui contient F.

3) La réunion de deux sous-espaces affines, le complémentaire d'un sous-espace affine, sont-ils encore des sous-espaces affines ?

Exercice 19. Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel, muni de sa structure d'espace affine canonique. On note O le vecteur nul $\vec{0}$ de E, vu comme point de E.

1) Montrer que tout translaté $t_{\vec{u}}(V)$ d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace affine de E, de direction V.

2) Réciproquement, montrer que tout sous-espace affine de E est le translaté d'un sous-espace vectoriel de E.

3) Prouver l'équivalence, pour un sous-espace affine F de E :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E ;

(ii) $O \in F$;

(iii) $F = \vec{F}$.

Exercice 20. Les relations de parallélisme, de strict parallélisme entre sous-espaces affines sont-elles des relations d'équivalence ? Si F, G, H sont des sous-espaces de E, a-t-on le droit d'écrire $F \parallel G \parallel H$?

Exercice 21. Soient A, B, C, D quatre points non alignés de E. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Exercice 22. En utilisant le théorème d'incidence, démontrer les résultats suivants.

1) Deux points distincts engendrent une droite.

2) Un point et un sous-espace de dimension p ne passant pas par ce point engendrent un sous-espace de dimension $p + 1$.

3) Deux droites parallèles distinctes engendrent un plan.

4) Deux droites sécantes distinctes se coupent en un point et un seul, et engendrent un plan.

5) Deux droites non parallèles et non sécantes engendrent un sous-espace de dimension 3.

6) Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou bien sécantes en un point.

7) Si une droite et un plan se coupent, et si la droite n'est pas dans le plan, leur intersection est réduite à un point et ils engendrent un sous-espace de dimension 3.

8) Si une droite est parallèle à un plan et n'est pas contenue dans ce plan, la droite et le plan engendrent un sous-espace de dimension 3.

9) Si une droite n'est pas parallèle à un plan et ne le rencontre pas, la droite et le plan engendrent un sous-espace de dimension 4.

10) Dans un espace affine de dimension 3, une droite qui n'est pas parallèle à un plan le coupe en un point et un seul.

11) Dans un espace affine de dimension 3, deux plans non parallèles se coupent suivant une droite.

Exercice 23. Déduire de l'exercice précédent :

1) les positions relatives possibles pour deux droites d'un plan;
2) les positions relatives possibles pour deux plans d'un espace de dimension 3;
3) les positions relatives possibles pour deux droites d'un espace de dimension 3;
4) les positions relatives possibles pour une droite et un plan d'un espace de dimension 3.

Exercice 24. On suppose $\dim E = 3$. Soient P_1, P_2 deux plans de E sécants selon une droite D. Soient $A \in P_1$, $B, C \in P_2$ avec $B \neq C$, tels que A, B, C ne soient pas situés sur D.

1) Vérifier que A, B, C sont non alignés, donc engendrent un plan noté (ABC).
2) Déterminer la nature de l'intersection $P_1 \cap (ABC)$.
3) Construire géométriquement cette intersection.

Exercice 25. Supposons $\dim E = 3$. Soient D_1, D_2 deux droites parallèles, soient P_1 un plan contenant D_1 et P_2 un plan contenant D_2 tels que P_1 et P_2 soient sécants selon une droite Δ. Démontrer que Δ est parallèle à D_1 et à D_2 : c'est le **théorème du toit**.

Exercice 26. On suppose $\dim E = 3$. Soient P et P' deux plans sécants selon une droite Δ. Soit O un point n'appartenant ni à P, ni à P'. Soient D_1, D_2, D_3 trois droites non coplanaires, concourantes en O et coupant P (resp. P') en A, B, C (resp. A', B', C').

1) Vérifier que A, B, C (resp. A', B', C') sont distincts et non alignés.

2) a) Montrer que (BC) et $(B'C')$ sont sécantes ou parallèles.

b) Montrer que si ces droites sont parallèles, elles sont également parallèles à Δ.

c) Montrer que si ces droites sont sécantes, leur point commun est situé sur Δ.

3) On suppose que (AB), (AC), (BC) coupent Δ en I, J, K, respectivement. Prouver que I, J, K sont sur $(A'B')$, $(A'C')$, $(B'C')$, respectivement.

Exercice 27. Prouver les assertions suivantes.

1) Si h est une homothétie de centre A et de rapport λ, alors M, $M' = h(M)$ et A sont alignés et $\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \lambda$.

2) Réciproquement, si A, B, C sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq C$, alors il existe une unique homothétie de centre A telle que $h(B) = C$: celle dont le rapport vaut $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Exercice 28. Soit F un autre K-espace affine et soit $f \in A(E, F)$. Démontrer les résultats suivants.

1) Si G est un sous-espace affine de E, alors $f(G)$ est un sous-espace affine de F, de direction $\overrightarrow{f(G)} = \vec{f}(\vec{G})$. En outre, $\dim f(G) \leq \dim G$, avec égalité si f est injective.

2) Si H est un sous-espace affine de F, alors $f^{-1}(H)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E, de direction $\overrightarrow{f^{-1}(H)} = \vec{f}^{-1}(\vec{H})$.

Exercice 29. Soit σ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F. On fixe $\vec{b} \in F$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\sigma(\vec{x}) = \vec{b}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E, de direction à préciser.

Exercice 30.

1) Soit $f \in GA(E)$. Vérifier que f envoie tout sous-espace de E sur un sous-espace de même dimension.

2) Réciproquement, prouver que si F et G sont des sous-espaces de même dimension de E, alors il existe $f \in GA(E)$ tel que $f(F) = G$. Ce f est-il unique ?

Exercice 31. On suppose E de dimension ≥ 2. Soient H un hyperplan de E, D une droite supplémentaire de H dans E, et p la projection sur H parallèlement à $\vec{D}$.

1) Déterminer l'image réciproque par p d'un point H, puis d'une droite de H.

2) Déterminer les images par p :

a) d'une droite,

b) de trois points alignés distincts,

c) de deux droites parallèles distinctes, dont la direction commune n'est pas $\vec{D}$.

Dans chacun des cas, caractériser les différentes situations possibles.

Exercice 32. Soit f un endomorphisme affine de E. Démontrer que f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.

Exercice 33. Démontrer le « théorème de Thalès (et réciproque) dans un triangle ».

Exercice 34. On suppose E de dimension $n \geq 1$, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$.

1) Soit $f : E \longrightarrow K$ une application (ensembliste). Prouver l'équivalence des assertions :

(i) f est une forme affine sur E ;

(ii) il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β tels que :

$$\text{si } M = (x_i)_{i=1}^n \text{ dans } \mathcal{R}, \text{ alors } f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta.$$

2) En déduire les résultats suivants :

a) Tout hyperplan H de E possède une équation de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$, où les scalaires α_i sont non tous nuls. On l'appelle **équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$**. En outre, toute autre équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$ est de la forme $\sum_{i=1}^n (\lambda\alpha_i)x_i + \lambda\beta = 0$, avec $\lambda \in K^*$.

b) Réciproquement, toute équation de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$, où les scalaires α_i sont non tous nuls, est une équation cartésienne d'un hyperplan H de E dans $\mathcal{R}$.

c) Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$ est une équation cartésienne d'un hyperplan H, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ est une équation cartésienne de sa direction $\vec{H}$ dans la base $\mathcal{B}$.

d) Deux hyperplans H et H', d'équations cartésiennes respectives $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i + \beta' = 0$, sont parallèles si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $\alpha'_i = \lambda\alpha_i$ pour tout i.

e) En dimension 2, toute droite D admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur de D est alors donné par $\vec{u} = (-b, a)$, et le scalaire $m = \frac{-b}{a}$ s'appelle **la pente** de D (on dit que la pente est infinie si $a = 0$).

3) Soit H un hyperplan de E défini par un repère cartésien $(A; (\vec{u}_j)_{j=1}^{n-1})$. Après l'avoir justifiée, montrer que l'équivalence

$$M \in H \Leftrightarrow \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}, \overrightarrow{AM}) = 0$$

fournit une équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$.

4) a) Soit F un sous-espace affine de dimension $p \leq n - 1$. Montrer qu'il existe une matrice $A = (\alpha_{ij}) \in M(n-p, n; K)$ de rang $n - p$ et une matrice $B = (\beta_i) \in M(n-p, 1; K)$ telles que F soit l'ensemble des solutions du système

$$AX = B, \quad \text{i.e.} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-p,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n-p,n}x_n & = & \beta_{n-p} \end{array} \right.$$

appelé **systèmes d'équations cartésiennes** de F. Montrer qu'alors $\vec{F}$ est l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

b) Réciproquement, prouver que l'ensemble F des solutions d'un système du type $AX = B$, avec $A \in M(n-p, n; K)$ et $B \in M(n-p, 1; K)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension $\geq p$, et que c'est un sous-espace de dimension p si et seulement si A est de rang $n - p$.

Exercice 35. On fixe un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ de E.

1) Soit F un sous-espace de dimension p de E, de repère cartésien $(A; (\vec{u}_i)_{i=1}^p)$. On note $(a_i)_{i=1}^n$ les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et $(b_{ij})_{i=1}^n$ les composantes de $\vec{u}_j$ dans la base $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$, pour chaque $j \in [\![1, p]\!]$.
Démontrer : si M est un point de E, de coordonnées $(x_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{R}$, alors

$$M \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^p : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & a_1 & + & \sum_{j=1}^p b_{1j}\lambda_j \\ x_2 & = & a_2 & + & \sum_{j=1}^p b_{2j}\lambda_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & a_n & + & \sum_{j=1}^p b_{nj}\lambda_j . \end{array} \right.$$

Un tel système d'équations s'appelle un **paramétrage (ou représentation paramétrique) de F dans $\mathcal{R}$**.

2) *Application.* On suppose E de dimension 3, muni d'un repère, et on considère la droite $D = A + K\vec{u}$, où $A = (2, 3, -1)$ et $\vec{u} = (-1, 4, -2)$.

a) Donner un paramétrage de D.

b) En déduire un système d'équations cartésiennes de D.

c) Inversement, supposant connu le système d'équations de la question précédente, retrouver un paramétrage de D.

Exercice 36. On suppose $\dim E = 2$. Soient D, D' deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère cartésien donné (avec évidemment $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$).

1) On note $S = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$. Prouver : $D \parallel D'$ si et seulement si $\text{dét}\, S = 0$ (donc D et D' sont sécantes si et seulement si $\text{dét}\, S \neq 0$).

Application. Donner une autre preuve du théorème de Thalès en dimension 2.

2) Soit D'' une autre droite, d'équation cartésienne $a''x + b''y + c'' = 0$ (avec $(a'', b'') \neq (0, 0)$). On note $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Démontrer : D, D', D'' sont parallèles ou concourantes si et seulement si dét $S = 0$.

Application. Démontrer le **Théorème de Ceva** [Giovanni Ceva, 1648-1734], dont voici l'énoncé : Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, et soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Alors :

$$(AP),\ (BQ),\ (CR) \text{ sont parallèles ou concourantes} \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

Exercice 37. On suppose E de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D une droite non parallèle au plan $O + \operatorname{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer qu'il existe $a, b, p, q \in K$ tels que D admette

$$\begin{cases} x &= az + p \\ y &= bz + q \end{cases}$$

pour système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$.

2) Déterminer un système d'équations cartésiennes (dans $\mathcal{R}$) de la projection de D sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(\vec{k})$.

Exercice 38. Soit X une partie non vide de E.

1) Soit F un sous-espace de E. Prouver l'équivalence : $X \subset F \Leftrightarrow \operatorname{Aff} X \subset F$.

2) Démontrer : X est génératrice dans E si et seulement si X n'est contenue dans aucun hyperplan de E.

3) On suppose que $X = \{A_0, \ldots, A_p\}$ est une famille finie de $p + 1$ points de E, et que E est de dimension n. Démontrer les assertions suivantes :

a) X est libre si et seulement si $p \leq n$ et X n'est contenue dans aucun sous-espace de dimension $p - 1$ de E ;

b) X est génératrice si et seulement si $p \geq n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E ;

c) X est une base affine si et seulement si $p = n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E.

8.4 Barycentres et convexité

N.B. Dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K, avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 39. Soient $A, B \in E$, soient $\lambda, \mu \in K$ non nuls et de somme non nulle. Compléter les assertions :

$$G = \operatorname{bar}((A, \lambda), (B, \mu)) \Leftrightarrow \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = \ldots \Leftrightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \ldots \Leftrightarrow \frac{\overline{BG}}{\overline{BA}} = \ldots$$

Exercice 40. Soient A, B, C trois points de E, soient $P = \operatorname{bar}((A,1),(B,2),(C,-4))$ et $Q = \operatorname{bar}((A,-2),(B,3),(C,1))$. Calculer $\overrightarrow{PQ}$ de deux façons :

1) en revenant à la définition d'un barycentre;
2) en utilisant la notation introduite en cours (« combinaisons de points »).

Exercice 41. Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de E. On note A', B', C', D' les centres de gravité respectifs de BCD, ACD, ABD, ABC.

1) Vérifier que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont des droites, et qu'elles sont distinctes.
2) Soit G le centre de gravité de $ABCD$. Démontrer :

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') \cap (DD') = \{G\}, \qquad \frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DD'}} = \frac{3}{4},$$
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$$

3) On pose $M = \frac{A+B}{2}$, $N = \frac{C+D}{2}$, $P = \frac{D+A}{2}$, $Q = \frac{B+C}{2}$, $R = \frac{A+C}{2}$, $S = \frac{B+D}{2}$. Prouver que G est le milieu de (M, N), de (P, Q) et de (R, S).

Exercice 42. Soit F une partie non vide de E. Prouver que F est un sous-espace de E si et seulement si toute droite joignant deux points de F reste dans F.

Exercice 43. On suppose que E est un plan, muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A, B, C)$.

1) Démontrer : trois points de E sont alignés si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$ est nul.

2) Soit D une droite de E. Montrer qu'il existe $a, b, c \in K$, non tous égaux, tels que pour tout point $M \in D$, de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, on ait $ax + by + cz = 0$.
On dit alors que $ax + by + cz = 0$ est une **équation barycentrique** de la droite D dans le repère $\mathcal{R}$, et que a, b, c sont les **coordonnées tangentielles** de D dans $\mathcal{R}$.

3) Réciproquement, prouver que toute équation du type $ax + by + cz = 0$, avec $a, b, c \in K$ non tous égaux et $x + y + z = 1$, est l'équation barycentrique d'une droite D de E dans $\mathcal{R}$.

4) Montrer que deux triplets de coordonnées tangentielles (a, b, c) et (a', b', c') représentent la même droite de E si et seulement s'ils sont proportionnels.

5) Déterminer une équation barycentrique dans $\mathcal{R}$ de :
   a) (AB), (BC), (CA);
   b) la médiane de ABC issue de A;
   c) la parallèle à (BC) passant par A.

Exercice 44. En utilisant l'exercice précédent, démontrer le **théorème de Ménélaüs** [Ménélaüs d'Alexandrie, Ier siècle], dont l'énoncé est le suivant :
Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, et soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Alors :

$$P,\ Q,\ R \text{ sont alignés} \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Exercice 45 (l'explication d'un mystère). On considère l'espace vectoriel $X = \vec{E} \times K$, qu'on munit, ainsi que K lui-même, de sa structure affine canonique.

1) On définit l'application $\varphi : X \to K$, $(\vec{x}, \lambda) \mapsto \lambda$. Prouver que φ est une forme linéaire non nulle sur X. En déduire que $H = \varphi^{-1}(1) = \vec{E} \times \{1\}$ est un hyperplan affine de X, de direction $\vec{H} = \operatorname{Ker} \varphi = \vec{E} \times \{0\}$.

2) Soient $\sigma : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{H}, \vec{x} \mapsto (\vec{x}, 0)$ et, pour tout $A \in E$, $f_A : E \to H, M \mapsto (\overrightarrow{AM}, 1)$. Montrer que σ est un isomorphisme linéaire de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{H}$, et en déduire que f_A est un isomorphisme affine de E sur H, quel que soit $A \in E$.
On dit qu'on a **plongé** E dans X via f_A. Faire un dessin pour comprendre.

3) Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de E. On fixe $A \in E$ et on pose $A'_i = f_A(A_i)$ pour tout $i \in I$. Les A'_i étant des éléments de H, donc des vecteurs de X, on peut parler de la combinaison linéaire $\sum \lambda_i A'_i$ pour n'importe quelles valeurs des λ_i. Démontrer les assertions suivantes :

a) $\sum \lambda_i A'_i \in H \Leftrightarrow \sum \lambda_i = 1$, et si ces conditions sont réalisées, on a $f_A^{-1}(\sum \lambda_i A'_i) = \operatorname{bar}(A_i, \lambda_i)$;

b) $\sum \lambda_i A'_i \in \overrightarrow{H} \Leftrightarrow \sum \lambda_i = 0$, et si ces conditions sont réalisées, on a $\sigma^{-1}(\sum \lambda_i A'_i) = \vec{v}$, où $\vec{v}$ est la valeur constante de $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ pour $M \in E$.

4) On identifie E avec H et $\overrightarrow{E}$ avec $\overrightarrow{H}$ grâce aux isomorphismes de 2). Quelle formulation obtient-on alors pour les résultats de la question précédente ?

Exercice 46. Soit F un autre K-espace affine. Prouver qu'une application $f : E \to F$ est affine si et seulement si elle conserve tout barycentre de deux points (c'est-à-dire si et seulement si la restriction de f à toute droite affine de E est affine).

Exercice 47. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Prouver que tout segment de E est convexe.

Exercice 48. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Soient X, Y deux convexes de E. Démontrer que l'ensemble Z des milieux de segments $[AB]$, avec $A \in X$ et $B \in Y$, est convexe.

Exercice 49. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Démontrer que si X est une partie de E, alors $\operatorname{Conv} X$ est exactement l'ensemble des combinaisons convexes de points de X.

Exercice 50. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Soit H un hyperplan de E, soit $A \in E \setminus H$, et soit H_A le demi-espace ouvert de E contenant A. Démontrer que $H_A = \{M \in E : [AM] \cap H = \varnothing\}$. [Raisonner par contraposée.]

Chapitre II : Applications affines

Dans le cours du chapitre I, nous avons déjà eu l'occasion de définir la notion d'application affine, d'en donner quelques premières propriétés, et d'observer quelques exemples classiques comme les homothéties, les translations et les projections. Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail les propriétés remarquables des applications affines et définir de nouveaux exemples.

Nous conservons toutes les notations introduites dans le chapitre I.

1 Structure affine canonique de $A(E, F)$

Soient E et F deux K-espaces affines. Une question naturelle se pose : l'ensemble $A(E, F)$ des applications affines de E vers F peut-il être muni d'une structure algébrique remarquable ? Par exemple, on sait que l'ensemble $L(V, W)$ des applications linéaires entre deux K-espaces vectoriels est lui-même un K-espace vectoriel.

Il est bien clair qu'il ne saurait être question ici de munir $A(E, F)$ d'une structure vectorielle, puisque la somme de deux applications affines devrait être définie par la somme de deux points... qui n'existe pas (sauf si on vectorialise, mais alors on est dans un espace vectoriel et plus dans un espace affine).

En fait, il n'est pas difficile d'imaginer la réponse à notre question : l'ensemble $A(E, F)$ sera lui aussi un K-espace affine.

Théorème 1.1. *Soit E, F deux K-espaces affines. On munit $\vec{F}$ de sa structure affine canonique, de sorte que l'ensemble $A(E, \vec{F})$ est bien défini.*

1) *$A(E, \vec{F})$ est un K-espace vectoriel isomorphe à $\vec{F} \times L(\vec{E}, \vec{F})$.*
2) *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : A(E, F) \times A(E, F) &\to A(E, \vec{F}) \\ (f, g) &\mapsto g - f : M \mapsto g(M) - f(M) = \overrightarrow{f(M)g(M)} \end{aligned}$$

munit $A(E, F)$ d'une structure de K-espace affine associé à la direction $A(E, \vec{F})$. Cette structure affine est dite **canonique**.

3) *Si* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$*, alors* $\dim A(E, F) = p(n + 1)$.

Démonstration. 1) Comme $\vec{F}$ est un K-espace vectoriel, on sait que l'ensemble des applications (ensemblistes) de E dans $\vec{F}$ est un K-espace vectoriel. Il est très facile de vérifier que $A(E, \vec{F})$ en est un sous-espace vectoriel. Ensuite, on fixe un point $A \in E$ et on considère l'application

$$\begin{aligned} A(E, \vec{F}) &\longrightarrow \vec{F} \times L(\vec{E}, \vec{F}) \\ f &\longmapsto (f(A), \vec{f}) \end{aligned}$$

Il est clair qu'elle est linéaire, mais c'est aussi une bijection en vertu de la proposition 2.9 du chapitre I, d'où le résultat voulu.

2) L'application φ vérifie clairement l'axiome (A1). D'autre part, soient $f \in A(E, F)$ et $\psi \in A(E, \vec{F})$. Définissons $g = f + \psi : M \mapsto f(M) + \psi(M)$. Alors $g : E \to F$ est affine de partie linéaire $\vec{f} + \vec{\psi}$, et s'il existe $h \in A(E, F)$ telle que $\psi = h - f$, alors $h = f + \psi = g$.

3) On a $\dim A(E, F) = \dim A(E, \vec{F})$ par 2), donc $\dim A(E, F) = \dim(\vec{F} \times L(\vec{E}, \vec{F}))$ par 1). Ainsi, on trouve bien $\dim A(E, F) = p + np = p(n + 1)$. ✓

Remarque 1.2. Si $F = K$, alors $F = \vec{F}$, donc l'ensemble $A(E, K)$ des formes affines sur E est à la fois un K-espace vectoriel et un K-espace affine. Ce fait justifie a posteriori la définition 4.49 du chapitre I.

2 Groupe affine

On sait que l'ensemble $GL(V)$ des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel V est un groupe pour la loi de composition (appelé groupe linéaire de V). La même chose est vraie dans le cas affine :

Proposition 2.1. *Soient E, F et G trois espaces affines sur un même corps K.*

1) *Si $f \in A(E, F)$ et $g \in A(F, G)$, alors $g \circ f \in A(E, G)$ et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.*

2) *Si $f \in A(E, F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in A(F, E)$ et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.*

Démonstration. 1) Pour tout $M \in E$ et tout $\vec{x} \in \vec{E}$,

$$g \circ f(M + \vec{x}) = g(f(M) + \vec{f}(\vec{x})) = g(f(M)) + \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = g \circ f(M) + \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}).$$

2) Soient $M, N \in F$. Posons $M' = f^{-1}(M)$ et $N' = f^{-1}(N)$. Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \vec{f}(\overrightarrow{M'N'})$ car f est affine. Mais $\vec{f}$ est bijective (car f l'est), on a donc $\overrightarrow{M'N'} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{MN})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{MN})$, cqfd. ✓

Corollaire 2.2. *L'ensemble $GA(E)$ des automorphismes affines d'un espace affine E est un groupe pour la loi de composition, appelé* **groupe affine de E**.

Démonstration. Comme $GA(E) \neq \varnothing$ (il contient id_E), la proposition précédente montre que $GA(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(E)$. ✓

Continuons avec quelques résultats sur ce groupe.

Proposition 2.3. *Soit E un espace affine.*

1) *L'application $L : GA(E) \to GL(\vec{E})$, $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes surjectif, appelé* **morphisme canonique** *de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$.*

2) *Soit $O \in E$. L'ensemble $GA_O(E)$ des automorphismes de E vérifiant $f(O) = O$ est un sous-groupe de $GA(E)$, isomorphe au groupe linéaire $GL(\vec{E})$.*

Démonstration. 1) L est un morphisme d'après le 1) de la proposition 2.1. Soit maintenant $\sigma \in GL(\vec{E})$. Fixons deux points $A, B \in E$. Alors on sait qu'il existe une (unique) $f \in A(E)$ telle que $f(A) = B$ et $\vec{f} = \sigma$. Comme σ est bijective, f l'est aussi, si bien qu'on a trouvé $f \in GA(E)$ telle que $L(f) = \sigma$.

2) Il est clair que $GA_O(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$. Considérons ensuite la restriction $L' = L|_{GA_O(E)} : GA_O(E) \to GL(\vec{E})$, qui reste bien entendu un morphisme de groupes. On raisonne comme en 1) : pour $\sigma \in GL(\vec{E})$, il existe une unique $f \in A(E)$ telle que $f(O) = O$ et $\vec{f} = \sigma$, et cette f est automatiquement bijective. Ainsi, il existe une unique $f \in GA_O(E)$ telle que $L'(f) = \sigma$, cqfd. ✓

Le résultat suivant fournit une caractérisation purement géométrique et très simple des bijections affines. C'est un théorème important dont la démonstration est longue (mais non difficile), si bien que nous l'admettrons. D'autre part, pour des raisons techniques (connaissances incomplètes en algèbre) nous nous bornerons ici aux cas rationnel et réel (le cas complexe sera traité en exercice).

Théorème 2.4 (théorème fondamental de la géométrie affine). *Soit $f : E \to F$ une bijection (ensembliste) entre deux espaces affines sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, de même dimension ≥ 2. Alors f est affine si et seulement si f transforme trois points alignés de E en trois points alignés de F.*

3 Notions affines invariantes par une application affine

Dans ce paragraphe, nous nous contenterons seulement de rappeler ce qui a déjà été prouvé (en cours ou en T.D.), à savoir : les applications affines conservent

1) l'ensemble des sous-espaces,
2) l'alignement des points,
3) le parallélisme (non strict) des sous-espaces,
4) le rapport,
5) les barycentres (en particulier, les milieux),
6) les segments et l'ensemble des parties convexes lorsque $K = \mathbb{R}$.

En outre, les isomorphismes affines conservent

7) l'ensemble des sous-espaces de même dimension,
8) l'intersection des sous-espaces,
9) le parallélisme strict des sous-espaces,
10) l'ensemble des familles affinement libres,
11) l'ensemble des parties affinement génératrices,
12) l'ensemble des repères (affines ou cartésiens).

4 Groupe des dilatations (homothéties et translations, bis)

Dans le paragraphe 2.2 du chapitre I, nous avons déjà défini les homothéties et les translations, et prouvé quelques-unes de leurs propriétés. Nous allons ici compléter nos connaissances à leur sujet.

Fixons un K-espace affine E et commençons par les propriétés algébriques de ces morphismes.

Notation 4.1. On note $T(E)$ (resp. $H(E)$) l'ensemble des translations (resp. des homothéties) de E.

Proposition 4.2. *Les translations vérifient les propriétés suivantes :*

1) $t_{\vec{0}} = \mathrm{id}_E$;
2) $t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{y}} = t_{\vec{x}+\vec{y}} = t_{\vec{y}} \circ t_{\vec{x}}$;
3) $t_{\vec{x}}$ *est bijective, d'inverse* $t_{\vec{x}}^{-1} = t_{-\vec{x}}$.
4) *Pour tout* $f \in A(E)$, *pour tout* $\vec{x} \in \vec{E}$, $f \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{f}(\vec{x})} \circ f$.

Démonstration. Cela a déjà été vu dans un exercice du chapitre I. ✓

Corollaire 4.3. *L'ensemble $T(E)$ des translations est un sous-groupe distingué et abélien du groupe affine $GA(E)$, isomorphe au groupe additif de $\vec{E}$.*

Démonstration. Comme $\varnothing \neq T(E) \subset GA(E)$, les assertions 1) à 3) de la proposition précédente montrent que c'est un sous-groupe abélien de $GA(E)$, et l'assertion 4) implique qu'il est distingué. D'autre part, l'application $(\vec{E}, +) \to (T(E), \circ)$, $\vec{x} \mapsto t_{\vec{x}}$ fournit l'isomorphisme demandé. ✓

Proposition 4.4. *Soit $h = h_{A,\lambda}$ une homothétie de E.*

1) *Si $\lambda = 1$, alors $h = \mathrm{id}$;*

2) *Si $h' = h_{A,\lambda'}$ est une autre homothétie de centre A, alors la composée $h \circ h'$ est encore une homothétie de centre A, et cette composée est commutative.*

3) *h est un automorphisme affine, dont la réciproque est $h^{-1} = h_{A,1/\lambda}$.*

Démonstration. Cela a été vu également dans un exercice du chapitre I. ✓

Corollaire 4.5. *Pour tout $A \in E$, l'ensemble $H_A(E)$ des homothéties de centre A est un sous-groupe abélien de $GA(E)$, isomorphe au groupe multiplicatif K^*.*

Démonstration. La proposition précédente montre que $H_A(E)$ est un sous-groupe abélien de $GA(E)$, et l'isomorphisme avec K^* est donné par l'application $(K^*, \times) \to (H_A(E), \circ)$, $\lambda \mapsto h_{A,\lambda}$. ✓

Une petite remarque au passage : $H_A(E)$ n'est pas un sous-groupe distingué de $GA(E)$, mais c'en est un de $GA_A(E)$.

Voici maintenant une caractérisation simultanée des homothéties et des translations par leur partie linéaire, qui établit une réciproque à certains résultats du paragraphe 2.2.

Proposition 4.6. *Soit $f \in A(E)$ telle que $\vec{f} = \lambda \, \mathrm{id}_{\vec{E}}$ pour un $\lambda \in K^*$.*

1) *Si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie.*

2) *Si $\lambda = 1$, f est une translation.*

Démonstration. Là encore, cela a été vu dans un exercice du chapitre I. ✓

Ce résultat montre que les homothéties et les translations sont en quelque sorte de la même famille. Précisons cela.

Corollaire 4.7. *L'ensemble $D(E) = H(E) \cup T(E)$ constitué des homothéties et des translations est un sous-groupe distingué du groupe affine $GA(E)$.*

Démonstration. Rappelons qu'on a un morphisme canonique $L : GA(E) \to GL(\vec{E})$, $f \mapsto \vec{f}$. Soit alors $H = \{\lambda \, \mathrm{id},\ \lambda \in K^*\}$. Il est clair que H est un sous-groupe distingué de $GL(\vec{E})$, par conséquent $L^{-1}(H)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. Or $L^{-1}(H) = D(E)$ par définition, d'où le résultat. ✓

Remarque 4.8. On a en fait $T(E) = \mathrm{Ker}\, L$, ce qui prouve d'une autre manière que $T(E)$ est un sous-groupe distingué du groupe affine.

Définition 4.9. Un élément de $D(E)$ sera appelé **dilatation**, ou encore **homothétie-translation**. C'est donc un automorphisme affine, de partie linéaire une homothétie vectorielle dont le rapport sera par définition le **rapport** de la dilatation.

Maintenant nous savons par un argument « abstrait » que les composées de dilatations sont des dilatations. Mais il nous reste à comprendre cela d'un point de vue plus « concret », c'est-à-dire calculatoire.

Nous savons déjà que la composée de deux translations est une translation et que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie. Examinons maintenant les autres situations.

Proposition 4.10.

1) *Soient $h_1 = h_{A_1,\lambda_1}$ et $h_2 = h_{A_2,\lambda_2}$ deux homothéties de centres distincts. Alors leur composée $h_2 \circ h_1$ (ou $h_1 \circ h_2$) est une homothétie de centre $A \in (A_1A_2)$ et de rapport $\lambda_1\lambda_2$ si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, et est une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$ sinon.*

2) *La composée $t \circ h$ ou $h \circ t$ d'une translation et d'une homothétie distincte de l'identité est une homothétie de même rapport que h.*

Démonstration. Exercice. ✓

Passons maintenant aux propriétés géométriques spécifiques des dilatations (les autres sont celles vérifiées par tout automorphisme affine, voir paragraphe 3).

Proposition 4.11.

1) *Si $h = h_{A,\lambda}$ et si $M \in E$, alors M, $M' = h(M)$ et A sont alignés et $\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \lambda$.*

2) *Réciproquement, si A, B, C sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq C$, alors il existe une unique homothétie h de centre A telle que $h(B) = C$: celle dont le rapport vaut $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.*

3) *Pour tout couple $(A, B) \in E \times E$, il existe une unique translation t telle que $t(A) = B$: c'est $t = t_{\overrightarrow{AB}}$.*

Démonstration. Cela a été vu en exercice (chapitre I). ✓

Voici maintenant une caractérisation purement géométrique des dilatations. Auparavant, un lemme classique, très souvent utilisé.

Lemme 4.12. *Soit σ un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ vérifiant : $\forall \vec{x} \in \overrightarrow{E}, \exists \lambda(\vec{x}) \in K : \sigma(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})\vec{x}$. Alors σ est une homothétie de $\overrightarrow{E}$.*

Démonstration. Il s'agit donc de prouver que $\lambda(\vec{x})$ est indépendant de $\vec{x}$. Soient donc $\vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{E}$, non nuls.

1) Supposons que la famille $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ soit libre. La linéarité de σ conduit à

$$\lambda(\vec{x})\vec{x} + \lambda(\vec{y})\vec{y} = \lambda(\vec{x} + \vec{y})\vec{x} + \lambda(\vec{x} + \vec{y})\vec{y}.$$

L'hypothèse faite sur $\vec{x}, \vec{y}$ implique alors $\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{y})$.

2) Supposons maintenant que $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ soit liée. Comme $\vec{x}, \vec{y}$ sont non nuls, il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\vec{y} = \alpha\vec{x}$. Par linéarité de σ, on a $\sigma(\vec{y}) = \sigma(\alpha\vec{x}) = \alpha\sigma(\vec{x})$, c'est-à-dire $\lambda(\vec{y})\alpha\vec{x} = \alpha\lambda(\vec{x})\vec{x}$. Comme $\vec{x}$ et α sont non nuls, on en déduit que $\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{y})$.

3) Concluons : nous venons de voir qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\sigma(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ pour tout $\vec{x}$ non nul. Or on a trivialement $\sigma(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$, si bien que l'identité $\sigma = \lambda\,\mathrm{id}$ est vraie sur $\overrightarrow{E}$ tout entier. ✓

Théorème 4.13. *Soit $f \in A(E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une dilatation;*

(ii) *f envoie tout sous-espace affine de E sur un sous-espace qui lui est strictement parallèle;*

(iii) *f envoie toute droite de E sur une droite qui lui est parallèle.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit F un sous-espace de E. Alors $f(F)$ est un sous-espace de E, de direction $\vec{f}(\overrightarrow{F}) = \lambda\,\mathrm{id}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$, d'où le résultat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : L'hypothèse se traduit par $\vec{f}(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{D}$ pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ de $\overrightarrow{E}$, ou encore par : $\forall \vec{x} \in \overrightarrow{E}, \exists \lambda(\vec{x}) \in K : \vec{f}(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})\vec{x}$. D'après le lemme précédent, $\vec{f}$ doit être une homothétie et donc f doit être une dilatation ($\lambda \neq 0$ car sinon f serait constante, donc ne pourrait envoyer toute droite sur une droite). ✓

5 Affinités et symétries

Dans ce paragraphe, nous allons voir de nouveaux exemples classiques d'applications affines. Introduisons d'abord une écriture bien commode.

Notation 5.1 (Barycentre d'applications affines). Soient E, F deux K-espaces affines. Si $f, g \in A(E, F)$ et $\lambda \in K$, l'application $M \mapsto \lambda f(M) + (1-\lambda)g(M)$ (qui est bien définie) se note $\lambda f + (1-\lambda)g$.

Il faut bien comprendre qu'en général, une combinaison linéaire d'applications affines n'est pas définie (ici, il s'agit d'un barycentre), contrairement à une combinaison linéaire d'applications linéaires (puisqu'un ensemble d'applications linéaires est un espace vectoriel).

Lemme 5.2. *Si $f, g \in A(E, F)$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda f + (1-\lambda)g \in A(E, F)$, et sa partie linéaire est $\lambda \vec{f} + (1-\lambda)\vec{g}$.*

Démonstration. La vérification est immédiate. ✓

Nous sommes maintenant parés pour définir de nouveaux morphismes affines.

Proposition 5.3. *Soient E un K-espace affine, F un sous-espace affine de E, $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, p la projection de E sur F parallèlement à $\vec{G}$ et $\lambda \in K$. On considère l'application $a = \lambda \,\mathrm{id}_E + (1-\lambda)p$.*

1) *a est un endomorphisme affine de E, de partie linéaire $\vec{a} = \lambda \,\mathrm{id}_{\vec{E}} + (1-\lambda)\vec{p}$.*

2) *Dans une base convenable de $\vec{E}$, l'endomorphisme $\vec{a}$ admet pour matrice*

$$\begin{pmatrix} I_{\dim \vec{F}} & 0 \\ 0 & \lambda I_{\dim \vec{G}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathrm{dét}\, \vec{a} = \lambda^{\dim \vec{G}}$.

3) *Si $\lambda = 0$, alors $a = p$; si $\lambda \neq 0$, alors $a \in GA(E)$ et $a^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathrm{id}_E + (1-\frac{1}{\lambda})p$.*

4) *si $\lambda = 1$, alors $a = \mathrm{id}_E$; si $\lambda \neq 1$, alors $\mathrm{Inv}(a) = F$ et $\vec{G} = \mathrm{Ker}(\vec{a} - \lambda \,\mathrm{id}_{\vec{E}})$ (sous-espace propre pour la valeur propre λ) et aussi $\vec{G} = \{\overrightarrow{Ma(M)},\ M \in E\}$.*

5) *Pour tout $M \in E$, $a(M) = h_{p(M),\lambda}(M)$; cette formule permet construire géométriquement $a(M)$.*

Démonstration. 1) résulte du lemme.

2) Il suffit de prendre pour base de $\vec{E}$ la réunion d'une base quelconque de $\vec{F}$ et d'une base quelconque de $\vec{G}$.

3) Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $\mathrm{dét}\, \vec{a} \neq 0$ d'après 2), donc $\vec{a} \in GL(\vec{E})$ et $a \in GA(E)$. En outre, posant $b = \frac{1}{\lambda} \mathrm{id}_E + (1-\frac{1}{\lambda})p$, on vérifie aisément que $b \circ a = a \circ b = \mathrm{id}$.

4) Supposons $\lambda \neq 1$. Alors $\mathrm{Ker}(\vec{a} - \lambda \,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}((1-\lambda)\vec{p}) = \mathrm{Ker}\, \vec{p} = \vec{G}$. D'autre part, $\overrightarrow{Ma(M)} = (1-\lambda)\overrightarrow{Mp(M)}$ donc $\{\overrightarrow{Ma(M)},\ M \in E\} = \{\overrightarrow{Mp(M)},\ M \in E\} = \vec{G}$ d'après la proposition 4.42 du chapitre I. Enfin,

$$\begin{aligned} a(M) = M &\Leftrightarrow \lambda M + (1-\lambda)p(M) = M \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)p(M) = (1-\lambda)M \quad \text{dans un vectorialisé de } E \\ &\Leftrightarrow p(M) = M \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Inv}(p) = F. \end{aligned}$$

5) Il suffit d'écrire $a(M) = \lambda M + (1-\lambda)p(M) = p(M) + \lambda \overrightarrow{p(M)M} = h_{p(M),\lambda}(M)$. ✓

Définitions 5.4. Avec les notations précédentes, l'application a s'appelle **affinité d'axe F, de direction $\vec{G}$ et de rapport λ** (les mots « axe » et « direction » sont suggérés par la propriété 4) ci-dessus). On dit aussi que a est l'**affinité de rapport λ associée à p**. (Sa partie linéaire $\vec{a}$ est appelée affinité vectorielle d'axe $\vec{F}$, de direction $\vec{G}$ et de rapport λ.)
Lorsque $\lambda = -1$, l'affinité a s'appelle **symétrie d'axe F et de direction $\vec{G}$** (ou symétrie par rapport à F parallèlement à $\vec{G}$) et se note plutôt s. On a donc $s = 2p - \mathrm{id}$ (et $\vec{s} = 2\vec{p} - \mathrm{id}$ n'est autre que la symétrie vectorielle d'axe $\vec{F}$ et de direction $\vec{G}$).

Remarques 5.5.

1) La proposition précédente montre que l'inverse d'une affinité est encore une affinité (ayant même axe et même direction, mais un rapport inverse).

2) Lorsque F est réduit à un point A, l'affinité d'axe $F = \{A\}$, de direction (nécessairement égale à) $\vec{G} = \vec{E}$ et de rapport λ n'est autre que l'homothétie $h_{A,\lambda}$ (d'après la propriété 5). En particulier, une symétrie d'axe $\{A\}$ et de direction $\vec{G} = \vec{E}$ est la symétrie centrale de centre A, i.e. l'application $s_A : M \mapsto A + \overrightarrow{MA}$.

3) En résumé, la catégorie des affinités comprend celles des projections, symétries et homothéties, et une symétrie centrale est à la fois une symétrie et une homothétie.

Voici quelques propriétés essentielles des symétries.

Proposition 5.6. *Soit s une symétrie associée à une projection p de E sur F parallèlement à $\vec{G}$.*

1) *Soient M, M' deux points de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M' = s(M)$;

(ii) $M' = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$;

(iii) $\frac{M+M'}{2} = p(M)$;

(iv) $\frac{M+M'}{2} \in F$ *et* $\overrightarrow{MM'} \in \vec{G}$.

2) $F = \{\frac{M+s(M)}{2},\ M \in E\}$.

Démonstration. 1) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : on écrit

$$\begin{aligned} M' = s(M) &\Leftrightarrow M' = 2p(M) - M \\ &\Leftrightarrow M' - M = 2p(M) - 2M \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{Mp(M)} \\ &\Leftrightarrow M' = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}. \end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : c'est encore plus simple, puisque $M' = s(M) \Leftrightarrow M' = 2p(M) - M \Leftrightarrow \frac{M+M'}{2} = p(M)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : si $\frac{M+M'}{2} = p(M)$, alors en particulier $\frac{M+M'}{2} \in F$, et puisque (ii) est vraie aussi, $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{Mp(M)} \in \vec{G}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : posons $I = \frac{M+M'}{2} \in F$. Alors

$$\overrightarrow{MI} = I - M = \frac{M+M'}{2} - M = \frac{-M+M'}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'} \in \vec{G},$$

d'où $I \in M + \vec{G}$, si bien que $I \in F \cap (M + \vec{G})$, c'est-à-dire $I = p(M)$.

2) Si $M \in F = \mathrm{Inv}(s)$, alors $s(M) = M$ donc $M = \frac{M+s(M)}{2}$. La réciproque résulte de l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) du 1). ✓

Pour finir, une caractérisation des symétries parmi les endomorphismes affines de E.

Proposition 5.7. *Soit f un endomorphisme affine de E. Alors f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}$.*

Démonstration. On va utiliser ici la caractérisation des projections (cf. proposition 4.43 du chapitre I) : si $f \in A(E)$, alors f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.

Soit donc f une symétrie, il existe une projection p telle que $f = 2p - \mathrm{id}$. Comme $p \circ p = p$, on vérifie sans peine que $f \circ f = \mathrm{id}$.

Réciproquement, si $f \in A(E)$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}$, posons $p = \frac{f+\mathrm{id}}{2}$ (au sens des barycentres d'applications affines). Alors on voit que $p \circ p = p$, donc p est une projection et $f = 2p - \mathrm{id}$ est une symétrie. ✓

6 Points fixes des endomorphismes affines

Un endomorphisme linéaire possède toujours au moins un point fixe : $\vec{0}$. Ce n'est malheureusement pas le cas des endomorphismes affines, ce qui rend l'étude de certains aspects plus délicate (justement par ce manque de linéarité). L'intérêt de l'existence de points fixes d'une application affine réside dans le fait qu'elle est alors complètement déterminée par sa partie linéaire (cf. chapitre I, paragraphe 2.1), ce qui ramène les problèmes affines à des problèmes linéaires, plus faciles à traiter. L'un des buts de ce paragraphe est donc de fournir une CNS d'existence des points fixes.

Notation 6.1. Pour $\sigma \in L(\vec{E})$, définissons

$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \{\vec{x} \in \vec{E} : \sigma(\vec{x}) = \vec{x}\} = \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\vec{E}}).$$

Autrement dit, $\mathrm{Inv}(\sigma)$ est le sous-espace propre de $\vec{E}$ associé à la valeur propre 1; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Proposition 6.2. *Soit $f \in A(E)$.*

1) *Soit $A \in E$. Alors $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{Af(A)} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.*
2) *Si $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$, $\mathrm{Inv}(f)$ est un sea de E, de direction $\mathrm{Inv}(\vec{f})$.*

Démonstration. 1) Fixons donc $A \in E$. Si $M \in E$, alors $f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{Af(A)} + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$. Par suite,

$$M \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Af(A)} + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} = (\vec{f} - \mathrm{id})(\overrightarrow{MA}),$$

de sorte que $\mathrm{Inv}(f)$ est non vide si et seulement s'il existe une solution dans $\vec{E}$ à l'équation $\overrightarrow{Af(A)} = (\vec{f} - \mathrm{id})(\vec{x})$ et donc, si et seulement si $\overrightarrow{Af(A)} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$.

2) Supposons $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$, fixons $A \in \mathrm{Inv}(f)$, et donnons-nous un point $M \in E$. D'après le calcul effectué en 1), $M \in \mathrm{Inv}(f)$ si et seulement si $(\vec{f} - \mathrm{id})(\overrightarrow{MA}) = \vec{0}$ (puisque $f(A) = A$), donc si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}) = \mathrm{Inv}(\vec{f})$. On en déduit que $\mathrm{Inv}(f) = A + \mathrm{Inv}(\vec{f})$, c'est-à-dire que $\mathrm{Inv}(f)$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Inv}(\vec{f})$. ✓

Corollaire 6.3. *Soit $f \in A(E)$. Alors f possède un point fixe, et un seul, si et seulement si $\mathrm{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$.*

Observons que pour utiliser la partie indirecte de ce corollaire, il n'est pas nécessaire de montrer d'abord que $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$, d'où son grand intérêt.

Démonstration. La partie directe de l'assertion résulte directement du 2) de la proposition précédente. Réciproquement, si $\mathrm{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, alors $\vec{f} - \mathrm{id}$ est injective, donc surjective (c'est un endomorphisme de $\vec{E}$, espace de dimension finie) et donc $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}) = \vec{E}$. Par conséquent, le point 1) de la proposition précédente implique que $\mathrm{Inv}(f)$ est non vide, et le point 2) dit que c'est un sous-espace de direction $\mathrm{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire un singleton. ✓

Exemple 6.4. Soit h une homothétie de rapport $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Alors $\vec{h} = \lambda\,\mathrm{id}$, donc $\mathrm{Inv}(\vec{h}) = \{\vec{0}\}$ et l'on retrouve que $\mathrm{Inv}(h)$ est un singleton, qui est évidemment le centre de h.

Remarque 6.5. Si $f \in GA(E)$, alors $\mathrm{Inv}(f^{-1}) = \mathrm{Inv}(f)$.

Comme on vient de le voir, un endomorphisme affine n'a pas nécessairement des points fixes. Le résultat suivant démontre cependant que, sous certaines hypothèses, on peut isoler dans f une « composante » qui en possède.

Théorème 6.6. *Soit $f \in A(E)$ telle que $\mathrm{Inv}(\vec{f}) = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$ soient supplémentaires dans $\vec{E}$. Il existe un unique couple $(t, g) \in T(E) \times A(E)$ tel que $f = t \circ g = g \circ t$ et $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$. En outre, $\mathrm{Inv}(g)$ est un sous-espace de direction $\mathrm{Inv}(\vec{f})$ et $t = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{f})$.*

Démonstration. 1) Commençons par analyser la condition $f = t \circ g = g \circ t$. Pour cela, écrivons $t = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \vec{E}$, de sorte que

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}} \Leftrightarrow g = t_{-\vec{u}} \circ f = f \circ t_{-\vec{u}}.$$

Mais comme, pour tout $\varphi \in A(E)$ et tout $\vec{x} \in \vec{E}$, on sait que $\varphi \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{\varphi}(\vec{x})} \circ \varphi$, on en déduit :

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}} \Leftrightarrow t_{-\vec{u}} \circ f = t_{\vec{f}(-\vec{u})} \circ g \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{f}) = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}).$$

2) Analysons maintenant la condition $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$, pour $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. Fixons $A \in E$. Puisque $\vec{g} = \vec{f}$, la proposition 6.2 donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing &\Leftrightarrow \overrightarrow{Ag(A)} \in \mathrm{Im}(\vec{g} - \mathrm{id}) \\
&\Leftrightarrow (f(A) - \vec{u}) - A \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} - \vec{u} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \text{avec } \vec{v} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}).
\end{aligned}$$

3) D'après ce qui précède, on a simultanément $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ et $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id})$ et $\vec{v} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$. Mais cette condition est bien vérifiée puisque $\vec{E} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}) + \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$. Comme en fait cette somme est aussi directe, on obtient au passage l'unicité du vecteur $\vec{u}$, donc de la translation $t = t_{\vec{u}}$ et de l'application $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. Enfin $\vec{g} = \vec{f}$, donc $\mathrm{Inv}(g)$ est bien un sous-espace de direction $\mathrm{Inv}(\vec{g}) = \mathrm{Inv}(\vec{f})$ d'après la proposition 6.2. ✓

Définition 6.7. Lorsqu'elle existe, l'écriture $f = t \circ g = g \circ t$ fournie par le théorème précédent s'appelle la **décomposition canonique**, ou la **forme réduite** de f.

On retiendra d'elle qu'elle est unique et commutative, et que le vecteur de la translation n'est pas anodin.

7 Exercices

Exercice 1.

1) Prouver que si E et F sont deux K-espaces affines isomorphes, alors $GA(E)$ et $GA(F)$ sont des groupes isomorphes. En particulier, si $n = \dim E$, on retiendra que $GA(E)$ est isomorphe à $GA(K^n)$.

2) Comparer les groupes $GA(E)$ et $D(E)$ lorsque E est une droite.

Exercice 2. Trouver un contre-exemple au théorème fondamental de la géométrie affine dans les deux situations suivantes :

1) si l'on suppose les espaces de dimension 1 ;

2) si l'on suppose que le corps de base K est $\mathbb{C}$. [Considérer $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.]

Exercice 3.

1) Soient $h_1 = h_{A_1,\lambda_1}$ et $h_2 = h_{A_2,\lambda_2}$ deux homothéties de centres distincts. Déterminer les composées $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.

2) L'ensemble $H(E)$ des homothéties de E est-il un groupe ?

3) Soient $h = h_{A,\lambda}$ une homothétie de rapport $\neq 1$ et $t = t_{\vec{u}}$ une translation. Déterminer les composées $t \circ h$ et $h \circ t$.

4) Le groupe des dilatations $D(E)$ est-il commutatif ? Même question pour le groupe affine $GA(E)$.

Exercice 4. Démontrer le **théorème de Desargues** [Girard Desargues, 1591-1661] :
Dans un plan affine, soient A, B, C, A', B', C' six points non alignés trois à trois et tels que $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$. Si en outre $(CA) \parallel (C'A')$, alors (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles ou concourantes.
Indication : on pourra suivre la démarche suivante.

1) On suppose d'abord que (AA') et (BB') sont sécantes en un point O.

   a) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre O, telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.

   b) Montrer que h transforme (BC) en $(B'C')$, et transforme (CA) en $(C'A')$.

   c) En déduire que $h(C) = C'$ et conclure.

2) On suppose ensuite que (AA') et (BB') sont parallèles. Procéder comme dans le premier cas en utilisant cette fois une translation bien choisie.

N.B. Le théorème de Desargues admet une réciproque (que l'on établit facilement avec le même type d'arguments). On peut aussi démontrer qu'il est valable dans tout espace de dimension ≥ 2.

Exercice 5. Démontrer le **théorème de Pappus** [Pappus d'Alexandrie, IV[e] siècle] :
Soient D, D' deux droites distinctes d'un plan affine. Soient A, B, C (resp. A', B', C') des points distincts de D (resp. de D'), distincts de l'intersection éventuelle $D \cap D'$.
Si $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$, alors $(AC') \parallel (CA')$.
Indication : on pourra suivre la démarche suivante.

1) On suppose d'abord D, D' sécantes en un point O.

   a) Montrer que l'homothétie h de centre O qui envoie A sur B envoie aussi B' sur A'.

   b) Montrer que l'homothétie h' de centre O qui envoie C' sur B' envoie aussi B sur C.

   c) Montrer que $h' \circ h(A) = C$ et $h' \circ h(C') = A'$ (observer que h et h' commutent) et en déduire le résultat voulu.

2) On suppose ensuite que D et D' sont parallèles. Procéder comme dans le premier cas en considérant cette fois des translations.

Exercice 6. Voici une autre preuve du théorème de Ménélaüs.

1) Soient h_1, h_2 et h_3 des homothéties de rapports respectifs λ_1, λ_2 et λ_3. On pose $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Vérifier que $h = \mathrm{id}$ si et seulement si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ et h possède (au moins) un point fixe.

2) Soit ABC un triangle de E. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux droites (AB), (BC) et (CA), distincts des sommets du triangle.

a) On note h_1 l'homothétie de centre P telle que $h_1(A) = B$, h_2 l'homothétie de centre Q telle que $h_2(B) = C$ et h_3 l'homothétie de centre R telle que $h_3(C) = A$. Déterminer les rapports de ces trois homothéties.
Dans la suite, on pose $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

b) Vérifier que A est un point fixe de h, et en déduire la nature de h.

c) On suppose que P, Q et R sont alignés sur une droite Δ. Prouver que $h(\Delta) = \Delta$, et en déduire que $h = \mathrm{id}$.

d) Montrer que si $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \dfrac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1$ alors $h = \mathrm{id}$.

e) En déduire le théorème de Ménélaüs : P, Q, R alignés $\iff \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \dfrac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1$.

Exercice 7. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces affines strictement parallèles de E, et soit $\vec{G}$ un supplémentaire de leur direction commune $\vec{F}$ dans $\vec{E}$. Démontrer qu'il existe un unique $\vec{u} \in \vec{G}$ tel que $F_2 = F_1 + \vec{u}$, et qu'on a alors $s_{F_2,\vec{G}} \circ s_{F_1,\vec{G}} = t_{2\vec{u}}$.

Exercice 8. Soient A, B deux points de E (distincts ou non). Déterminer la composée $s_B \circ s_A$.

Exercice 9. On dit qu'une partie X de E admet un point $A \in E$ pour **centre de symétrie** si $s_A(X) = X$. Prouver qu'une partie admettant deux centres de symétrie distincts en admet nécessairement une infinité. [Utiliser l'exercice 8.]

Exercice 10. Démontrer que le groupe des dilatations $D(E)$ est le sous-groupe de $GA(E)$ engendré par l'ensemble des homothéties $H(E)$. [Utiliser l'exercice 8.]

Exercice 11. On suppose que E est un plan. Soit ABC un triangle non aplati de E, et soit G l'ensemble des endomorphismes affines de E qui laissent invariant le triangle ABC, i.e. qui permutent ses trois sommets A, B, C.

1) Montrer que G est un groupe d'ordre 6, appelé **groupe du triangle** ABC.
2) Montrer que tous les éléments de G possèdent au moins un point fixe.
3) En déduire une description explicite de G.

Exercice 12. Soit $f \in A(E)$ vérifiant : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f^n soit constante. Prouver que $\mathrm{Inv}(f)$ est un singleton, que l'on identifiera.

Exercice 13. On suppose que E est un plan muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$. Donner la représentation matricielle dans $\mathcal{R}$ de l'affinité d'axe D d'équation $x+2y = 1$, de direction $\vec{\Delta}$ d'équation $3y-x = 0$, et de rapport $\frac{2}{3}$.

Exercice 14. On suppose que E est de dimension 3 et muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$. Montrer que l'application $f : E \to E$ de représentation matricielle

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

dans $\mathcal{R}$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Chapitre III : Espaces affines euclidiens

Dans ce chapitre, nous allons spécialiser notre étude aux espaces affines euclidiens. Ces espaces affines (réels) sont remarquables par le fait qu'ils bénéficient d'une structure topologique à la fois simple et riche, puisque ce sont des espaces métriques où la distance est associée à un produit scalaire (défini sur leur direction). L'existence d'un tel produit scalaire permet en outre de définir les notions classiques d'orthogonalité et d'angle (orienté ou non), et il devient alors naturel d'étudier les applications affines qui vont préserver ces notions (similitudes, isométries).

Nous nous contenterons ici d'étudier en détail les questions liées à la distance et à l'orthogonalité, et d'effleurer les notions d'isométrie et de similitude, qui seront développées ultérieurement.

1 Rappels de géométrie vectorielle euclidienne

Il n'est pas question de refaire ici un cours sur la théorie des espaces vectoriels euclidiens (elle a été traitée en L2), mais seulement de remettre en mémoire les principaux aspects de cette théorie. C'est pourquoi aucune démonstration ne sera donnée dans ce paragraphe.

Dans tout ce qui suit, la lettre $\vec{E}$ désigne un espace vectoriel **réel** (par exemple, $\vec{E}$ pourra être la direction d'un espace affine réel E).

1.1 Produit scalaire et norme

Définitions 1.1.

1) Un **produit scalaire euclidien** sur $\vec{E}$ est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\vec{E}$, c'est-à-dire d'une application $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \vec{E}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(i) $(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}|\vec{z}) = \lambda(\vec{x}|\vec{z}) + \mu(\vec{y}|\vec{z})$ et $(\vec{z}|\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda(\vec{z}|\vec{x}) + \mu(\vec{z}|\vec{y})$ (bilinéarité);

(ii) $(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{y}|\vec{x})$ (symétrie);

(iii) $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$ (positivité);

(iv) $(\vec{x}|\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ (caractère non dégénéré).

2) On dit que $\vec{E}$ est un espace vectoriel **préhilbertien** s'il est muni d'un produit scalaire euclidien. On dit que $\vec{E}$ est un espace vectoriel **euclidien** s'il est préhilbertien **et** de dimension finie.

3) Si $\vec{E}$ est préhilbertien, l'application $\|\cdot\| : \vec{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$ s'appelle **norme euclidienne** sur $\vec{E}$ associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. (Elle n'est rien d'autre que la racine carrée de la forme quadratique associée à ce produit scalaire.)

Dans toute la suite, on suppose que $\vec{E}$ est euclidien. On note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme qui lui est associée.

Proposition 1.2. *On a les propriétés suivantes, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,(\vec{x}\,|\,\vec{y})$ *;*
2) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 4\,(\vec{x}\,|\,\vec{y})$ *;*
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$ **(identité du parallélogramme,** *alias* **identité de la médiane)***;*
4) $\|\vec{x}\| \geq 0$ **(positivité)***;*
5) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$ **(homogénéité)***;*
6) $|\,(\vec{x}\,|\,\vec{y})\,| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$*, avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont liés* **(inégalité de Cauchy-Schwarz)***;*
7) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$*, avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont positivement liés* **(inégalité de Minkowski,** *alias* **inégalité triangulaire)***;*
8) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ **(séparation)**.

Faisons le point sur ces propriétés : les trois premières n'utilisent que le fait que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, les quatre suivantes résultent de la positivité de ce produit scalaire, et la dernière traduit sa non-dégénérescence. Par ailleurs, les propriétés 4, 5, 7 & 8 sont les axiomes permettant de définir une norme, au sens large (topologique) du terme.

Rappelons au passage que toute norme ne provient pas nécessairement d'un produit scalaire (penser à la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$). En revanche, on peut démontrer que c'est le cas si et seulement si la norme en question vérifie l'identité du parallélogramme.

Rappelons également l'important résultat suivant.

Théorème 1.3. *Pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, définissons la forme linéaire $\varphi_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto (\vec{x}\,|\,\vec{y})$. Alors l'application $\vec{x} \mapsto \varphi_{\vec{x}}$ est un isomorphisme, dit* **isomorphisme canonique de $\vec{E}$ sur son dual algébrique $\vec{E}^*$**.

1.2 Orthogonalité

Définitions 1.4.

1) Deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ de $\vec{E}$ sont dits **orthogonaux** si $(\vec{x}\,|\,\vec{y}) = 0$. On écrira $\vec{x} \perp \vec{y}$ (ou $\vec{y} \perp \vec{x}$, puisqu'il s'agit d'une relation symétrique).
2) Si X est une partie de $\vec{E}$, **l'orthogonal de X** est l'ensemble $X^\perp = \{\vec{y} \in \vec{E} : \vec{x} \perp \vec{y},\ \forall \vec{x} \in X\}$.
3) Deux parties X, Y de $\vec{E}$ sont dites **orthogonales** si $X \subset Y^\perp$ ou, ce qui revient au même, si $Y \subset X^\perp$. On écrira $X \perp Y$.

Rappelons les propriétés élémentaires associées à ces notions.

Proposition 1.5.

1) *Soient $\vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs de $\vec{E}$. Alors $\vec{x} \perp \vec{y}$ si et seulement si $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$* **(théorème de Pythagore)**.
2) *Soient X, Y des parties de $\vec{E}$.*
   a) *Si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$. Ainsi,* **l'orthogonalité renverse les inclusions.**
   b) *L'orthogonal $X^\perp$ est toujours un sous-espace de $\vec{E}$, même si X n'en est pas un.*
   c) $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$.

Continuons ces rappels avec la :

Définition 1.6. Une famille $(\vec{e}_i)_{i=1}^p$ de vecteurs de $\vec{E}$ est dite **orthogonale** si $(\vec{e}_i\,|\,\vec{e}_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Si de plus $\|\vec{e}_i\| = 1$ pour tout i, on dira qu'elle est **orthonormée** (ou **orthonormale**).

On vérifie alors facilement la :

Proposition 1.7. *Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls de $\vec{E}$ est une famille libre.*

On a tendance à l'oublier, mais l'existence de telles familles orthogonales ou orthonormées (et en particulier, de bases orthonormées) n'est pas une trivialité. Elle repose sur l'important résultat suivant.

Théorème 1.8 (orthonormalisation de Schmidt). *Soit $(\vec{x}_i)_{i=1}^p$ une famille libre de vecteurs de $\vec{E}$. Il existe une famille orthonormée $(\vec{e}_i)_{i=1}^p$ de $\vec{E}$ telle que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on ait* $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$.

Corollaire 1.9 (théorème de la base orthonormée incomplète). *Toute famille orthonormée de $\vec{E}$ peut se compléter en une base orthonormée. En particulier, $\vec{E}$ possède des bases orthonormées.*

À quoi servent de telles bases ? En premier lieu, à exprimer très simplement les produits scalaires et les normes :

Proposition 1.10. *Soit $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ une base orthonormée de $\vec{E}$. Si $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i\vec{e}_i$, on a :*

1) $(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *et, en particulier,* $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ *;*
2) $x_i = (\vec{x}|\vec{e}_i)$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

Ces propriétés permettent ensuite de prouver d'autres résultats importants :

Théorème 1.11. *Soient $\vec{F}$, $\vec{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$.*

1) *Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe, i.e.* $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$.
2) $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^\perp$, *i.e. $\vec{F}^\perp$ est un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$. En particulier,* $\dim \vec{F}^\perp = \dim \vec{E} - \dim \vec{F}$.
3) *$\vec{F}^\perp$ est l'unique supplémentaire de $\vec{F}$ qui lui soit orthogonal. Pour cette raison, on l'appelle* **le** *supplémentaire orthogonal de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$.*
4) $\vec{F}^{\perp\perp} = \vec{F}$.
5) $(\vec{F} + \vec{G})^\perp = \vec{F}^\perp \cap \vec{G}^\perp$.
6) $(\vec{F} \cap \vec{G})^\perp = \vec{F}^\perp + \vec{G}^\perp$.

1.3 Projections, affinités et symétries orthogonales

Définitions 1.12. Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. Comme $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^\perp$, on peut définir la projection de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{F}^\perp$. On l'appelle **projection orthogonale de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$** et on la note $p_{\vec{F}}$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'affinité de rapport λ qui lui est associée, à savoir $a_{\vec{F},\lambda} = \lambda\,\mathrm{id}_{\vec{E}} + (1-\lambda)p_{\vec{F}}$, s'appelle **affinité orthogonale d'axe $\vec{F}$ et de rapport λ**.
De même, la symétrie $s_{\vec{F}} = 2p_{\vec{F}} - \mathrm{id}_{\vec{E}}$ qui lui est associée s'appelle la **symétrie orthogonale d'axe $\vec{F}$**.

2 Généralités sur les espaces affines euclidiens

Nous revenons maintenant (et définitivement) au cadre affine.

2.1 Structure euclidienne sur un espace affine réel

Définition 2.1. Un espace affine réel E est dit **euclidien** (ou **muni d'une structure euclidienne**) si sa direction $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire si $\vec{E}$ est de dimension finie et muni d'un produit scalaire euclidien.

Observons tout de suite un phénomène remarquable :

Proposition 2.2. *Tout espace affine réel de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne (non canonique).*

Démonstration. Il s'agit donc de prouver que tout espace vectoriel réel de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, considérons une base quelconque $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$ de $\vec{E}$. Pour $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum y_i \vec{e}_i$, posons $(\vec{x}|\vec{y})_{\mathcal{B}} = \sum x_i y_i$. On vérifie facilement que $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{B}}$ est un produit scalaire euclidien sur $\vec{E}$ (pour lequel $\mathcal{B}$ est d'ailleurs une base orthonormée). ✓

Dans toute la suite de ce chapitre, la lettre E désigne un espace affine euclidien de dimension n. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien sur sa direction $\vec{E}$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne qui lui est associée.

Le résultat suivant découle immédiatement des propriétés de la norme euclidienne sur $\vec{E}$ (cf. proposition 1.2).

Proposition 2.3. *Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. Alors d est une distance sur E, i.e. elle vérifie : pour tous $A, B, C \in E$,*

1) $d(A, B) \geq 0$ **(positivité)**;
2) $d(A, B) = d(B, A)$ **(symétrie)**;
3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ **(inégalité triangulaire)**;
4) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ **(séparation)**.

On l'appelle **distance sur E associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ de $\vec{E}$**, *ou plus simplement,* **distance euclidienne sur E**.

Notation 2.4. Dans toute la suite, on emploiera l'écriture AB plutôt que $d(A, B)$ pour désigner le réel $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarques 2.5.

1) Si E est un espace vectoriel euclidien muni de sa structure affine canonique, la distance euclidienne est donnée par $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|$.

2) Dans l'espace affine euclidien E, le théorème de Pythagore se traduit de la façon suivante : pour tous $A, B, C \in E$, on a : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$.

3) Rappelons qu'un triangle non aplati ABC de E est dit **isocèle en A** si $AB = AC$, et **équilatéral** s'il est isocèle en chacun de ses sommets.

Voici quelques caractérisations métriques utiles.

Proposition 2.6. *Soient A, B, I, M des points de E.*

1) $AB = AM + MB \Leftrightarrow M \in [AB]$ **(cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire)**.
2) *I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $IA = IB = \frac{AB}{2}$.*
3) *Supposons $A \neq B$. Alors : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $I \in (AB)$ et $IA = IB$.*

Démonstration. 1) Si $M = A$ ou $M = B$, le résultat est trivial. Supposons donc $M \neq A, B$. D'une part, la proposition 7.2 du chapitre I nous dit : $M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens contraires. D'autre part, $AB = \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\|$, donc $AB = AM + MB$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de même sens (cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski), cqfd.

2) Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ donc $IA = IB = \frac{AB}{2}$. Réciproquement, supposons que $IA = IB = \frac{AB}{2}$ avec $A \neq B$ (si $A = B$ le résultat est évident). Comme $AI + IB = AB$, on déduit de 1) que $I \in [AB]$. Autrement dit, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $I = (1 - \lambda)A + \lambda B$ et alors

$$\overrightarrow{AI} = I - A = -\lambda A + \lambda B = \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BI} = I - B = (1 - \lambda)\overrightarrow{BA}.$$

Ceci implique $AI = \lambda AB$ (car $\lambda \geq 0$) et $BI = (1 - \lambda)AB$ (car $1 - \lambda \geq 0$). Comme $IA = IB$ et $AB \neq 0$, on conclut que $\lambda = 1 - \lambda$, i.e. $\lambda = \frac{1}{2}$.

3) Là encore, le sens direct de l'assertion est évident. Réciproquement, si $I \in (AB)$, on l'écrit $I = (1 - \lambda)A + \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En procédant comme dans 2), on voit que l'égalité $IA = IB$ implique $|\lambda| = |1 - \lambda|$, et l'on aboutit encore à $\lambda = \frac{1}{2}$. ✓

2.2 Repères orthonormés

Rappelons qu'il y a un moyen privilégié de prendre des coordonnées dans un espace affine euclidien.

Définition 2.7. Un repère cartésien de E est dit **orthogonal** (resp. **orthonormé**) si la base de $\overrightarrow{E}$ qui lui est associée est orthogonale (resp. orthonormée).
Pour abréger, on dira simplement « repère orthonormé » au lieu de « repère cartésien orthonormé » (et on pourra écrire « r.o.n. »).

Le résultat suivant découle immédiatement du corollaire 1.9 :

Théorème 2.8. *L'espace euclidien E possède des repères orthonormés.*

L'intérêt de ces repères est qu'on y calcule facilement des distances :

Proposition 2.9. *Dans un repère orthonormé de E, si $M = (x_i)_{i=1}^n$ et $N = (y_i)_{i=1}^n$, alors $MN = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = (O; (\vec{e}_i))$ un r.o.n. de E. Si $M = (x_i)$ et $N = (y_i)$ (coordonnées dans $\mathcal{R}$), on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \sum (y_i - x_i)\vec{e}_i$, d'où le résultat. ✓

2.3 Quelques points de topologie

Par définition, l'espace affine euclidien E est muni d'une distance d, et donc d'une **topologie métrique**. Nous allons en voir quelques propriétés.

Remarque 2.10. La proposition 2.3 montre qu'on peut définir en fait une distance sur E à partir de n'importe quelle norme définie sur $\overrightarrow{E}$, même non euclidienne. Mais on peut démontrer (cf. cours de topologie) que toutes les distances définies de cette façon sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles définissent une même topologie sur E, dite canonique (c'est l'hypothèse de dimension finie qui est essentielle ici).

Proposition 2.11.

1) *L'espace topologique* (E, d) *est complet.*

2) *Tout sous-espace affine F de E est fermé dans E (donc complet), et si $F \neq E$, F est d'intérieur vide dans E.*

3) *Si $X \subset E$, l'adhérence de X est l'ensemble des limites de suites de points de X.*

4) *Si $X \subset E$, alors X est compact si et seulement si X est fermé et borné.*

5) *Pour $A \in E$ et $r \geq 0$, notons $B(A, r) = \{M \in E : AM < r\}$ (resp. $B'(A, r) = \{M \in E : AM \leq r\}$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre A et de rayon r.*
Alors $B'(A, r) = \overline{B(A, r)}$ et $B(A, r) = [B'(A, r)]^\circ$.

Démonstration. Fixons $A \in E$. Alors l'application $N_A : E_A \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto AM$ définit une norme sur l'espace vectoriel E_A. Or les espaces vectoriels normés de dimension finie vérifient justement les propriétés listées ci-dessus. ✓

Ensuite, la question de la continuité des applications affines se pose naturellement. La réponse est à la fois simple et fondamentale (la preuve est similaire à celle de la proposition précédente) :

Théorème 2.12. *Toute application affine entre deux espaces euclidiens est lipschitzienne, donc (uniformément) continue.*

Corollaire 2.13. *Les espaces affines E et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Il suffit de se rappeler que E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ via une carte affine quelconque, et d'appliquer le théorème précédent. ✓

Pour finir, donnons quelques propriétés topologiques des demi-espaces qui justifient a posteriori le vocabulaire déjà introduit (voir définition 7.16 du chapitre I).

Proposition 2.14. *Soit H un hyperplan de E, et soient H_+, H_- (resp. H'_+, H'_-) les demi-espaces « ouverts » (resp. « fermés ») qu'il délimite. Alors H_+, H_- (resp. H'_+, H'_-) sont des ouverts (resp. des fermés) de E.*

Démonstration. Cela résulte du fait que H_+, H_- (resp. H'_+, H'_-) sont par définition des images réciproques d'ouverts (resp. de fermés) par une application affine, donc par une application continue (d'après le théorème 2.12). ✓

Remarque 2.15. On peut démontrer également que $H'_\pm$ est l'adhérence de $H_\pm$ dans E, que $H_\pm$ est l'intérieur de $H'_\pm$, et que H est la frontière (commune) de ces quatre demi-espaces.

3 Sphères

Dans le paragraphe précédent, on a parlé de boules dans l'espace métrique E. On peut donc aussi considérer des sphères.

Notation 3.1. Si $A \in E$ et $r \geq 0$, on notera $S(A, r)$ la **sphère de centre A et de rayon r**, i.e. l'ensemble $\{M \in E : AM = r\}$. C'est donc la frontière commune des boules ouverte $B(A, r)$ et fermée $B'(A, r)$. En dimension 2, on dira **cercle** plutôt que sphère.

Les sphères se caractérisent facilement par des équations cartésiennes dans des repères orthonormés :

Proposition 3.2. *On munit E d'un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$.*

1) *Soit $A = (a_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{R}$, et soit $r \geq 0$. Alors*

$$S(A, r) = \{M = (x_i)_{i=1}^n \text{ dans } \mathcal{R} : \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 - r^2 = 0\}.$$

L'équation ci-dessus s'appelle **équation cartésienne de $S(A, r)$ dans le repère $\mathcal{R}$**.

2) *Réciproquement, soient $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, et soit*

$$X = \{M = (x_i)_{i=1}^n \text{ dans } \mathcal{R} : \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i x_i + b = 0\}.$$

a) *Si $\sum_{i=1}^n a_i^2 - b < 0$, alors $X = \varnothing$;*

b) *si $\sum_{i=1}^n a_i^2 - b \geq 0$, alors $X = S(A, r)$, où $A = (a_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{R}$ et $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 - b}$.*

Démonstration. C'est facile, il suffit d'écrire :

$$M \in S(A, r) \Leftrightarrow AM^2 = r^2 \Leftrightarrow \sum (x_i - a_i)^2 = r^2.$$

(On a utilisé la proposition 2.9.) ✓

Remarque 3.3. Comme dans le cas des sous-espaces affines, on voit qu'une équation cartésienne de sphère est définie à un facteur multiplicatif (non nul) près.

Voici un grand classique de la géométrie euclidienne.

Théorème 3.4 (théorème de l'angle droit). *Soient A, B deux points distincts de E et soit I leur milieu. L'ensemble des points M de E qui vérifient $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ n'est autre que la sphère de centre I et de rayon $IA = IB = \frac{AB}{2}$. On l'appelle la* **sphère de diamètre $[AB]$**.

Démonstration. Pour tout $M \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} | \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 + 2(\overrightarrow{MI} | \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}) + (\overrightarrow{IA} | \overrightarrow{IB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow IM = IA,
\end{aligned}$$

cqfd. ✓

4 Orthogonalité et perpendicularité des sous-espaces

4.1 Orthogonalité

Définitions 4.1. Soient F et G deux sous-espaces affines de E.

1) On dit que F et G sont **orthogonaux** si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ le sont, i.e. si $\vec{G} \subset \vec{F}^{\perp}$ (ou encore, si $\vec{F} \subset \vec{G}^{\perp}$). On note alors $F \perp G$ ou $G \perp F$ (puisque la relation d'orthogonalité est symétrique).

2) On dit que F et G sont **supplémentaires orthogonaux** si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ le sont, i.e. si $\vec{G} = \vec{F}^{\perp}$ (ou encore, si $\vec{F} = \vec{G}^{\perp}$). Bien entendu, cela revient aussi à dire que F et G sont supplémentaires et orthogonaux !

La notion d'orthogonalité permet de rappeler au passage un vocabulaire très classique.

Définitions 4.2.

1) On dit qu'un **triangle** non aplati ABC de E est **rectangle en** A si $(AB) \perp (AC)$, i.e. si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2) On dit qu'un parallélogramme non aplati $ABCD$ de E est

a) un **rectangle** si $(AB) \perp (AD)$;

b) un **losange** si $(AC) \perp (BD)$;

c) un **carré** s'il est à la fois un rectangle et un losange.

Bien entendu, on peut caractériser ces configurations remarquables de diverses manières, dont la plupart seront vues en T.D.

Étudions maintenant l'incidence des sous-espaces orthogonaux.

Proposition 4.3. *Soient F et G deux sous-espaces de E.*

1) *Si F et G sont orthogonaux, $F \cap G$ est soit vide, soit un singleton.*

2) *Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, $F \cap G$ est un singleton.*

Démonstration. 1) Si $F \perp G$, alors $\vec{F} \perp \vec{G}$, donc $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$ (cf. paragraphe 1). Par suite, si $F \cap G$ n'est pas vide, c'est un sous-espace de dimension 0, c'est-à-dire un singleton.

2) L'hypothèse de supplémentarité suffit à garantir le résultat, comme on le sait déjà (cf. corollaire 4.28 du chapitre I). ✓

Exemple 4.4. Une droite D et un hyperplan H orthogonaux sont automatiquement supplémentaires (car $\vec{D} \cap \vec{H} = \{\vec{0}\}$ et $\dim \vec{D} + \dim \vec{H} = \dim \vec{E}$), donc sécants en un point.

Dans le cadre vectoriel, un sous-espace $\vec{F}$ n'admet qu'un seul supplémentaire orthogonal, qu'on appelle **le** supplémentaire orthogonal de $\vec{F}$ (c'est $\vec{F}^{\perp}$). Ce n'est plus vrai dans le cadre affine :

Proposition 4.5. *Soient F un sous-espace de E et A un point de E. Il existe un unique supplémentaire orthogonal de F passant par A : c'est le sous-espace $G = A + \vec{F}^{\perp}$.*

Démonstration. C'est évident. ✓

Ainsi, un sous-espace (non réduit à un point) possède une infinité de supplémentaires orthogonaux.

Exemple 4.6. Dans un triangle ABC d'un plan affine, l'unique droite passant par A et orthogonale à (BC) s'appelle la **hauteur issue de** A. Son unique point d'intersection avec (BC) est son **pied**. (On définit de même les hauteurs issues de B et de C.)

4.2 Les trois notions de perpendicularité

Définitions 4.7.

1) **Deux droites** sont dites **perpendiculaires** si elles sont orthogonales et sécantes (en un point).

2) **Une droite et un hyperplan** sont dits **perpendiculaires** s'ils sont orthogonaux (et donc automatiquement sécants en un point d'après l'exemple 4.4).

3) **Deux hyperplans** H_1 et H_2 sont dits **perpendiculaires** si $\overrightarrow{H_1}^{\perp} \perp \overrightarrow{H_2}^{\perp}$, c'est-à-dire si tout vecteur normal à H_1 est orthogonal à tout vecteur normal de H_2 (un **vecteur normal à un hyperplan** H est un vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{H}^{\perp}$).

Avant de commenter ces définitions, observons la :

Proposition 4.8. *Deux hyperplans perpendiculaires sont sécants, selon un sous-espace de dimension $n-2$.*

Démonstration. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans perpendiculaires; on a $\overrightarrow{H_1}^{\perp} \perp \overrightarrow{H_2}^{\perp}$, donc $\overrightarrow{H_1}^{\perp} \subset \overrightarrow{H_2}^{\perp\perp} = \overrightarrow{H_2}$. Comme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H_1} \oplus \overrightarrow{H_1}^{\perp}$, on obtient que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H_1} + \overrightarrow{H_2}$ (somme non directe en général). D'après le corollaire 4.28 du chapitre I, cela implique $\mathrm{Aff}(H_1 \cup H_2) = E$ et $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$. Mais le théorème d'incidence (théorème 4.25, chapitre I) donne alors

$$\dim E = \dim \mathrm{Aff}(H_1 \cup H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2),$$

d'où $\dim(H_1 \cap H_2) = 2(n-1) - n = n-2$. ✓

Remarque 4.9. Les deux premières définitions de la perpendicularité sont en fait les deux mêmes (« perpendiculaires = orthogonaux + sécants »).
Par ailleurs, en dimension 2, les trois définitions précédentes de la perpendicularité coïncident. En particulier, pour deux droites d'un plan affine, « orthogonales » est synonyme de « perpendiculaires ».
En revanche, en dimension ≥ 3, deux hyperplans ne peuvent jamais être orthogonaux (puisque leurs directions seraient en somme directe donc vivraient dans un espace de dimension $\geq 2n-2 > n$), et a fortiori on ne peut pas dire que deux hyperplans sont perpendiculaires si et seulement s'ils sont sécants et orthogonaux. Cet exemple illustre la différence des notions introduites.
En réalité, il n'existe aucune définition de la perpendicularité qui englobe simultanément les trois définitions précédentes (et qui réponde donc aux conventions habituelles) en toute dimension.

Revenons un instant à la notion de vecteur normal à un hyperplan, avec la très utile :

Proposition 4.10. *Soient $\mathcal{R}$ un repère orthonormé de E, de base associée $\mathcal{B}$, H un hyperplan et $\vec{n}$ un vecteur non nul, de composantes $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors $\vec{n}$ est normal à H si et seulement s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que H soit d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$ dans $\mathcal{R}$.*

Démonstration. D'après l'exercice 34 du chapitre I, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que H soit d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$ dans $\mathcal{R}$ si et seulement si $\overrightarrow{H}$ est d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ dans $\mathcal{B}$. Or un vecteur $\vec{x} \in \overrightarrow{E}$ vérifie cette équation si et seulement si $(\vec{x}|\vec{n}) = 0$. On en déduit que l'assertion précédente équivaut encore à $\overrightarrow{H} = \vec{n}^{\perp}$, d'où le résultat. ✓

4.3 Hyperplan médiateur d'un segment

Voici une notion simple et pourtant très importante pour la suite.

Proposition 4.11. *Soient A, B deux points distincts de E et soit I le milieu de $[AB]$. Il existe un unique hyperplan H de E passant par I et perpendiculaire à la droite (AB), à savoir $H = I + \overrightarrow{AB}^{\perp}$. On l'appelle* **hyperplan médiateur du segment** $[AB]$*. En dimension 2, on dira plutôt* **médiatrice du segment** $[AB]$*. (En dimension 1, $H = \{I\}$.)*

Démonstration. L'hyperplan H en question n'est autre que l'unique supplémentaire orthogonal de (AB) passant par I (cf. proposition 4.5), puisque par définition « perpendiculaires » signifie « orthogonaux » pour une droite et un hyperplan. ✓

Voici deux caractérisations des hyperplans médiateurs, dont l'une est purement métrique.

Théorème 4.12. *Soient $[AB]$ un segment (avec $A \neq B$), I son milieu et H son hyperplan médiateur. Alors*
$$H = \{M \in E : \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}\} = \{M \in E : MA = MB\}.$$

Démonstration. Soit $M \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
MA = MB &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} | \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} | \overrightarrow{BA}) = 0 \quad (\text{puisque } \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{AB}^{\perp} \\
&\Leftrightarrow M \in I + \overrightarrow{AB}^{\perp} = H,
\end{aligned}$$

cqfd. ✓

Dans le même genre d'idées, on obtient ceci :

Théorème 4.13. *Soit H l'hyperplan médiateur d'un segment $[AB]$, et soit H_A (resp. H'_A) le demi-espace ouvert (resp. fermé) délimité par H et contenant A. Alors*

$$H_A = \{M \in E : MA < MB\} \quad \text{et} \quad H'_A = \{M \in E : MA \leq MB\}.$$

Démonstration. Définissons une application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(M) = MA^2 - MB^2$. D'après le théorème précédent $H = \varphi^{-1}(0)$, et il suffit donc de démontrer que φ est une forme affine non constante sur E. En effet, on aura alors $H_A = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ (car H_A est le demi-espace ouvert contenant A et $\varphi(A) < 0$), et de même $H'_A = \varphi^{-1}(]-\infty, 0])$, cqfd.

Observons que, pour tout $M \in E$, $\varphi(M) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} | \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} | \overrightarrow{BA})$. Par suite, pour tous $M, N \in E$,

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \varphi(N) - \varphi(M) = (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} | \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{MN} | \overrightarrow{AB}) = \sigma(\overrightarrow{MN}),$$

où l'on a posé $\sigma : \vec{E} \to \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto 2(\vec{x} | \overrightarrow{AB})$. Comme σ est clairement linéaire, on en déduit que φ est affine. Enfin, $\varphi(A) < 0$ et $\varphi(B) > 0$, ce qui assure que φ n'est pas constante. ✓

5 Projections, affinités et symétries orthogonales

On reprend les notations du chapitre II en ce qui concerne les barycentres d'applications affines.

Définitions 5.1. Soit F un sous-espace de E.

1) On appelle **projection orthogonale d'axe F** la projection sur F parallèlement à $\vec{F}^{\perp}$. On la notera p_F.

2) Le même vocabulaire s'applique aux affinités $a_{F,\lambda} = \lambda\,\mathrm{id}_E + (1-\lambda)p_F$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ associées à p_F, et en particulier à la symétrie $s_F = a_{F,-1} = 2p_F - \mathrm{id}_E$. On a donc $s_F(M) = M + 2\overrightarrow{Mp_F(M)}$ pour tout $M \in E$.

3) Une symétrie orthogonale d'axe un hyperplan s'appelle une **réflexion**.

Remarques 5.2.

1) La partie linéaire d'une projection (resp. affinité, symétrie) orthogonale affine est une projection (resp. affinité, symétrie) orthogonale vectorielle.

2) Une homothétie est une affinité orthogonale. En particulier, une symétrie centrale est une symétrie orthogonale.

Une projection orthogonale sur une droite ou un hyperplan possède une expression relativement simple.

Proposition 5.3.

1) *Soit $\Delta = A + \mathbb{R}\vec{u}$ une droite de E. Pour tout $M \in E$, on a $p_\Delta(M) = A + \frac{(\overrightarrow{AM}|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.*

2) *Soit $H = A + \vec{H}$ un hyperplan de E, et soit $\vec{n}$ un vecteur normal à H. Pour tout $M \in E$, $p_H(M) = M + \frac{(\overrightarrow{MA}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.*

Démonstration. 1) Soit $\vec{x} \in \vec{E}$, et soit $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} = \lambda\vec{u} + \vec{z}$ sa décomposition dans $\vec{\Delta} \oplus \vec{\Delta}^{\perp}$. Alors $(\vec{x}|\vec{u}) = \lambda\|\vec{u}\|^2$, donc $\vec{x} = \frac{(\vec{x}|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \vec{z}$. Ceci démontre que

$$\forall \vec{x} \in \vec{E},\ p_{\vec{\Delta}}(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Comme $A \in \Delta = \mathrm{Inv}(p_\Delta)$, on en déduit :

$$\forall M \in E,\ p_\Delta(M) = p_\Delta(A) + p_{\vec{\Delta}}(\overrightarrow{AM}) = A + \frac{(\overrightarrow{AM}|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

2) Observons que $p_{\vec{H}} + p_{\vec{H}^{\perp}} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$ (car $\vec{H}$ et $\vec{H}^{\perp}$ sont supplémentaires). Comme $\vec{H}^{\perp} = \mathbb{R}\vec{n}$, la preuve de 1) donne

$$\forall \vec{x} \in \vec{E},\ p_{\vec{H}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n},$$

et donc

$$\forall M \in E,\ p_H(M) = p_H(A) + p_{\vec{H}}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} - \frac{(\overrightarrow{AM}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = M + \frac{(\overrightarrow{MA}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n},$$

cqfd. ✓

Proposition 5.4. *Soient F et G deux sous-espaces parallèles de E. Il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ tel que $\vec{u} \in \vec{F}^{\perp}$ et $G = F + \vec{u}$, et on a $s_G \circ s_F = t_{2\vec{u}}$.*

Démonstration. C'est un cas particulier du résultat de l'exercice 7 du chapitre II. ✓

Proposition 5.5. *Soient A, B deux points distincts de E. Il existe une unique réflexion échangeant A et B : celle dont l'axe est l'hyperplan médiateur de $[AB]$.*

Démonstration. Commençons tout d'abord par le :

Lemme 5.6. *Soient D une droite et H un hyperplan perpendiculaires en I. Alors l'image de la droite D par la projection orthogonale p_H est réduite au point I.*

La preuve du lemme est immédiate : pour tout $M \in D$, on a en effet

$$\{p_H(M)\} = H \cap (M + \vec{H}^{\perp}) = H \cap (M + \vec{D}) = H \cap D = \{I\}.$$

Maintenant, soit s la réflexion d'axe l'hyperplan médiateur H de $[AB]$. Alors

$$\begin{aligned} s(A) &= A + 2\overrightarrow{Ap_H(A)} \quad \text{d'après la proposition 5.6 du chapitre II} \\ &= A + 2\overrightarrow{AI} \quad \text{d'après le lemme} \\ &= B. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons qu'une réflexion s d'axe un hyperplan H vérifie $s(A) = B$. Comme

$$H = \mathrm{Inv}(s) = \{\tfrac{M+s(M)}{2},\ M \in E\}$$

(il s'agit toujours de la proposition 5.6 du chapitre II), H contient en particulier $\frac{A+s(A)}{2} = \frac{A+B}{2} = I$. Par ailleurs, on a aussi $\overrightarrow{As(A)} \in \vec{H}^{\perp}$ (même référence), donc $\overrightarrow{AB} \in \vec{H}^{\perp}$, ou encore $\vec{H} \subset \overrightarrow{AB}^{\perp}$. Comme $A \neq B$, $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ est un hyperplan, et il s'ensuit que $\vec{H} = \overrightarrow{AB}^{\perp}$.

Finalement, on a obtenu $H = I + \overrightarrow{AB}^{\perp}$: H est bien l'hyperplan médiateur de $[AB]$. ✓

6 Distance d'un point à un sous-espace

Définition 6.1. Si A est un point et F est un sous-espace de E, on appelle **distance de A à F** le réel $d(A, F) = \inf_{M \in F} AM$.

Théorème 6.2. *Si A est un point et F est un sous-espace de E, la distance $d(A, F)$ est atteinte en un unique point de F qui n'est autre que le projeté orthogonal $p_F(A)$ de A sur F. Autrement dit, $p_F(A)$ est le point de F qui est le plus proche de A, et cette propriété le caractérise.*

Démonstration. Notons $A' = p_F(A)$, et soit $M \in F$. Comme $\overrightarrow{A'M} \in \vec{F}$ et $\overrightarrow{AA'} \in \vec{F}^{\perp}$, le théorème de Pythagore s'applique : $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geq AA'^2$, avec égalité si et seulement si $M = A'$. ✓

On peut donner des formules explicites pour le calcul de la distance d'un point à un sous-espace lorsqu'on prend des coordonnées cartésiennes. Nous nous contenterons du cas où F est un hyperplan :

Proposition 6.3.

1) *Soient $A \in E$ et H un hyperplan. On note A' le projeté orthogonal de A sur H. Pour tout vecteur normal $\vec{n}$ à H, on a*

$$d(A, H) = \frac{|(\overrightarrow{AA'}|\vec{n})|}{\|\vec{n}\|}.$$

2) *Supposons E muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Dans ce repère, soient $(a_i)_{i=1}^n$ les coordonnées de A, et soit $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta = 0$ une équation cartésienne de H. Alors*

$$d(A, H) = \frac{|\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}}.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, nous avons $d(A, H) = AA'$, où $A' = p_H(A)$. Or, d'après la proposition 5.3, pour tout vecteur normal $\vec{n}$ à H, on a

$$\forall M \in E,\ p_H(M) = M + \frac{(\overrightarrow{MA'}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

En particulier :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{(\overrightarrow{AA'}|\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n},$$

si bien que

$$d(A, H) = AA' = \frac{|(\overrightarrow{AA'}|\vec{n})|}{\|\vec{n}\|}.$$

D'autre part, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)$ désigne la b.o.n. associée à $\mathcal{R}$, posons $\vec{n} = \sum \alpha_i \vec{e}_i$. D'après la proposition 4.10, $\vec{n}$ est bien un vecteur normal à H. Si (a'_i) sont les coordonnées de A' dans $\mathcal{R}$, on a

$$(\overrightarrow{AA'}|\vec{n}) = \sum (a'_i - a_i)\alpha_i = -\beta - \sum \alpha_i a_i \quad \text{car } A' \in H.$$

En appliquant la formule obtenue plus haut, on obtient finalement :

$$d(A, H) = \frac{|\sum \alpha_i a_i + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}},$$

cqfd. ✓

La distance d'un point à un sous-espace intervient notamment dans l'étude de l'incidence d'une sphère et d'un sous-espace :

Proposition 6.4. *Soient $S = S(A, r)$ une sphère non réduite à un point et F un sous-espace de E. L'ensemble $S' = S \cap F$ est soit vide, soit une sphère de F, de centre $A' = p_F(A)$ et de rayon $r' = \sqrt{r^2 - AA'^2} = \sqrt{r^2 - d(A, F)^2}$.*
Si $r' = 0$, c'est-à-dire si $S' = \{A'\}$, on dit que S et F sont **tangents en** A'.

Démonstration. Notons $A' = p_F(A)$. Si $M \in F$, on a $\overrightarrow{A'M} \in \vec{F}$ et $\overrightarrow{AA'} \in \vec{F}^\perp$, donc le théorème de Pythagore s'applique : $MA^2 = MA'^2 + A'A^2$. Par suite,

$$M \in S(A, r) \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} M \in F \\ MA^2 = MA'^2 + A'A^2 \\ AM^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in F \\ A'M^2 = r^2 - A'A^2 \end{cases}$$

d'où :

$$S(A,r)\cap F=\begin{cases}\varnothing & \text{si } r^2-A'A^2<0,\\ S(A',\sqrt{r^2-A'A^2})\subset F & \text{si } r^2-A'A^2\geq 0,\end{cases}$$

cqfd. ✓

7 Ellipses

Définitions 7.1. Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé d'un plan affine euclidien E. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$. L'ensemble

$$\mathcal{E}=\{M=(x,y)\in E:\left(\tfrac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\tfrac{y-\beta}{b}\right)^2=1\}$$

s'appelle **ellipse** de **centre** $\Omega=(\alpha,\beta)$, de **paramètres** a et b, de **sommets** $A=(\alpha+a,\beta)$, $A'=(\alpha-a,\beta)$, $B=(\alpha,\beta+b)$ et $B'=(\alpha,\beta-b)$. Si par exemple $a\geq b$, on dira aussi que $[AA']$ est le **grand axe** de $\mathcal{E}$, que $[BB']$ est son **petit axe**, que le cercle $\mathcal{C}(\Omega,a)$ est le **cercle principal** de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{C}(\Omega,b)$ est son **cercle secondaire**.
Enfin, l'équation qui définit $\mathcal{E}$ est son **équation cartésienne** dans $\mathcal{R}$.

Remarques 7.2.

1) Si $a=b$, $\mathcal{E}$ est le cercle de centre Ω et de rayon a.

2) Si l'on translate l'origine du repère $\mathcal{R}$ en le centre Ω de l'ellipse, celle-ci possède une équation cartésienne plus simple, à savoir : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3) Il existe d'autres définitions des ellipses, notamment plus géométriques.

Le tracé d'une ellipse n'a rien d'évident avec la définition donnée ici. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème 7.3.

1) *L'image d'un cercle (non trivial) par une affinité orthogonale (de rapport non nul) est une ellipse.*

2) *Réciproquement, toute ellipse est l'image de son cercle principal (resp. de son cercle secondaire) par une affinité orthogonale.*

Démonstration. 1) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r>0$, et soit f une affinité orthogonale d'axe D et de rapport $\lambda\neq 0$. Plaçons-nous dans un r.o.n. $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$, où $O=p_D(\Omega)$ et $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dirigeant D. Comme $f(O)=O$ (car $O\in D=\mathrm{Inv}(f)$) et

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{f})=\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix},$$

l'expression analytique de f dans $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\begin{cases}X=x\\ Y=\lambda y\end{cases}$$

si $M=(x,y)$ et $f(M)=(X,Y)$. Notant $(0,\omega)$ les coordonnées de Ω dans $\mathcal{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{C}&\Leftrightarrow x^2+(y-\omega)^2=r^2\\ &\Leftrightarrow X^2+\left(\frac{Y-\lambda\omega}{\lambda}\right)^2=r^2\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{X}{r}\right)^2+\left(\frac{Y-\lambda\omega}{\lambda r}\right)^2=1\\ &\Leftrightarrow f(M)\in\mathcal{E},\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ellipse de centre $\Omega' = (0, \lambda\omega)$ et de paramètres r et λr.

2) Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ une ellipse : il existe un r.o.n. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de E et des réels non nuls a, b tels que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

soit l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$ (le point O est donc le centre de $\mathcal{E}$). Soit alors $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon a, c'est-à-dire le cercle principal ou secondaire de $\mathcal{E}$, selon que $a \geq b$ ou $a \leq b$; il est d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = a^2$ dans $\mathcal{R}$. Notons f_1 l'affinité orthogonale d'axe $D_1 = (Ox) = O + \mathbb{R}\vec{i}$ et de rapport $\frac{b}{a}$. En utilisant la preuve de 1), on voit facilement que $f_1(\mathcal{C}_1) = \mathcal{E}$. De même, si $\mathcal{C}_2$ désigne le cercle de O et de rayon b et si f_2 est l'affinité orthogonale d'axe $D_2 = (Oy) = O + \mathbb{R}\vec{j}$ et de rapport $\frac{a}{b}$, alors on trouve que $f_2(\mathcal{C}_2) = \mathcal{E}$. ✓

Corollaire 7.4. *On peut dessiner une ellipse à la règle et au compas.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un r.o.n. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de E. Reprenons les notations de la preuve du 2) du théorème précédent. Si $M \in \mathcal{E}$, notons également $M_1 = f_1^{-1}(M)$ et $M_2 = f_2^{-1}(M)$. Faisons deux petites observations.

Lemme 7.5. *Pour tout $M \in E$, les points O, M_1, M_2 sont alignés.*

Démonstration. Si $M = (x, y)$ dans $\mathcal{R}$, la preuve du 1) du théorème montre que $M_1 = (x, \frac{a}{b}y)$ et $M_2 = (\frac{b}{a}x, y)$. On en déduit que $\overrightarrow{OM_2} = \frac{b}{a}\overrightarrow{OM_1}$, cqfd. ✓

Lemme 7.6. *Le point M est situé sur la parallèle à (Oy) (resp. à (Ox)) passant par M_1 (resp. par M_2).*

Démonstration. Par définition, M est l'image de M_1 par l'affinité orthogonale f_1. D'après la proposition 5.3 du chapitre II on a donc $\overrightarrow{M_1M} \in \mathbb{R}\vec{j}$ puisque $\mathbb{R}\vec{j}$ est la direction de f_1. L'autre assertion se prouve de même. ✓

Nous pouvons maintenant expliquer le tracé de l'ellipse $\mathcal{E}$. On choisit un point $M_1 \in \mathcal{C}_1$; la droite (OM_1) coupe $\mathcal{C}_2$ en un point M_2. Des lemmes précédents on déduit que l'image M de M_1 par f_1 est situé à l'intersection de la parallèle à (Oy) passant par M_1 et de la parallèle à (Ox) passant par M_2, et on sait tracer ces droites à la règle et au compas (cf. exercice 3). Comme f_1 est une bijection de $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{E}$, en faisant varier M_1 sur $\mathcal{C}_1$ on obtient ainsi toute l'ellipse $\mathcal{E}$. ✓

Dans le même genre d'idée, nous avons le :

Corollaire 7.7. *On peut tracer (à la règle et au compas) la tangente en un point d'une ellipse.*

Ici, nous appelons tangente à une ellipse toute droite la coupant en un et un seul point.

Démonstration. Conservons les notations du corollaire précédent. Soit Δ_{M_1} (resp. Δ_M) la tangente à $\mathcal{C}_1$ en M_1 (resp. à $\mathcal{E}$ en $M = f_1(M_1)$). Comme f_1 est une bijection affine, $f_1(\Delta_{M_1})$ est une droite passant par $M = f_1(M_1)$ et on a aussi $f_1(\Delta_{M_1}) \cap \mathcal{E} = f_1(\Delta_{M_1} \cap \mathcal{C}_1) = f_1(M_1) = M$. Par conséquent, $f_1(\Delta_{M_1})$ est la tangente à $\mathcal{E}$ en M, i.e. $f_1(\Delta_{M_1}) = \Delta_M$. Distinguons alors deux cas.

1) Si $\Delta_{M_1} \not\parallel (Ox)$, i.e. si $M_1 \notin (Oy)$, alors $\Delta_{M_1} \cap (Ox)$ est un singleton $\{T\}$. Or on sait tracer Δ_{M_1} (c'est la perpendiculaire à (OM_1) passant par M_1, cf. exercice 2), donc on sait placer T. Comme $T \in (Ox) = \mathrm{Inv}(f_1)$, on a $f_1(T) = T$, si bien que $\Delta_M = f_1(\Delta_{M_1}) = f_1((M_1T)) = (MT)$ (si $M_1 = T$ alors $M = T = M_1$ et $\Delta_M = \Delta_{M_1}$ (droite verticale passant par $M_1 = M$)).

2) Si $\Delta_{M_1} \parallel (Ox)$, alors $\vec{f_1}(\overrightarrow{\Delta_{M_1}}) = \vec{f_1}(\mathbb{R}\vec{i}) = \mathbb{R}\vec{i} = \overrightarrow{\Delta_{M_1}}$ (car $(Ox) = \mathrm{Inv}(f_1)$), donc $\Delta_M = f_1(\Delta_{M_1})$ est la parallèle à Δ_{M_1} passant par M. On sait donc aussi la tracer (voir exercice 3). ✓

Les ellipses apparaissent naturellement en dimension 3 aussi :

Théorème 7.8. *Soient P et Q deux plans d'un espace affine de dimension 3. La projection orthogonale sur Q d'un cercle $\mathcal{C}$ de P est :*

1) *un segment si P et Q sont perpendiculaires;*
2) *un cercle de même rayon que $\mathcal{C}$ si P et Q sont parallèles;*
3) *une ellipse qui n'est pas un cercle sinon.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cercle inclus dans P, de centre Ω et de rayon $r > 0$. On note p la projection orthogonale sur Q et $O = p(\Omega)$.

1) Supposons $P \perp Q$. Alors il existe un r.o.n. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E tel que $P = O + \mathrm{Vect}(\vec{j}, \vec{k})$ et $Q = O + \mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$. Autrement dit, P est d'équation $x = 0$ et Q est d'équation $z = 0$ dans $\mathcal{R}$. Observons que Ω s'écrit $(0, 0, \omega)$ dans $\mathcal{R}$, car $\overrightarrow{O\Omega} \in \overrightarrow{Q}^{\perp} = \mathbb{R}\vec{k}$. Pour tout $M = (x, y, z)$ de E on a donc :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in P \\ M \in S(\Omega, r) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - \omega)^2 = r^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + (z - \omega)^2 = r^2. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'expression analytique de p dans $\mathcal{R}$ est clairement

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = 0. \end{cases}$$

Par suite,

$$M = (x, y, z) \in \mathcal{C} \Rightarrow p(M) = (0, y, 0), \quad \text{avec } |y| \leq r.$$

Ceci démontre que $p(\mathcal{C}) \subset [O - r\vec{j}, O + r\vec{j}]$.

Réciproquement, si $M' = (0, y, 0)$ avec $|y| \leq r$, posons $M = (0, y, z)$ avec $z = \omega + \sqrt{r^2 - y^2}$. Ce qui précède prouve que $M \in \mathcal{C}$. Comme on a clairement $p(M) = M'$, on a bien obtenu $[O - r\vec{j}, O + r\vec{j}] \subset p(\mathcal{C})$, d'où l'égalité.

2) Supposons cette fois P et Q parallèles. Rappelons qu'il existe alors un (unique) $\vec{u} \in \overrightarrow{P}^{\perp} = \overrightarrow{Q}^{\perp}$ tel que $Q = P + \vec{u}$ (cf. proposition 5.4). On en déduit que pour tout $M \in P$, le point $M + \vec{u}$ est dans $Q \cap (M + \mathbb{R}\vec{u})$. Mais cette intersection est par définition réduite à $p(M)$, donc $p(M) = M + \vec{u}$ pour tout $M \in P$, i.e. p coïncide avec la translation $t_{\vec{u}}$ sur P. En particulier, $p(\mathcal{C}) = t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon r en vertu d'un résultat ultérieur (cf. corollaire 8.10).

3) Supposons enfin que P et Q ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires. Dans ce cas, il existe tout de même un r.o.n. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E tel que $Q = O + \mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ (donc Q est d'équation $z = 0$) et $\vec{j} \in \overrightarrow{P}$. Cherchons une équation cartésienne de P.

Comme $\vec{j} \in \overrightarrow{P}$, une équation cartésienne de $\overrightarrow{P}$ dans la base associée à $\mathcal{R}$ est du type $\alpha x + \beta z = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, si bien que P est d'équation $\alpha x + \beta z + \gamma = 0$ dans $\mathcal{R}$, pour un $\gamma \in \mathbb{R}$. Notons $(0, 0, \omega)$ les composantes de Ω dans $\mathcal{R}$ (cf. cas 1). Comme $\Omega \in P$, on a $\gamma = -\beta\omega$, donc P est d'équation $\alpha x + \beta(z - \omega) = 0$. Observons que $\beta \neq 0$, sinon P serait d'équation $x = 0$, donc perpendiculaire à Q. D'autre part, $p : M = (x, y, z) \mapsto M' = (x, y, 0)$, de sorte que

$$p(\mathcal{C}) = \{M' = (x, y, 0) \in Q : \exists z \in \mathbb{R} : M = (x, y, z) \in \mathcal{C}\}.$$

Or on a, pour tout $M = (x, y, z) \in E$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow M \in P \cap S(\Omega, r) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta(z-\omega) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-\omega)^2 = r^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta(z-\omega) = 0 \\ x^2 + y^2 + (\frac{-\alpha x}{\beta})^2 = r^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta(z-\omega) = 0 \\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2} x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta(z-\omega) = 0 \\ \frac{x^2}{\frac{r^2(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}} + \frac{y^2}{r^2} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci démontre donc que $p(\mathcal{C})$ est une ellipse de Q. En outre $\alpha \neq 0$ (sinon P serait d'équation $z = \omega$, donc parallèle à Q) si bien que cette ellipse ne peut être un cercle. ✓

8 Isométries et similitudes (première étude)

Soit f un endomorphisme affine d'un espace euclidien E. Il est naturel de se demander si f préserve les notions typiquement euclidiennes, à savoir :

1) la distance : a-t-on $f(A)f(B) = AB$ pour tous $A, B \in E$?
2) le produit scalaire : a-t-on $(\overrightarrow{f(A)f(B)} | \overrightarrow{f(C)f(D)}) = (\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{CD})$ pour tous $A, B, C, D \in E$?
3) l'orthogonalité des sous-espaces : a-t-on $F \perp G \Rightarrow f(F) \perp f(G)$?
4) la perpendicularité des sous-espaces : a-t-on F, G perpendiculaires $\Rightarrow f(F), f(G)$ perpendiculaires ?

Déterminer toutes les f satisfaisant l'une de ces conditions est un programme trop ambitieux pour le moment : il sera développé dans les chapitres ultérieurs. Nous nous contenterons ici d'examiner le cas de certaines applications affines bien connues.

Commençons tout de même par une série de résultats généraux.

Lemme 8.1. *Pour $f \in A(E)$ et $k > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f multiplie la distance par k ;*
(ii) *$\vec{f}$ multiplie la norme par k ;*
(iii) *f multiplie le produit scalaire par k^2 ;*
(iv) *$\vec{f}$ multiplie le produit scalaire par k^2.*

Démonstration. Puisque f est affine, rappelons que $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$ pour tous $M, N \in E$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall M, N \in E,\ f(M)f(N) = kMN &\Leftrightarrow \forall M, N \in E,\ \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\| \\ &\Leftrightarrow \forall M, N \in E,\ \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\| = k\|\overrightarrow{MN}\| \\ &\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \vec{E},\ \|\vec{f}(\vec{x})\| = k\|\vec{x}\|, \end{aligned}$$

ce qui donne (i) $\Leftrightarrow$ (ii), et de même

$$\begin{aligned} &\forall A, B, C, D \in E,\ (\overrightarrow{f(A)f(B)} | \overrightarrow{f(C)f(D)}) = k^2 (\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{CD}) \\ \Leftrightarrow &\forall A, B, C, D \in E,\ (\vec{f}(\overrightarrow{AB}) | \vec{f}(\overrightarrow{CD})) = k^2 (\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{CD}) \\ \Leftrightarrow &\forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E},\ (\vec{f}(\vec{x}) | \vec{f}(\vec{y})) = k^2 (\vec{x} | \vec{y}) \end{aligned}$$

fournit (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). L'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) est immédiate. Enfin, observons que si (ii) est vraie, on a pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$:

$$\begin{aligned}(\vec{f}(\vec{x})|\vec{f}(\vec{y})) &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y})\|^2 - \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\|^2\right) \quad \text{(cf. proposition 1.2)}\\ &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|\vec{f}(\vec{x} - \vec{y})\|^2\right)\\ &= \frac{k^2}{4}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\right)\\ &= k^2\,(\vec{x}|\vec{y}),\end{aligned}$$

de sorte que (iv) est vérifiée aussi. ✓

Définitions 8.2. Une application (ensembliste) de E dans E multipliant la distance par un réel $k > 0$ s'appelle une **similitude de rapport k**. Une similitude de rapport 1 s'appelle une **isométrie**.

Observons que dans ces définitions nous ne supposons pas a priori que l'application en question est affine. En réalité, nous verrons ultérieurement que cette condition est automatique (cf. théorème 1.3 du chapitre VII).

Lemme 8.3. *Pour $f \in A(E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f conserve l'orthogonalité des sous-espaces affines;*

(ii) *$\vec{f}$ conserve l'orthogonalité des sous-espaces vectoriels;*

(iii) *f conserve l'orthogonalité des vecteurs, i.e. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} \perp \overrightarrow{f(C)f(D)}$ pour tous $A, B, C, D \in E$;*

(iv) *$\vec{f}$ conserve l'orthogonalité des vecteurs, i.e. $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \perp \vec{f}(\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dira simplement que f **conserve l'orthogonalité**.

Démonstration. Tout d'abord, observons que l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) découle directement du lemme précédent, et que l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) sont évidentes. Maintenant, si (ii) est vraie, alors $\vec{f}$ conserve en particulier l'orthogonalité des droites vectorielles, et comme on a $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \mathbb{R}\vec{x} \perp \mathbb{R}\vec{y}$, on en déduit (iv). ✓

Lemme 8.4. *Soit $f \in A(E)$. Si f est une similitude (ou une isométrie), alors f est bijective et conserve l'orthogonalité.*

Démonstration. Si f est une similitude affine de rapport k, alors on a pour tous $M, N \in E$,

$$f(M) = f(N) \Rightarrow f(M)f(N) = 0 \Rightarrow kMN = 0 \Rightarrow M = N.$$

Par conséquent f est une application affine injective de E dans lui-même, donc est bijective (cf. corollaire 2.6 du chapitre I).

D'autre part, f multiplie le produit scalaire par k^2 d'après le lemme 8.1. En particulier, f conserve la nullité du produit scalaire, c'est-à-dire f conserve l'orthogonalité des vecteurs. ✓

Remarque 8.5. La réciproque du lemme 8.4 est vraie, et sera démontrée plus loin (voir théorème 5.7 du chapitre VI.)

Lemme 8.6. *Soit $f \in A(E)$, et soit F un sous-espace de E. Si f est bijective et conserve l'orthogonalité, alors $\vec{f}(\vec{F}^{\perp}) = [\vec{f}(\vec{F})]^{\perp}$.*

Démonstration. Soit $f \in GA(E)$ et soit F un sous-espace de E. Comme $\vec{F} \perp \vec{F}^{\perp}$, on a $\vec{f}(\vec{F}) \perp \vec{f}(\vec{F}^{\perp})$ par hypothèse sur f, c'est-à-dire $\vec{f}(\vec{F}^{\perp}) \subset \vec{f}(\vec{F})^{\perp}$. D'autre part, si $\dim \vec{F} = p$, alors $\dim \vec{F}^{\perp} = n - p$. Comme $\vec{f}$ est bijective, on a aussi $\dim \vec{f}(\vec{F}) = p$ et $\dim \vec{f}(\vec{F}^{\perp}) = n - p$, c'est-à-dire $\dim \vec{f}(\vec{F}^{\perp}) = \dim \vec{f}(\vec{F})^{\perp}$, d'où l'égalité voulue. ✓

Lemme 8.7. *Soit $f \in A(E)$. Si f est bijective et conserve l'orthogonalité, alors f conserve la perpendicularité.*

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces perpendiculaires (droites ou hyperplans). Nous distinguons deux cas.

1) Si F et G ne sont pas deux hyperplans, alors « F et G perpendiculaires » équivaut à « F et G orthogonaux et sécants en un point ». Comme f conserve l'orthogonalité, on a donc aussi $f(F)$ et $f(G)$ orthogonaux. Comme par ailleurs f est bijective, $f(F)$ et $f(G)$ sont aussi sécants en un point (cf. proposition 4.38 du chapitre I). Puisque ce sont des sous-espaces de même nature que F et G, respectivement (toujours parce que f est bijective), ils sont donc bien perpendiculaires.

2) Supposons maintenant que F et G sont deux hyperplans perpendiculaires; cela signifie cette fois que $\vec{F}^{\perp} \perp \vec{G}^{\perp}$. Comme f conserve l'orthogonalité, on a donc $\vec{f}(\vec{F}^{\perp}) \perp \vec{f}(\vec{G}^{\perp})$, ou encore, grâce au lemme 8.6 : $\vec{f}(\vec{F})^{\perp} \perp \vec{f}(\vec{G})^{\perp}$. Comme $f(F)$ et $f(G)$ sont aussi des hyperplans (f est bijective), on a montré qu'ils étaient perpendiculaires. ✓

En résumé de l'étude faite ci-dessus, nous pouvons donc énoncer :

Théorème 8.8.

1) *Les isométries affines conservent la distance, le produit scalaire, l'orthogonalité et la perpendicularité.*

2) *Les similitudes affines de rapport $k > 0$ multiplient la distance par k, le produit scalaire par k^2, et elles conservent l'orthogonalité et la perpendicularité.*

Voyons maintenant si les applications affines que nous avons rencontré jusqu'à présent possèdent ces propriétés.

Proposition 8.9.

1) *Les translations et les symétries orthogonales sont des isométries.*

2) *Les homothéties de rapport λ sont des similitudes de rapport $|\lambda|$.*

3) *Les projections orthogonales sur un sous-espace F qui n'est ni un point ni E tout entier ne conservent pas l'orthogonalité (et donc elles ne conservent pas non plus la perpendicularité, ni le produit scalaire ou la distance).*

Démonstration. 1) Pour démontrer qu'une translation ou une symétrie orthogonale est une isométrie, il suffit par le lemme 8.1 de montrer que sa partie linéaire conserve le produit scalaire. Pour une translation t, c'est clair puisque $\vec{t} = \mathrm{id}_{\vec{E}}$. Soit maintenant s une symétrie orthogonale d'axe F, et soient $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$. Décomposons ces vecteurs selon $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^{\perp}$: on écrit $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$. Alors

$$(s_{\vec{F}}(\vec{x})|s_{\vec{F}}(\vec{y})) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2|\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = (\vec{x}_1|\vec{y}_1) + (\vec{x}_2|\vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = (\vec{x}|\vec{y}),$$

cqfd.

2) Une homothétie de rapport λ étant de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{id}_{\vec{E}}$, il est clair qu'elle multiplie le produit scalaire par λ^2. D'après le lemme 8.1, c'est donc une similitude de rapport $|\lambda|$.

3) Soit p une projection orthogonale sur un sous-espace F vérifiant $0 < \dim F < \dim E$. Soient $(\vec{e}_i)_{i=1}^{p}$ une b.o.n. de $\vec{F}$ et $(\vec{e}_i)_{i=p+1}^{n}$ une b.o.n. de $\vec{F}^{\perp}$. Les hypothèses sur F indiquent qu'il y a au

moins un vecteur dans chacune de ces bases, et on peut donc définir $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_{p+1}$ et $\vec{y} = \vec{e}_1 - \vec{e}_{p+1}$. Alors $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{e}_1\|^2 - \|\vec{e}_{p+1}\|^2 = 1 - 1 = 0$ donc $\vec{x} \perp \vec{y}$. Mais

$$(\vec{p}(\vec{x})|\vec{p}(\vec{y})) = (\vec{e}_1|\vec{e}_1) = \|\vec{e}_1\|^2 > 0,$$

ce qui prouve que p ne conserve pas l'orthogonalité et, a fortiori, ne conserve pas le produit scalaire (donc pas la distance, cf. lemme 8.1) ni la perpendicularité. ✓

Corollaire 8.10. *Soient $A \in E$, $r \geq 0$ et $f \in A(E)$.*

1) *Si f est une translation ou une symétrie orthogonale (ou plus généralement une isométrie), $f(S(A,r)) = S(f(A), r)$.*

2) *Si f est une homothétie de rapport λ (ou plus généralement une similitude de rapport $|\lambda|$), $f(S(A,r)) = S(f(A), |\lambda|r)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les résultats précédents. ✓

9 Exercices

Exercice 1. Prouver que toute boule ouverte (resp. fermée) de E est convexe, mais qu'une sphère non réduite à un point ne l'est pas.

Exercice 2. On suppose $\dim E = 2$.

1) Soient D et D' deux droites de E.

a) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) D et D' sont perpendiculaires; (ii) $D \perp D'$;
(iii) $\vec{D} = (\vec{D'})^\perp$; (iv) $\vec{D'} = (\vec{D})^\perp$.

b) Soit D'' une autre droite de E.

i) On suppose $D \parallel D'$. Montrer : $D'' \perp D \Leftrightarrow D'' \perp D'$.

ii) On suppose $D \perp D'$. Montrer : $D'' \perp D \Leftrightarrow D'' \parallel D'$, ainsi que $D'' \perp D' \Leftrightarrow D'' \parallel D$.

2) Soient A un point et D une droite de E.

a) D'après le cours, il existe une unique droite D_A passant par A et perpendiculaire à D. Proposer une construction à la règle et au compas de D_A.

b) Si on pose $D \cap D_A = \{A'\}$, que représente le point A' ? Donner une C.N.S. pour que $A \neq A'$.

3) Soient D, D', D_1, D'_1 des droites de E telles que $D \perp D_1$ et $D' \perp D'_1$. Montrer :

a) $D \parallel D' \Leftrightarrow D_1 \parallel D'_1$;

b) D et D' sont sécantes $\Leftrightarrow$ D_1 et D'_1 sont sécantes;

c) $D \perp D' \Leftrightarrow D_1 \perp D'_1$.

Exercice 3. Soient D une droite de E et A un point de E non situé sur D. Le cinquième postulat d'Euclide affirme qu'il existe une (unique) droite parallèle à D et passant par A. À l'aide de résultats de l'exercice précédent, construire cette droite à la règle et au compas.

Exercice 4. Soient A, B deux points de E. Construire $G = \text{bar}((A,3),(B,2))$ à la règle et au compas.

Exercice 5. On suppose que $\dim E = 2$.

1) Montrer que si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $AB = CD$ et $AD = BC$. La réciproque est-elle vraie ?

2) Soit $ABCD$ un parallélogramme de E. On note O son centre.

a) Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $ABCD$ est un rectangle, i.e. $(DA) \perp (AB)$;

(ii) $(DA) \perp (AB)$, $(AB) \perp (BC)$, $(BC) \perp (CD)$ et $(CD) \perp (AD)$;

(iii) $AC = BD$;

(iv) O est situé sur la médiatrice de l'un des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$;

(v) O est situé sur chacune des médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$;

(vi) A, B, C, D appartiennent à un même cercle de centre O.

b) Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $ABCD$ est un losange, i.e. $(AC) \perp (BD)$;

(ii) $AB = BC$;

(iii) $AB = BC = CD = DA$.

3) Soit $ABCD$ un quadrilatère de E.

a) Prouver que $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $(AB) \perp (BC)$, $(BC) \perp (CD)$ et $(CD) \perp (DA)$.

b) Prouver que $ABCD$ est un losange si et seulement si $AB = BC = CD = DA$.

Exercice 6. On suppose que $\dim E = 2$. Soit ABC un triangle non aplati de E.

1) Montrer que les médiatrices des côtés de ABC sont deux à deux sécantes, puis qu'elles sont concourantes en un point O.

2) En déduire qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$, de centre et de rayon à préciser, contenant les points A, B, C. Ce cercle s'appelle le **cercle circonscrit à ABC**.

3) Quel point remarquable est le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle ?

4) Soit Δ_A (resp. Δ_B, Δ_C) la parallèle à (BC) (resp. (CA), (AB)) passant par A (resp. B, C).

a) Montrer que Δ_A, Δ_B, Δ_C sont deux à deux sécantes.

On note alors $\Delta_A \cap \Delta_B = \{C'\}$, $\Delta_B \cap \Delta_C = \{A'\}$, $\Delta_C \cap \Delta_A = \{B'\}$.

b) En considérant des parallélogrammes, montrer que A, B, C sont les milieux respectifs de $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$.

c) Montrer que les hauteurs issues de A, B, C coïncident respectivement avec les médiatrices de $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$.

d) Déduire de ce qui précède que les hauteurs issues des sommets de ABC sont concourantes en un point H, appelé **orthocentre de ABC**.

Exercice 7. On suppose que $\dim E = 2$.

1) Montrer que trois points distincts d'un cercle de E ne peuvent être alignés.

2) Utiliser la question précédente et le 2) de l'exercice 6 pour montrer que deux cercles distincts de E se coupent en au plus deux points.

Lorsque leur intersection est réduite à un seul point A, on dira que les cercles sont **tangents en A**.

3) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A un point de $\mathcal{C}$, et D une droite passant par A. Montrer que D est tangente à $\mathcal{C}$ en A si et seulement si $(OA) \perp D$. En déduire une construction à la règle et au compas de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Exercice 8. On suppose que $\dim E = 2$. Soit ABC un triangle non aplati de E.

1) Soient Δ la médiane issue de A, d la hauteur issue de A et D la médiatrice de $[BC]$. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) ABC est isocèle en A ; (ii) $\Delta = d$; (iii) $d = D$; (iv) $D = \Delta$.

2) Soient G le centre de gravité de ABC, O le centre du cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre de ABC. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) ABC est équilatéral ; (ii) $G = O$; (iii) $O = H$; (iv) $H = G$.

Exercice 9. On suppose que $\dim E = 3$. Soient D une droite et P un plan perpendiculaires. On note $D \cap P = \{O\}$.

1) Montrer que D est orthogonale à toute droite de P.

2) Soient $A \in D \setminus \{O\}$, D' une droite de P ne passant pas par O et $A' \in D'$. Vérifier que $A \neq A'$ et $O \neq A'$, puis montrer que $(AA') \perp D'$ si et seulement si $(OA') \perp D'$.

N.B. Ce résultat est le **théorème des trois perpendiculaires**.

Exercice 10. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille de points pondérés de E. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(M) = \sum_{i \in I} \lambda_i MA_i^2$ s'appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée à la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$.

1) Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma_k = \{M \in E : \varphi(M) = k\}$. Démontrer :

a) Si $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, Γ_k est soit vide, soit une sphère de centre $G = \operatorname{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ (éventuellement réduite au point G).

b) Si $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$, Γ_k est soit vide, soit un hyperplan, soit E tout entier.

2) Soient A et B deux points distincts de E. Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $\Sigma_k = \{M \in E : MA = k\, MB\}$. Démontrer :

a) Σ_1 est l'hyperplan médiateur de $[AB]$;

b) si $k \neq 1$, Σ_k est la sphère de centre $G = \operatorname{bar}((A,1),(B,-k^2))$, de rayon $\frac{k}{|1-k^2|} AB$.

Exercice 11. On suppose que $\dim E = 3$.

1) Soient A_1, A_2, A_3 trois points non alignés de E. On note Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ et, pour $i \neq j$ dans $\{1,2,3\}$, P_{ij} le plan médiateur du segment $[A_iA_j]$.

a) Montrer que $P_{12} \cap P_{13}$ est une droite Δ passant par Ω, de direction à préciser.

b) Vérifier que Δ est exactement l'ensemble des points de E équidistants de A_1, A_2 et A_3. En déduire : $\Delta = P_{12} \cap P_{13} \cap P_{23}$.

2) Soient maintenant A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points non coplanaires de E. Pour i, j, k, l distincts dans $\{1,2,3,4\}$, on note Δ_i la droite constituée des points M de E équidistants de A_j, A_k, A_l, conformément au résultat précédent.

a) Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point, que l'on notera O.

b) Vérifier que le point O est le centre d'une sphère contenant les quatre sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Cette sphère sera dite **circonscrite** au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

c) Montrer que O est l'intersection des quatre droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, et également celle des six plans médiateurs relatifs aux six arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Exercice 12. On suppose que $\dim E = 3$. Soient D et D' deux droites non coplanaires de E.

1) a) Montrer l'existence et l'unicité d'une perpendiculaire commune Δ à D et D'.

On pose alors $D \cap \Delta = \{A\}$ et $D' \cap \Delta = \{A'\}$.

b) On définit la **distance de D à D'** par : $d(D, D') = \inf\{MM';\ M \in D,\ M' \in D'\}$.
Soient $B \in D$, $B' \in D'$. Montrer : $BB' = d(D, D') \iff (B = A$ et $B' = A')$.

2) *Exemple.* Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère orthonormé de E.

a) Soient $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Soit D (resp. D') la droite passant par M (resp. M') et ayant $\vec{v}$ (resp. $\vec{v}'$) pour vecteur directeur.
Vérifier que D et D' ne sont pas coplanaires.

b) On définit les points A et A' comme dans 1). Déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ et en déduire la distance de D à D'.

Exercice 13. Dans E de dimension 2, soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' distincts, et de rayon R et R' inégaux.

1) Montrer qu'il existe exactement deux homothéties h_1 et h_2 transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.
2) Soit $M \in \mathcal{C}$. Construire les images $M'_1 = h_1(M)$ et $M'_2 = h_2(M)$.
3) En déduire une construction des centres respectifs A_1 et A_2 de h_1 et h_2.

Exercice 14. Dans E de dimension 2, soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 distincts et de rayons r_1, r_2 et r_3 différents. D'après l'exercice 13, on peut définir :

- h_1, l'homothétie de rapport positif qui envoie $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_3$;
- h_2, l'homothétie de rapport positif qui envoie $\mathcal{C}_3$ sur $\mathcal{C}_1$;
- h_3, l'homothétie de rapport positif qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.

Montrer que les centres respectifs A_1, A_2 et A_3 de ces homothéties sont alignés.
N.B. Le résultat est le même si l'on choisit une homothétie de rapport positif et deux homothéties de rapports négatifs.

Exercice 15. On suppose $\dim E = 2$.
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R.
Soient A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.
Soit G le centre de gravité de ABC.
On note Δ_1, Δ_2, Δ_3 les médiatrices respectives de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Soit f l'homothétie de centre G et de rapport -2.

a) Déterminer les images par f des points A', B', C' et des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

b) En déduire que les trois hauteurs du triangles ABC sont concourantes en un point H qui vérifie $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

La droite contenant O, G, H est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.

2) Soit g l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Montrer que le centre O' du cercle $\mathcal{C}' = g(\mathcal{C})$ est le milieu de $[OH]$.
b) Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie h de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$.
c) En conclure que le cercle $\mathcal{C}'$ contient :

i) les milieux des côtés de ABC ;
ii) les pieds des hauteurs de ABC ;
iii) les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$.

Le cercle $\mathcal{C}'$ est appelé **cercle d'Euler** (ou **cercle des neuf points**) du triangle ABC.

Exercice 16. On suppose que $\dim E = 3$. On considère dans E un cube $ABCDEFGH$ (cf. figure ci-dessous) dont les arêtes ont pour longueur commune $a > 0$.

1) Utiliser un résultat de l'exercice 11 pour démontrer que le plan (BEG) est perpendiculaire à la droite (DF). Montrer également que leur point commun Ω est le centre de gravité du triangle BEG.

2) Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$.

a) Démontrer que I, J, K, L, M, N appartiennent au plan médiateur de $[DF]$.

b) Montrer que I, J, K, L, M, N sont cocycliques.

c) En déduire que $IJKLMN$ est un hexagone régulier.

Chapitre IV : Orientation

La notion d'orientation constitue, pour un espace affine euclidien, la pierre de touche de nombreux sujets classiques et importants : produit mixte, produit vectoriel, angles orientés, etc.

1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Dans ce paragraphe, $\vec{E}$ désigne un espace vectoriel réel de dimension n. Il n'est pas nécessaire de le supposer muni d'une structure euclidienne.

Définitions 1.1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\vec{E}$. On dit que **$\mathcal{B}'$ est de même sens que $\mathcal{B}$** (resp. **de sens contraire à $\mathcal{B}$**) si $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ (resp. si $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$).

Proposition 1.2. *La relation « être de même sens que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $\vec{E}$.*

Démonstration. À l'aide des formules $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = [\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')]^{-1}$ et $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \mathrm{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$, on voit immédiatement qu'on a affaire à une relation d'équivalence. ✓

Remarque 1.3. L'aspect « symétrie » de cette relation d'équivalence permet d'utiliser le vocabulaire « $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même sens » plutôt que « $\mathcal{B}$ est de même sens que $\mathcal{B}'$ ». De même, on vérifie sans peine que la relation « est de sens contraire à » est symétrique (mais pas réflexive ni transitive), ce qui permet d'adopter un vocabulaire similaire.

Exemple 1.4. Si $\vec{E}$ est une droite, deux bases $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de $\vec{E}$ sont de même sens (resp. de sens contraires) si et seulement si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même sens (resp. de sens contraire) en tant que vecteurs.

Donnons un premier exemple général et fondamental de comparaison du sens de deux bases.

Notation 1.5. On suppose connus le groupe symétrique S_n d'indice n et son sous-groupe alterné A_n. Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\vec{E}$ et $\sigma \in S_n$, on note alors $\sigma(\mathcal{B}) = (\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)})$, qui est encore une base de $\vec{E}$.

Proposition 1.6. *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\vec{E}$, et soit τ une transposition de S_n. Alors $\tau(\mathcal{B})$ est de sens contraire à $\mathcal{B}$.*

Démonstration. On sait que l'application $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}} : \vec{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est alternée, ce qui signifie précisément que si on échange deux vecteurs parmi un système de n vecteurs, on obtient une valeur du déterminant qui est opposée à la valeur initiale. D'où $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\tau(\mathcal{B})) = -\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = -1 < 0$. ✓

Corollaire 1.7. *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\vec{E}$, et soit σ une permutation de S_n. Alors $\sigma(\mathcal{B})$ est de même sens que $\mathcal{B}$ si et seulement si $\sigma \in A_n$.*

Démonstration. Il suffit de se rappeler que le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions, et qu'un produit de k transpositions est dans A_n si et seulement si k est pair. ✓

Il y a donc autant de permutations conservant le sens des bases que de permutations l'inversant, à savoir $n!/2$.

Voici un deuxième exemple important de comparaison du sens de deux bases.

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\vec{E}$. Si l'on multiplie l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ par un scalaire $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), on obtient une base de même sens (resp. de sens contraire).*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\vec{x}_i)$ une base de $\vec{E}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a, en raison de la n-linéarité du déterminant :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \ldots, \lambda\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) = \lambda\, \text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda,$$

d'où le résultat. ✓

Rappelons que le déterminant d'un endomorphisme linéaire est indépendant de la base dans laquelle on le calcule. La définition suivante est donc licite.

Définition 1.9. Un automorphisme de $\vec{E}$ est dit **direct** (resp. **indirect**) si son déterminant est > 0 (resp. < 0).

Voici une caractérisation des automorphismes (in)directs.

Proposition 1.10. *Un automorphisme de $\vec{E}$ est direct (resp. indirect) si et seulement s'il transforme toute base de $\vec{E}$ en une base de même sens (resp. en une base de sens contraire).*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ une base de $\vec{E}$ et $u \in GL(\vec{E})$. Alors $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$ est une base de $\vec{E}$ et on a par définition $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. ✓

Voici maintenant le résultat qui est à la base de la notion d'orientation.

Proposition 1.11. *La relation d'équivalence « être de même sens que » possède exactement deux classes d'équivalence.*

Démonstration. Fixons une base $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$. En changeant l'un de ses vecteurs par son opposé, on obtient, comme on l'a vu, une base de sens contraire $\mathcal{B}'$. Pour toute autre base $\mathcal{B}''$ de $\vec{E}$, il n'y a que deux possibilités : soit $\mathcal{B}''$ est de même sens que $\mathcal{B}$, donc appartient à la classe de $\mathcal{B}$, soit elle est de même sens que $\mathcal{B}'$, donc appartient à la classe de $\mathcal{B}'$. Au total, il y a donc bien deux classes d'équivalence. ✓

Définitions 1.12.

1) Les deux classes d'équivalence définies ci-dessus sont appelées **orientations de $\vec{E}$**.

2) On dit qu'**on oriente $\vec{E}$** lorsqu'on choisit l'une des deux orientations possibles. Alors toute base appartenant à l'orientation fixée sera dite **directe**. Elle sera dite **indirecte** dans le cas contraire.

Dans la pratique, orienter un espace, c'est souvent choisir la classe d'une base dont on veut qu'elle soit directe.

Exemple 1.13. On appelle **orientation canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ l'unique orientation contenant sa base canonique.

Remarques 1.14.

1) L'une des erreurs les plus répandues consiste à penser qu'une orientation sur un espace vectoriel induit automatiquement une orientation sur tout sous-espace. Il n'en est rien et, pour s'en convaincre, il suffit de relire les définitions. En revanche si $\overrightarrow{E}$ est un espace orienté, et si $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace de $\overrightarrow{E}$ lui-même orienté, alors tout supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{G}$ hérite automatiquement d'une orientation, dite induite (Exercice 1).

2) Certains auteurs préfèrent employer les termes de base positive, d'automorphisme négatif, etc. plutôt que de base directe, d'automorphisme indirect, etc.

Voici une reformulation de la proposition 1.10, qui rend cohérent tout le vocabulaire introduit.

Proposition 1.15. *Si $\overrightarrow{E}$ est orienté, un automorphisme de $\overrightarrow{E}$ est direct (resp. indirect) si et seulement s'il préserve l'orientation choisie (resp. si et seulement s'il échange les deux orientations).*

2 Orientation d'un espace affine réel

Les définitions précédentes possèdent naturellement des analogues affines. Ici, E désigne un espace affine réel de dimension n et de direction $\overrightarrow{E}$.

Définitions 2.1.

1) Deux repères (affines ou cartésiens) de E sont dits **de même sens** (resp. **de sens contraire**) si leurs bases associées le sont.

2) Un automorphisme de E est dit **direct** (resp. **indirect**) si sa partie linéaire l'est.

3) On dit que E est orienté lorsque $\overrightarrow{E}$ l'est. Alors un repère (affine ou cartésien) de E sera dit **direct** (resp. **indirect**) si la base de $\overrightarrow{E}$ qui lui est associée est directe (resp. indirecte).

Avec ces définitions, tous les résultats précédents s'énoncent tels quels dans le cadre affine, en remplaçant la lettre $\overrightarrow{E}$ par la lettre E, et les mots « base » et « automorphisme (linéaire) » par les mots « repère » et « automorphisme (affine) ». Le seul résultat qui mérite une explication est le suivant.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de E et soit τ une transposition de S_{n+1}. Alors $\mathcal{R}' = \tau(\mathcal{R})$ est un repère affine de sens contraire à $\mathcal{R}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ la base associée à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}'$ la base associée à $\mathcal{R}'$ (qui est clairement un repère affine aussi).

Supposons que $\tau = (i\ j)$ avec $0 < i < j \le n$. Alors $\mathcal{B}'$ est obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en échangeant les deux vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ et $\overrightarrow{A_0A_j}$. D'après ce que l'on sait, elle est donc de sens contraire à $\mathcal{B}$.

Supposons maintenant que $\tau = (0\ i)$ avec $0 < i \le n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &= (A_i, A_1, \dots, A_{i-1}, A_0, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ \text{et} \quad \mathcal{B}' &= (\overrightarrow{A_iA_1}, \dots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_iA_n}), \end{aligned}$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
&\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\\
&\quad= \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_iA_n})\\
&\quad= \underbrace{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_iA_0}, \dots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_iA_n})}_{=0,\ \text{car il y a deux fois le vecteur } \overrightarrow{A_iA_0}}\\
&\qquad + \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_iA_n})\\
&\quad=\\
&\quad\ \vdots \ \text{ idem en introduisant } A_0 \text{ à chaque place, sauf à la } i\text{-ième,}\\
&\qquad\quad \text{et en utilisant la linéarité par rapport à cette place}\\
&\quad= \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_0A_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})\\
&\quad= -\,\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})\\
&\quad= -1 < 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ est encore de sens contraire à $\mathcal{B}$. ✓

Corollaire 2.3. *Soit $\mathcal{R}$ un repère affine de E et soit $\sigma \in S_{n+1}$. Alors $\mathcal{R}$ et $\sigma(\mathcal{R})$ sont de même sens si et seulement si $\sigma \in A_{n+1}$.*

Exemple 2.4. En dimension 2, on dit qu'un triangle ABC (non aplati) est un **triangle direct** (resp. un **triangle indirect** si le repère affine (A, B, C) l'est.
Le résultat précédent illustre les équivalences : ABC est direct $\Leftrightarrow$ BCA est direct $\Leftrightarrow$ CAB est direct.

Remarque 2.5. Convention sur la représentation graphique du sens direct en dimension 2.

3 Produit mixte et produit vectoriel dans un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe l'espace affine E est supposé **euclidien** et **orienté**.

Proposition 3.1. *Le déterminant d'une famille de n vecteurs de $\vec{E}$ a la même valeur dans toute base orthonormée* **directe** *de $\vec{E}$.*

Démonstration. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n.d. de $\vec{E}$, et X un système de n vecteurs, alors

$$\text{dét}_{\mathcal{B}'}(X) = \text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \text{dét}_{\mathcal{B}}(X).$$

Mais la matrice de passage $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est orthogonale, i.e. vérifie ${}^tAA = I_n$, d'où dét $A = \pm 1$ (ce fait est connu, et sera revu dans le chapitre VI). Comme de plus les bases sont de même sens, on obtient dét $A = 1$, cqfd. ✓

Cette proposition nous autorise à poser la :

Définition 3.2. On appelle **produit mixte** de n vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ de $\vec{E}$ le déterminant de ces vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe de $\vec{E}$. On le notera $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$.

Les propriétés des produits mixtes proviennent tout droit de celles des déterminants.

Proposition 3.3.

1) *Le produit mixte de n vecteurs est non nul si et seulement si ces vecteurs sont indépendants, c'est-à-dire si et seulement s'ils forment une base de $\vec{E}$.*

2) *L'application $\vec{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \longmapsto [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$ est n-linéaire et alternée.*

De la multilinéarité du produit mixte, on déduit que si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ sont fixés dans $\vec{E}$, alors l'application $\vec{x} \longmapsto [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}]$ est une forme linéaire sur $\vec{E}$. L'isomorphisme canonique entre $\vec{E}$ et son dual (cf. chapitre III, théorème 1.3) donne de ce fait un sens à la :

Définition 3.4. Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ une famille de $n-1$ vecteurs de $\vec{E}$. On appelle **produit vectoriel** de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ l'unique vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$ tel que $(\vec{v}|\vec{x}) = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}]$ pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$. On le notera $\vec{v} = \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}$.

On obtient alors les résultats suivants.

Proposition 3.5.

1) *L'application $\vec{E}^{n-1} \longrightarrow \vec{E}$, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) \longmapsto \vec{x} = \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}$ est $(n-1)$-linéaire et alternée.*

2) *$\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ sont dépendants.*

3) *Si les $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ sont indépendants, alors $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1})$ est une base directe de $\vec{E}$.*

4) *$\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1} \in \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})^\perp$, ou autrement dit : $\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}$ est orthogonal à $\vec{x}_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.*

Démonstration.

1) provient de la n-linéarité et de l'alternance du produit mixte.

2) Notons $\vec{v} = \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}$. Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$ est liée, a fortiori $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x})$ l'est aussi pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$. Par conséquent, $(\vec{v}|\vec{x}) = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}] = 0$ pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, c'est-à-dire $\vec{v} = \vec{0}$.

Si au contraire les $\vec{x}_i$ sont indépendants, il existe $\vec{x}_n$ tel que $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ soit une base de $\vec{E}$. Alors $(\vec{v}|\vec{x}_n) = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n]$ est non nul, donc $\vec{v} \neq \vec{0}$.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Alors $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}) = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}] = \|\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}\|^2$, et ce nombre est > 0 d'après le point précédent.

4) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $(\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_{n-1}|\vec{x}_i) = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_i] = 0$.

Cqfd. ✓

Nous particularisons maitenant l'étude au cas de la dimension 3, en reformulant les propriétés précédentes et en en apportant de nouvelles, qui lui sont propres.

Proposition 3.6. *Supposons que $\vec{E}$ est de dimension 3. Alors :*

1) *L'application $\vec{E}^2 \longrightarrow \vec{E}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$ est bilinéaire et alternée. En particulier, $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ et $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}$.*

2) *$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dépendants.*

3) *Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont indépendants, alors $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ est une base directe de $\vec{E}$.*

4) *$\vec{x} \wedge \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ et à $\vec{y}$.*

5) *Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$, alors $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$.*

6) *Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dans une base orthonormée directe, alors $\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$ dans cette même base.*

7) $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x}|\vec{z})\,\vec{y} - (\vec{x}|\vec{y})\,\vec{z}$ **(formule du double produit vectoriel)**.

8) $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2$ **(identité de Lagrange)**.

9) *(Réciproque de 5) Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une famille orthonormée, alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$.*

Démonstration. Les points 1 à 4 sont des cas particuliers de la proposition précédente.

5) D'après la proposition 1.10 du chapitre III, on peut écrire

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2|\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2|\vec{e}_2)\,\vec{e}_2 + (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2|\vec{e}_3)\,\vec{e}_3.$$

En utilisant la propriété 4 et la définition du produit vectoriel, on obtient donc

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2|\vec{e}_3)\,\vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\vec{e}_3 = \vec{e}_3.$$

Les autres identités s'obtiennent de la même façon.

6) On écrit que $\vec{x} = \sum x_i\vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum y_i\vec{e}_i$, et on utilise les points 1 et 5.

7) On écrit les composantes de ces vecteurs dans une b.o.n.d., et on développe (le calcul du membre de gauche résulte de la formule 6).

8) On peut utiliser la formule du 6, mais il est plus rapide d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} \wedge \vec{y}|\vec{x} \wedge \vec{y}) \\
&= [\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}] \\
&= [\vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}, \vec{x}] \qquad \text{[permutation paire]} \\
&= (\vec{y} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y})|\vec{x}) \\
&= ((\vec{y}|\vec{y})\,\vec{x} - (\vec{y}|\vec{x})\,\vec{y}|\vec{x}) \qquad \text{[formule du double produit vectoriel]} \\
&= (\vec{y}|\vec{y})\,(\vec{x}|\vec{x}) - (\vec{y}|\vec{x})\,(\vec{y}|\vec{x}) \\
&= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2.
\end{aligned}$$

9) Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une famille orthonormée et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, alors on sait déjà (par 3 et 4) que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthogonale directe de $\vec{E}$. Reste donc à voir que $\vec{e}_3$ est normé, ce qui est immédiat avec l'identité de Lagrange.

✓

Remarque 3.7. Convention sur la représentation graphique d'une base directe en dimension 3.

Nous terminons ce paragraphe avec deux applications au calcul de la distance à un sous-espace en dimension 3.

Proposition 3.8. *Supposons* $\dim E = 3$.

1) *Soient $M \in E$ et $P = (ABC)$ un plan, alors*

$$d(M, P) = \frac{\left|(\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MA}]\right|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

2) *Soient $M \in E$ et $D = (AB)$ une droite de E, alors*

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Démonstration. 1) Soit H le projeté orthogonal de M sur P. Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P (propriété 4 de la proposition précédente), d'après la proposition 6.3 du chapitre III, on a

$$d(M, P) = MH = \frac{|(\overrightarrow{MH}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

En utilisant la décomposition $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}$ et le fait que $\overrightarrow{AH}$ est dans $\vec{P}$ donc orthogonal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, on obtient bien le résultat voulu.

2) Soit H le projeté orthogonal de M sur D. D'après le théorème 6.2 et la proposition 5.3 du chapitre III, on sait que

$$d(M, D) = MH, \quad \text{avec} \quad H = A + \frac{(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
d(M, D)^2 &= MH^2 \\
&= \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{AH}\|^2 \qquad \text{[théorème de Pythagore]} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA}\|^2\|\vec{u}\|^2 - (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{AB})^2}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|^2}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \qquad \text{[identité de Lagrange]}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat escompté. ✓

4 Aires et volumes

Dans ce paragraphe nous allons voir que les notions d'aires et de volumes pour les triangles en dimension 2 et les tétraèdres en dimension 3 peuvent s'exprimer en termes de produit mixte et produit vectoriel.

Comme point de départ, nous prenons la définition des Anciens :

Définition 4.1. On appelle **aire (géométrique) d'un triangle** ABC d'un plan affine euclidien E le nombre

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{AB \cdot h}{2}$$

où H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB) et $h = CH$ la distance de C à (AB).

Cette formule se retient plus prosaïquement sous la forme

$$\text{aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Mais il n'est pas si évident que, avec cette définition, on obtient la même valeur quelles que soient les bases et hauteurs choisies (il y en a trois possibles) ! C'est-à-dire qu'il faudrait vérifier que l'aire de ABC est aussi celle de BCA et de CAB. Une preuve « élémentaire » s'obtient par des considérations de trigonométrie : si h' désigne la distance de B au côté (AC), on a

$$\frac{h}{AC} = \sin\widehat{A} = \frac{h'}{AB}$$

d'où $AB \cdot h = AC \cdot h'$. Le problème est qu'un angle n'est pas une notion si « élémentaire » que cela, en tout cas nous ne l'avons pas encore définie !

Le résultat suivant est donc doublement intéressant.

Proposition 4.2. *Orientons E (pour pouvoir parler du produit mixte). L'aire d'un triangle ABC peut s'écrire*

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]\right|.$$

En particulier, l'aire du triangle est la même quel que soit le choix du couple base-hauteur.

Démonstration. L'idée consiste à choisir un repère orthonormé bien adapté pour faire les calculs. Soit donc $\vec{i} = \overrightarrow{AB}/AB$, que l'on complète en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Dans le repère cartésien d'origine A et de base $\mathcal{B}$, nous avons

$$B = (AB, 0), \quad C = (\varepsilon_1 AH, \varepsilon_2 CH),$$

où H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB) et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Ces deux signes sont liées à l'incertitude de la position de C dans l'un des quadrants créés par le repère. On a alors

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} AB & \varepsilon_1 AH \\ 0 & \varepsilon_2 CH \end{vmatrix} = \varepsilon_2 AB \cdot CH,$$

d'où la première formule. Pour prouver l'invariance par permutation paire (donc par permutation générale vu les valeurs absolues), on effectue un simple changement de base :

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] &= \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\
&= \text{dét}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \cdot \text{dét}_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\
&= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}],
\end{aligned}$$

et l'on procède de même pour la troisième égalité. ✓

Définition 4.3. On appelle **aire (géométrique) d'un parallélogramme** $ABCD$ d'un plan euclidien E la quantité

$$\mathcal{A}(ABCD) = AB \cdot h$$

où h est la distance de D à (AB).

Ce n'est rien d'autre que la formule classique « base × hauteur », et cette définition est motivée par un simple dessin, où l'on pressent bien que l'aire d'un parallélogramme est la somme (de deux façons, d'ailleurs) de l'aire de deux triangles qui ont même aire. Précisément,

$$\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(ABD)$$

par définition, mais il semblerait qu'on ait de plus

$$\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(BCD) = 2\mathcal{A}(ABC) = 2\mathcal{A}(DAC),$$

de sorte qu'il n'y a pas à se préoccuper du couple base-hauteur choisi, comme pour les triangles. Là encore, notre intuition géométrique est confirmée par un calcul très simple.

Proposition 4.4. *Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un plan orienté. Alors*

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$$

et cette quantité est encore égale à ce que l'on peut obtenir par permutation circulaire des sommets.

Démonstration. D'une part,

$$\mathcal{A}(ABCD) = AB \cdot h = 2\mathcal{A}(ABD) = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$$

d'après la proposition 4.2. D'autre part,

$$\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}]\right| = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$$

puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Enfin, pour obtenir l'invariance par permutation circulaire, par exemple les identités

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]\right| = \left|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]\right|$$

on procède comme dans la preuve de la proposition 4.2. ✓

Remarque 4.5. Plus généralement, on peut étendre cette définition de l'aire à toute surface du plan ou l'espace qui peut être triangulée, c'est-à-dire découpée en triangles (un polygone du plan, mais aussi un cube ou un tétraèdre de l'espace par exemple). Mais rappelons que la seule bonne définition d'une aire, pour un domaine $\mathcal{D}$ borné général (qui n'a aucune raison d'être triangulable), est donnée par l'analyse :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Revenons à notre géométrie. Lorsqu'on considère un triangle ou un parallélogramme situé dans un plan d'un espace de dimension 3, son aire peut s'exprimer à l'aide d'un produit vectoriel. En dimension 2, une telle formule n'aurait bien entendu pas de sens.

Proposition 4.6. *Soit $ABCD$ un parallélogramme situé dans un plan d'un espace euclidien E de dimension 3. Alors $\mathcal{A}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$, et donc aussi $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{A}(ABCD) = AB \cdot DH$, avec H projeté orthogonal de D sur (AB). Or d'après la proposition 3.8,

$$DH = d(D, (AB)) = \frac{\|\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|},$$

si bien que

$$\mathcal{A}(ABCD) = \|\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|-\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$$

puisque le produit vectoriel est alterné. Il ne reste plus qu'à observer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{0}$$

car $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. ✓

En dimension 3, la notion d'aire devient bien sûr une notion de volume, et les figures géométriques analogues des triangles et parallélogrammes sont les tétraèdres et parallélépipèdes. Plus précisément :

Définition 4.7. Le **volume (géométrique) d'un tétraèdre** $ABCD$ d'un espace euclidien E de dimension 3 est le nombre

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) \cdot h,$$

où h désigne la distance de D au plan (ABC).

Comme en dimension 2, cette quantité s'exprime par un produit mixte.

Proposition 4.8. *Soit $ABCD$ un tétraèdre. Alors* $\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$.

Démonstration. Notons H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). D'une part,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{HD}).$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC), donc $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{AH}) = 0$ et

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{HD}).$$

D'autre part, d'après la proposition 6.3 du chapitre III, on a

$$h = DH = \frac{|(\overrightarrow{DH} | \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|},$$

c'est-à-dire, vu la proposition 4.6,

$$h = \frac{|(\overrightarrow{DH} | \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{2\mathcal{A}(ABC)}.$$

En fin de compte,

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) \cdot h = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{HD} | \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|,$$

cqfd. ✓

Remarque 4.9. La définition géométrique du volume peut s'étendre à tout partie de l'espace qui peut se décomposer en tétraèdres. Voir l'exercice 8 pour le cas du parallélépipède. Par ailleurs, le lien entre le produit mixte et le volume explique que l'application $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ qui à un triplet de vecteurs associe son produit mixte est parfois appelée **forme volume** sur $\mathbb{R}_3$.

5 Exercices

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$, où E_1 et E_2 sont des sous-espaces de dimensions respectives d et $n-d$, avec $0 < d < n$. Soit aussi $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) une base de E_1 (resp. de E_2), de sorte que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

1) Soit $\mathcal{B}'_1$ (resp. $\mathcal{B}'_2$) une autre base de E_1 (resp. de E_2) et soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2$. Prouver : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{dét}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}'_1) \cdot \text{dét}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}'_2)$.

2) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'_1$ de E_1 et une base $\mathcal{B}'_2$ de E_2 telles que

(i) $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ soient de sens contraires;

(ii) $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ soient de sens contraires;

(iii) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2$ soient de même sens.

3) Soit $\mathcal{B}'_1$ une base de E_1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}_2$ sont de même sens si et seulement si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont de même sens.

4) Montrer que la donnée d'une orientation sur E et sur E_1 induit naturellement une orientation sur E_2.

Exercice 2. Soient E un espace affine euclidien de dimension n, A et B deux points de E, I le milieu de $[AB]$, et H son hyperplan médiateur. Si H_A (resp. H_B) désigne le demi-espace ouvert délimité par H qui contient A (resp. B), on sait (cf. théorème 4.13 du chapitre III) que

$$H_A = \{M \in E \ : \ MA < MB\}, \qquad H_B = \{M \in E \ : \ MA > MB\}.$$

Soit $(\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de $\vec{H}$, et soit $\vec{e}_1 = \overrightarrow{IA}$, de sorte que $\mathcal{R} = (I; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est un repère de E.

1) Caractériser les points de H_A et de H_B par leur abscisse dans $\mathcal{R}$.

2) En déduire :

a) $M \in H_A$ si et seulement si $(\overrightarrow{IM}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est de même sens que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$;

b) $M \in H_B$ si et seulement si $(\overrightarrow{IM}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est de sens contraire à $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Exercice 3. Dans un plan affine réel, soient A, B, C trois points non alignés. L'ensemble

$$\mathcal{I} = \{\text{bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)),\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}$$

s'appelle l'**intérieur (strict) du triangle** ABC.

1) Soit $M \in \mathcal{I}$.

a) Montrer que M, A, B ne sont pas alignés. On montrerait de même que M, B, C (resp. M, C, A) ne le sont pas non plus.

b) Prouver que les bases $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$, $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM})$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AM})$ sont de même sens.

c) En déduire que les repères affines (M, A, B), (M, B, C) et (M, C, A) sont de même sens.

2) On suppose que M n'est pas situé sur $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$. Montrer que si les repères affines (M, A, B), (M, B, C) et (M, C, A) sont de même sens, alors $M \in \mathcal{I}$.

Exercice 4. Dans un espace affine réel, déterminer le sens (direct ou indirect) des automorphismes affines suivants : les translations; les homothéties; les affinités (en particulier les symétries).

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1) Établir, pour tous $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t} \in E$:

a) $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge (\vec{z} \wedge \vec{t}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}]\vec{z} - [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]\vec{t}$.

b) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]\vec{t} = [\vec{t}, \vec{y}, \vec{z}]\vec{x} + [\vec{t}, \vec{z}, \vec{x}]\vec{y} + [\vec{t}, \vec{x}, \vec{y}]\vec{z}$.

2) Pour $\vec{a}, \vec{b}$ fixés, résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$. [Traiter d'abord le cas $(\vec{a}|\vec{b}) \neq 0$.]

Exercice 6. Dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, soit D une droite définie par un système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

et soient $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{u}' = (a', b', c')$. Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ dirige D.

Exercice 7. Soient A, B, C trois points distincts d'un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 8. On se place dans un espace euclidien orienté de dimension 3. On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ (dont les côtés sont portés par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), et on définit son volume par la formule

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(ABCD) \cdot h,$$

où h désigne la distance de E (ou F, G, H) au plan contenant le parallélogramme $ABCD$.

1) Démontrer qu'on a $\mathcal{V} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]\right|$.

2) Le résultat précédent et la formule du volume d'un tétraèdre vue en cours suggèrent qu'un parallélépipède contient six tétraèdres. Saurez-vous les dessiner ?

Exercice 9. Soit E un espace affine euclidien. Si $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est un système de $p \geq 1$ vecteurs de $\vec{E}$, le déterminant de la matrice $[\,(\vec{x}_i|\vec{x}_j)\,]_{i,j=1}^{p}$ s'appelle **déterminant de Gram du système X** et se note $G(X)$ ou $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p)$.

1) Démontrer : X est libre $\Leftrightarrow G(X) \neq 0 \Leftrightarrow G(X) > 0$.

2) Soient $\vec{F} \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace de $\vec{E}$, de base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, $\vec{x} \in \vec{E}$ et $\vec{y}$ le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $\vec{F}$. Démontrer l'identité : $G(\vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p) = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 G(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$.

3) Soit F un sous-espace de E non réduit à un point, de repère cartésien $(O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, et soit $A \in E$. Déduire de ce qui précède la formule : $d(A, F)^2 = \frac{G(\overrightarrow{AO}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)}{G(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)}$.

4) En utilisant la question précédente, retrouver la formule donnant la distance d'un point à une droite en dimension 3.

Chapitre V : Angles dans un espace euclidien

Il faut être conscient du fait que les notions d'angles requièrent l'existence et les propriétés des fonctions sinus et cosinus [1], et non l'inverse, comme cela se pratique au collège ou au lycée (parce qu'on s'y contente d'une définition intuitive des angles).

1 Angles non orientés de vecteurs, de demi-droites, de droites

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace affine euclidien de dimension ≥ 2.

Lemme 1.1. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{E}$. Alors la quantité $\frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ est dans $[-1, 1]$. Elle vaut 1 (resp. -1) si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ sont positivement liés (resp. négativement liés).*

Démonstration. C'est évident avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses cas d'égalité. ✓

On peut donc poser :

Définition 1.2. L'**angle non orienté de deux vecteurs non nuls** $\vec{u}, \vec{v}$ de $\overrightarrow{E}$ est le réel

$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \arccos \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \in [0, \pi].$$

Proposition 1.3. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{E}$.*

1) $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \widehat{\vec{v}, \vec{u}}$.
2) $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\pi}{2}$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*
3) $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont positivement liés.*
4) $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \pi$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont négativement liés.*
5) $\widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}} = \begin{cases} \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } \lambda\mu > 0; \\ \pi - \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } \lambda\mu < 0. \end{cases}$

Démonstration. Les points 1 et 2 sont évidents. Pour les points 3 et 4, il suffit d'appliquer le lemme 1.1. Prouvons le dernier point. On a :

$$\cos \widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}} = \frac{(\lambda\vec{u}|\mu\vec{v})}{\|\lambda\vec{u}\| \cdot \|\mu\vec{v}\|} = \frac{\lambda\mu\,(\vec{u}|\vec{v})}{|\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\lambda\mu}{|\lambda| \cdot |\mu|} \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}.$$

Par suite, $\cos \widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}} = \pm \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, selon que λ et μ sont de même signe ou non, d'où le résultat puisque les angles non orientés sont dans l'intervalle $[0, \pi]$. ✓

1. Traditionnellement, on les considère définies à partir de l'exponentielle complexe, donc par des séries.

Notation 1.4. Si A, B, C sont trois points de E avec A distinct de B et C, on pose $\widehat{BAC} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$. D'après la proposition précédente, on a donc $\widehat{CAB} = \widehat{BAC}$; s'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra également noter cet angle $\widehat{A}$.

Les définitions suivantes sont essentiellement un rappel (cf. exemple 7.17 du chapitre I).

Définitions 1.5.

1) Une **demi-droite vectorielle** est une partie de la forme $\vec{d} = \mathbb{R}_+\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Tout vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ de $\vec{d}$ sera dit **directeur**.

2) Une **demi-droite affine** est une partie de la forme $d = A + \vec{d}$, avec A un point de E appelé **origine** de d, et $\vec{d}$ une demi-droite vectorielle appelée **direction** de d. (Ici, il y a abus de langage, puisque la direction d'une demi-droite affine n'est pas une droite, donc pas un sous-espace vectoriel.)

3) Deux demi-droites d_1, d_2 de même origine sont dites **opposées** si $\vec{d_2} = -\vec{d_1}$.

Notation 1.6. Si A, B sont deux points distincts de E, la demi-droite $A + \mathbb{R}_+\overrightarrow{AB}$ se note $[AB)$.

Définitions 1.7.

1) L'**angle non orienté $\widehat{\vec{d_1}, \vec{d_2}}$ de deux demi-droites vectorielles $\vec{d_1} = \mathbb{R}_+\vec{u}_1, \vec{d_2} = \mathbb{R}_+\vec{u}_2$** est l'angle non orienté des deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Observons tout de go que cette définition est indépendante du choix des vecteurs directeurs en vertu du point 5 de la proposition 1.3.

2) L'**angle non orienté $\widehat{d_1, d_2}$ de deux demi-droites affines** est l'angle non orienté de leurs directions. Dans la majorité des cas, on considèrera des demi-droites affines de même origine.

On obtient facilement les propriétés des angles non orientés de demi-droites à partir de celles des angles non orientés de vecteurs.

Proposition 1.8. *Soient d_1, d_2 deux demi-droites de E, de même origine.*

1) $\widehat{d_1, d_2} = 0$ *ssi* $d_1 = d_2$.

2) $\widehat{d_1, d_2} = \pi$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont opposées.*

3) $\widehat{d_1, d_2} = \frac{\pi}{2}$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont orthogonales.*

4) *Si* d_1' *est la demi-droite opposée à* d_1, $\widehat{d_1', d_2} = \pi - \widehat{d_1, d_2}$.

Passons maintenant aux angles non orientés de droites. De nouveau, la propriété 5 de la proposition 1.3 permettent de poser sans ambiguïté :

Définitions 1.9.

1) L'**angle non orienté $\widehat{\vec{D_1}, \vec{D_2}}$ de deux droites vectorielles $\vec{D_1} = \mathbb{R}\vec{u}_1, \vec{D_2} = \mathbb{R}\vec{u}_2$** est le réel

$$\widehat{\vec{D_1}, \vec{D_2}} = \arccos \frac{|(\vec{u}_1|\vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2) L'**angle non orienté $\widehat{D_1, D_2}$ de deux droites affines** est l'angle non orienté de leurs directions.

Les propriétés de ces angles sont très simples, tellement simples que leur intérêt en est limité.

Proposition 1.10. *Soient D_1, D_2 deux droites de E.*

1) $\widehat{D_1, D_2} = 0$ *ssi* $D_1 \parallel D_2$.

2) $\widehat{D_1, D_2} = \frac{\pi}{2}$ *ssi* D_1 *et* D_2 *sont orthogonales.*

Terminons ce premier paragraphe avec en faisant un lien avec les notions du chapitre précédent.

Proposition 1.11. *Supposons que* $\dim E = 3$. *Alors, pour tous* $\vec{u}, \vec{v}$ *non nuls de* $\overrightarrow{E}$, *on a*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}}.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Lagrange et la définition d'un angle non orienté, on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}|\vec{v})^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \widehat{\vec{u}, \vec{v}}.\end{aligned}$$

Mais $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in [0, \pi]$, donc $\sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \geq 0$ et le résultat s'ensuit. ✓

Dans la pratique, les angles non orientés suffisent à obtenir de nombreux résultats de « géométrie élémentaire » dans le plan, comme par exemple ceux qui seront énoncés dans le théorème 5.1. Mais ils deviennent vite insuffisants pour faire de la géométrie plus élaborée, par exemple pour définir et étudier les rotations ou les bissectrices dans un plan euclidien. D'où l'intérêt du paragraphe suivant.

2 Angles orientés de vecteurs, de demi-droites, de droites

Ici, E désigne un **plan affine euclidien orienté**. Rappelons que si $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$, leur déterminant dans une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas du choix d'une telle base (cf. proposition 3.1 du chapitre IV), on l'appelle produit mixte des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on le note $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Lemme 2.1. *Pour tous* $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{E}$, *on a*

$$(\vec{u}|\vec{v})^2 + [\vec{u}, \vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2.$$

Démonstration. Fixons une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{E}$. Alors, avec des notations évidentes on a

$$(\vec{u}|\vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2, \qquad [\vec{u}, \vec{v}] = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

et le résultat s'ensuit. ✓

Lemme 2.2. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* $a^2 + b^2 = 1$, *alors l'ensemble des solutions* θ *du système*

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

est une classe de congruence modulo 2π, *c'est-à-dire un élément du groupe quotient* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. *(En particulier, il est non vide.)*

Démonstration. Comme $a^2 + b^2 = 1$, on a $0 \leq a^2 \leq 1$ et donc $-1 \leq a \leq 1$. Par conséquent, le nombre $\alpha = \arccos a \in [0, \pi]$ est bien défini. D'autre part, on a $b^2 = 1 - a^2 = \sin^2\theta$, si bien que $b = \pm \sin\alpha$. Posons

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{si } b = \sin\alpha, \text{ i.e. si } b \geq 0, \\ -\alpha & \text{si } b = -\sin\alpha, \text{ i.e. si } b \leq 0. \end{cases}$$

Alors $b = \sin\theta$ dans tous les cas, et $a = \cos\theta$ également, donc on a trouvé une solution au système proposé, et il est clair (en raison des propriétés des fonctions sinus et cosinus) que toute autre solution lui est congrue modulo 2π. ✓

Avec les deux lemmes précédents, il est donc possible de poser :

Définitions 2.3. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. On appelle **angle orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, et on note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, la classe de congruence modulo 2π des réels θ vérifiant :

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Les éléments de cette classe de congruence $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ sont appelés les **mesures** de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, et l'unique mesure de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelée **mesure principale** de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Enfin, la classe de congruence $0\ [2\pi]$ est appelée **angle nul**, et la classe $\pi\ [2\pi]$ est appelée **angle plat**.

Remarque 2.4. Conventions graphiques.

Disons clairement une bonne fois pour toutes qu'**un angle orienté est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ donc n'est pas un réel**, contrairement à ses mesures (ses éléments). Il est peut-être loisible de faire au passage le :

Rappel 2.5. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, le quotient $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$ du groupe abélien $(\mathbb{R}, +)$ par le sous-groupe (forcément distingué) $\alpha\mathbb{Z}$ est un groupe abélien (pour l'addition). Ce n'est autre que l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$, qui est la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y - x \in \alpha\mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in x + \alpha\mathbb{Z}.$$

On notera $x\ [\alpha]$ la classe de congruence modulo α de x, plutôt que $x + \alpha\mathbb{Z}$. Ainsi, l'addition dans $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$ se lit : $x\ [\alpha] + y\ [\alpha] = (x + y)\ [\alpha]$. Par ailleurs, on adoptera le léger raccourci d'écriture $x = y\ [\alpha]$ au lieu de $x\ [\alpha] = y\ [\alpha]$, comme on a l'habitude de le faire en arithmétique.

Remarque 2.6. Il n'est pas toujours nécessaire d'ajouter un modulo 2π à une égalité d'angles orientés. Par exemple, il suffit d'écrire $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ puisqu'il s'agit déjà d'une égalité entre **ensembles**. En revanche, une écriture du type $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ n'a pas de sens sans l'indication de la congruence.

Faisons un lien entre les notions d'angles orientés et non orientés.

Proposition 2.7. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. Alors $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pm\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\ [2\pi]$. Plus précisément, si θ désigne la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, alors*

$$\theta = \begin{cases} \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } [\vec{u}, \vec{v}] \geq 0, \\ -\widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } [\vec{u}, \vec{v}] \leq 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $\vec{u}, \vec{v}$ sont indépendants, ceci peut encore s'écrire

$$\theta = \begin{cases} \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base directe,} \\ -\widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base indirecte.} \end{cases}$$

Démonstration. Pour simplifier, notons $\alpha = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Les définitions de θ et α impliquent l'égalité $\cos\theta = \cos\alpha$, c'est-à-dire $\theta = \pm\alpha\ [2\pi]$, d'où la première identité. Mais comme $\alpha \in [0, \pi]$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, on a nécessairement $\theta = \pm\alpha$. Ceci prouve la seconde identité.

Mais on a alors aussi $\sin\theta = \sin(\pm\alpha) = \pm\sin\alpha$. Comme $\sin\alpha \geq 0$, on en déduit :

$$\theta = \alpha \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \geq 0.$$

Pour la deuxième assertion, il suffit d'observer que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{E}$, alors c'est une base directe si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$ par définition du produit mixte. ✓

Voici une liste des propriétés importantes des angles orientés de vecteurs.

Proposition 2.8. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs non nuls de $\vec{E}$, et λ, μ des réels non nuls.*

1) a) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0\ [2\pi]$ *ssi* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont positivement liés.*

b) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \pi\ [2\pi]$ *ssi* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont négativement liés.*

c) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *ssi* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base orthogonale directe.*

d) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *ssi* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base orthogonale indirecte.*

e) $\widehat{(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v})} = \begin{cases} \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} & \text{si } \lambda\mu > 0; \\ \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi\ [2\pi] & \text{si } \lambda\mu < 0. \end{cases}$

2) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$ **(relation de Chasles)**. *En particulier,* $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$.

3) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ *ssi* $\widehat{(\vec{u}, \vec{x})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{y})}$ **(règle d'échange)**.

4) *La notion d'angle orienté de vecteurs dépend de l'orientation choisie : si on change l'orientation, les angles orientés de vecteurs sont contrariés (i.e. changés en leurs opposés).*

Démonstration.

1) Pour cette première série de résultats, nous allons nous ramener aux propriétés vues dans la proposition 1.3 grâce aux liens établis dans la proposition 2.7. Notons donc $\theta \in]-\pi, \pi]$ la mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et $\alpha = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in [0, \pi]$.

a) Donnons toutes les explications pour cette première assertion. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0\ [2\pi] &\Leftrightarrow \theta\ [2\pi] = 0\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \qquad [\text{car } \theta \in]-\pi, \pi]] \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \qquad [\text{car } \theta = \pm\alpha \text{ d'après la proposition 2.7}] \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont positivement liés} \qquad [\text{d'après la proposition 1.3}]. \end{aligned}$$

b) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta\ [2\pi] = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont négativement liés.

c) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta\ [2\pi] = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ et $[\vec{u}, \vec{v}] \geq 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale directe.

d) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ et $[\vec{u}, \vec{v}] \leq 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale indirecte.

e) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, notons θ' la mesure principale de $\widehat{(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v})}$ et $\alpha' = \widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}}$. Avec les définitions, on voit que $\cos\theta' = \operatorname{sgn}(\lambda\mu)\cos\theta$ et $\sin\theta' = \operatorname{sgn}(\lambda\mu)\sin\theta$, d'où le résultat.

2) Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des mesures des angles $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$, et $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$, respectivement. Nous devons démontrer que $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3\ [2\pi]$, et pour cela il suffit d'obtenir la double égalité

$$\begin{cases} \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_3, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_3. \end{cases}$$

Commençons par observer que nous pouvons supposer que les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont unitaires. En effet, les diviser par leurs normes respectives ne changerait pas la valeur des angles $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$, et $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$, d'après la propriété 1.e ci-dessus. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= (\vec{u}|\vec{v}), \quad & \cos\theta_2 &= (\vec{v}|\vec{w}), \quad & \cos\theta_3 &= (\vec{u}|\vec{w}), \\ \sin\theta_1 &= [\vec{u}, \vec{v}], \quad & \sin\theta_2 &= [\vec{v}, \vec{w}], \quad & \sin\theta_3 &= [\vec{u}, \vec{w}]. \end{aligned}$$

Fixons une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{E}$, dans laquelle nous écrivons les composantes de nos trois vecteurs :

$$\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}, \quad \vec{v} = \binom{v_1}{v_2}, \quad \vec{w} = \binom{w_1}{w_2}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\
&= (\vec{u}|\vec{v})\ (\vec{v}|\vec{w}) \ - [\vec{u}, \vec{v}][\vec{v}, \vec{w}] \\
&= (u_1v_1 + u_2v_2)(v_1w_1 + v_2w_2) - (u_1v_2 - v_1u_2)(v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= \cdots \ \text{[on développe, on simplifie et on réduit]} \\
&= (u_1w_1 + u_2w_2)(v_1^2 + v_2^2) \\
&= (\vec{u}|\vec{w}) \quad \text{[puisque } \vec{v} \text{ est unitaire]} \\
&= \cos\theta_3.
\end{aligned}$$

L'égalité des sinus se prouve de la même façon[2].

3) Il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{x})} + \widehat{(\vec{x}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{y})} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{x})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{y})}.$$

4) Changer d'orientation revient à changer la classe des bases orthonormées directes en la classe des bases orthonormées indirectes. Par conséquent, dans la définition d'un angle orienté, les mesures gardent le même cosinus mais leur sinus est changé en son opposé. Autrement dit, les mesures sont changées en leurs opposées.

✓

Là encore, la propriété 1.e de la proposition 2.8 permet de définir sans ambiguïté les notions d'angles orientés pour les demi-droites vectorielles ou affines.

Définitions 2.9.

1) L'**angle orienté $\widehat{(\vec{d_1}, \vec{d_2})}$ de deux demi-droites vectorielles $\vec{d_1} = \mathbb{R}_+\vec{u}_1, \vec{d_2} = \mathbb{R}_+\vec{u}_2$** est l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

2) L'**angle orienté $\widehat{(d_1, d_2)}$ de deux demi-droites affines** est l'angle orienté de leurs directions. Comme dans le cas des angles non orientés, on considèrera surtout des demi-droites affines de même origine.

Par définition, un angle orienté de demi-droites est donc encore un élément du groupe abélien $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Comme dans le cas des vecteurs, ses éléments sont appelés ses **mesures** et il y en a une, et une seule, dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, dite **mesure principale**.

On remarquera au passage qu'on a donc égalité entre le groupe des angles orientés de vecteurs et celui des angles orientés de demi-droites, puisque le groupe en question n'est autre que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans les deux cas. Traditionnellement, on se contente de dire que **$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le groupe des angles orientés de vecteurs**. Notons qu'il est canoniquement isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (via l'exponentielle complexe), ou encore à la sphère unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ (via

2. Le lecteur aura peut-être remarqué une similitude entre cette preuve et celle qui permet de prouver l'identité $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$ pour les nombres complexes. C'est normal, puisque l'on sait bien que la notion d'argument admet une interprétation en termes d'angle orienté dans le plan complexe...

l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$). On établira un autre isomorphisme essentiel lorsqu'on étudiera le groupe orthogonal.

Les propriétés classiques des angles orientés de demi-droites sont établies facilement à partir de celles des angles orientés de vecteurs. Nous les donnons dans le cadre affine, mais elles sont évidemment valables dans le cadre vectoriel.

Proposition 2.10. *Soient d_1, d_2, d_3, d_4 des demi-droites de E, de même origine.*

1) *Si θ est la mesure principale de l'angle $(\widehat{d_1, d_2})$, alors $\theta = \pm \widehat{d_1, d_2}$.*

2) a) $(\widehat{d_1, d_2}) = 0\ [2\pi]$ *ssi* $d_1 = d_2$.

b) $(\widehat{d_1, d_2}) = \pi\ [2\pi]$ *ssi d_1 et d_2 sont opposées.*

c) $(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *ssi d_1 et d_2 sont orthogonales et deux vecteurs directeurs respectifs quelconques $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de ces demi-droites forment une base directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.*

d) $(\widehat{d_1, d_2}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *ssi d_1 et d_2 sont orthogonales et deux vecteurs directeurs respectifs quelconques $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de ces demi-droites forment une base indirecte $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.*

e) *Si d_1' est la demi-droite opposée à d_1, $(\widehat{d_1', d_2}) = (\widehat{d_1, d_2}) + \pi\ [2\pi]$.*

3) $(\widehat{d_1, d_2}) + (\widehat{d_2, d_3}) = (\widehat{d_1, d_3})$ **(relation de Chasles)**. *En particulier, $(\widehat{d_1, d_2}) = -(\widehat{d_2, d_1})$.*

4) $(\widehat{d_1, d_2}) = (\widehat{d_3, d_4})$ *ssi* $(\widehat{d_1, d_3}) = (\widehat{d_2, d_4})$ **(règle d'échange)**.

5) *La notion d'angle orienté de demi-droites dépend de l'orientation choisie : si on change l'orientation, les angles orientés de demi-droites sont contrariés (i.e. changés en leurs opposés).*

Venons-en, pour finir ce paragraphe, à la notion d'angle orienté d'un couple de droites.

Définitions 2.11.

1) L'**angle orienté $(\widehat{\vec{D}_1, \vec{D}_2})$ de deux droites vectorielles $\vec{D}_1, \vec{D}_2$** est l'ensemble de toutes les mesures de tous les angles orientés $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$, où $\vec{u}_i$ est un vecteur directeur de $\vec{D}_i$. On appelle **mesure** de l'angle $(\widehat{\vec{D}_1, \vec{D}_2})$ tout élément de cet angle.

2) L'**angle orienté $(\widehat{D_1, D_2})$ de deux droites affines** est l'angle orienté de leurs directions.

La principale différence entre les angles orientés de droites et les angles orientés de vecteurs (ou de demi-droites) réside en le fait qu'ils n'appartiennent pas au même groupe de congruence. Le résultat suivant précise cela.

Proposition 2.12. *Soient D_1, D_2 deux droites de E, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *θ est une mesure de $(\widehat{D_1, D_2})$;*

(ii) *il existe $\vec{u}_1 \in \vec{D}_1$ et $\vec{u}_2 \in \vec{D}_2$ non nuls tels que $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta\ [2\pi]$;*

(iii) *il existe $\vec{u}_1 \in \vec{D}_1$ et $\vec{u}_2 \in \vec{D}_2$ non nuls tels que $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta + \pi\ [2\pi]$;*

(iv) *pour tous $\vec{v}_1 \in \vec{D}_1$ et $\vec{v}_2 \in \vec{D}_2$ non nuls, on a $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \theta\ [2\pi]$ ou bien $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \theta + \pi\ [2\pi]$.*

(v) $(\widehat{D_1, D_2}) = \theta\ [\pi]$.

En particulier, l'angle orienté $(\widehat{D_1, D_2})$ est un élément du groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : par définition des mesures de $(\widehat{D_1, D_2})$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : il suffit d'observer que $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta\ [2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{-\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta + \pi\ [2\pi]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : supposons qu'il existe des vecteurs directeurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de D_1, D_2 tels que $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta\ [2\pi]$. Les autres vecteurs directeurs de D_1, D_2 sont respectivement de la forme $\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ et $\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$ avec λ_1, λ_2 non nuls.

D'après la propriété 1.e de la proposition 2.8, si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ alors $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \theta\ [2\pi]$, et si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ alors $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) + \pi\ \ [2\pi] = (\theta + \pi)\ [2\pi]$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : par définition, $(\widehat{D_1, D_2})$ est l'ensemble de toutes les mesures de tous les angles orientés $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$, où $\vec{u}_i$ est un vecteur directeur de $\overrightarrow{D_i}$. Par hypothèse (iv) on a donc

$$(\widehat{D_1, D_2}) = \big(\theta\ [2\pi]\big) \cup \big((\theta + \pi)\ [2\pi]\big) = \theta\ [\pi].$$

(v) $\Rightarrow$ (i) : si $(\widehat{D_1, D_2}) = \theta\ [\pi]$, alors en particulier $\theta \in (\widehat{D_1, D_2})$, i.e. θ est une mesure de $(\widehat{D_1, D_2})$. ✓

Vu ce qui précède, le groupe quotient $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ **est donc le groupe des angles orientés de droites** (on prendra garde à ne pas le confondre avec le groupe des angles orientés de vecteurs (ou de demi-droites) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). En particulier, il existe une unique mesure de $(\widehat{D_1, D_2})$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dite **mesure principale** de $(\widehat{D_1, D_2})$. Quant aux propriétés des angles orientés de droites, on peut en retenir la liste suivante. De nouveau, nous nous contentons de les écrire dans un contexte affine.

Proposition 2.13. *Soient D_1, D_2, D_3, D_4 des droites de E.*

1) *Si θ est la mesure principale de l'angle $(\widehat{D_1, D_2})$, alors $\theta = \pm\widehat{D_1, D_2}$.*

2) a) $(\widehat{D_1, D_2}) = 0\ [\pi]$ *ssi* $D_1 \parallel D_2$.

b) $(\widehat{D_1, D_2}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *ssi D_1 et D_2 sont perpendiculaires.*

3) $(\widehat{D_1, D_2}) + (\widehat{D_2, D_3}) = (\widehat{D_1, D_3})$ **(relation de Chasles)**. *En particulier,* $(\widehat{D_1, D_2}) = -(\widehat{D_2, D_1})$.

4) $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{D_3, D_4})$ *ssi* $(\widehat{D_1, D_3}) = (\widehat{D_2, D_4})$ **(règle d'échange)**.

5) *La notion d'angle orienté de droites dépend de l'orientation : si on change l'orientation, les angles sont contrariés (i.e. changés en leurs opposés).*

Démonstration. Similaire à celle concernant les angles orientés de demi-droites (on utilise les résultats de la proposition précédente). ✓

3 Réflexions et rotations planes

On se place encore dans un **plan affine euclidien orienté** E, même si certains résultats sont valables en toute dimension, comme nous le verrons plus loin.

Il est naturel de se demander comment un automorphisme affine de E agit sur les différentes notions d'angles dont nous avons parlé. Dans ce paragraphe, nous allons traiter le cas des réflexions planes, puis des rotations planes, que nous allons définir dans un instant (les autres applications affines classiques seront traitées ultérieurement). En ce qui concerne les angles de demi-droites, il nous faut d'ailleurs vérifier d'abord que ces applications transforment bien toute demi-droite en une demi-droite (pour les droites, on le sait déjà). On a à ce sujet un résultat général :

Lemme 3.1. *Soient $f \in GA(E)$ et d une demi-droite d'origine A, dirigée par $\vec{u}$. Alors $f(d)$ est la demi-droite d'origine $f(A)$, dirigée par $\vec{f}(\vec{u})$.*

Démonstration. Puisque f est affine, on a $f(d) = f(A + \mathbb{R}_+\vec{u}) = f(A) + \mathbb{R}_+\vec{f}(\vec{u})$. Comme f est aussi bijective, $\vec{f}(\vec{u})$ est non nul, donc $f(d)$ est bien la demi-droite indiquée. ✓

Rappelons qu'une réflexion est une symétrie orthogonale d'axe un hyperplan, c'est-à-dire une droite ici.

Proposition 3.2. *Les réflexions planes conservent les notions d'angles non orientés, et contrarient les notions d'angles orientés.*

Démonstration. Soit s une réflexion de E. Clairement, il suffit de vérifier les assertions pour sa partie linéaire $\vec{s}$, et il suffit également de les vérifier pour les angles de vecteurs. Soient donc $\vec{x}$, $\vec{y} \in \vec{E}$ non nuls. Il a été vu (chapitre III, proposition 8.9) que toute symétrie orthogonale vectorielle conserve le produit scalaire et la norme (c'est une isométrie). C'est donc le cas en particulier pour $\vec{s}$, et on a :

$$\widehat{\vec{s}(\vec{x}), \vec{s}(\vec{y})} = \arccos \frac{(\vec{s}(\vec{x})|\vec{s}(\vec{y}))}{\|\vec{s}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{s}(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \widehat{\vec{x}, \vec{y}}.$$

Ainsi, $\vec{s}$ conserve les angles non orientés de vecteurs. Mais ce calcul montre aussi que $\vec{s}$ conserve le cosinus des mesures d'un angle orienté. D'autre part, on sait (chapitre II, proposition 5.3) que sa matrice dans une bonne base orthonormée s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de sorte que $\operatorname{dét} \vec{s} = -1$. On en déduit

$$[\vec{s}(\vec{x}), \vec{s}(\vec{y})] = \operatorname{dét} \vec{s} \cdot [\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{x}, \vec{y}],$$

ce qui montre que le sinus des mesures d'un angle orienté est changé en son opposé.

De ce qui précède on déduit que $(\widehat{\vec{s}(\vec{x}), \vec{s}(\vec{y})}) = -(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$. ✓

Proposition 3.3. *(Ici, E peut être de dimension quelconque.)*

1) *Si F, F' sont deux sous-espaces strictement parallèles de E, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{F}^\perp = \vec{F'}^\perp$ tel que $F' = t_{\vec{u}}(F)$, et alors $s_{F'} \circ s_F = t_{2\vec{u}}$.*

2) *Réciproquement, toute translation $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux symétries orthogonales d'axes strictement parallèles et de dimension d, pour tout $d \in [\![0, n-1]\!]$.*

Démonstration. Fixons $A \in F$, notons $A' = p_{F'}(A)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} \in \vec{F}^\perp$.

1) Pour tout $M \in F$, on a

$$M + \vec{u} = A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA'} = A' + \overrightarrow{AM},$$

de sorte que $M + \vec{u} \in A' + \vec{F} = A' + \vec{F'} = F'$. Donc $t_{\vec{u}}(F) \subset F'$ et il y a égalité car ce sont des sous-espaces de même dimension.

Réciproquement, soit $\vec{v} \in \vec{F}^\perp$ tel que $F' = t_{\vec{v}}(F)$. Alors $A + \vec{v} \in F' \cap (A + \vec{F}^\perp)$, d'où $A + \vec{v} = A'$ et $\vec{v} = \vec{u}$.

Ensuite, $s_{F'} \circ s_F$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{s_{F'} \circ s_F} = s_{\vec{F}}^2 = \mathrm{id}$ (car $\vec{F} = \vec{F'}$), c'est donc une translation. Comme

$$s_{F'} \circ s_F(A) = s'_F(A) = A + 2\overrightarrow{AA'} = A + 2\vec{u},$$

on en déduit le résultat voulu.

2) Soit $\vec{u} \in \vec{E}$, et soit $d \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $\vec{u}^\perp$ est de dimension $n-1$ (si $\vec{u} \neq \vec{0}$) ou n (sinon), il existe un (en fait, une infinité de) sous-espace F de dimension d tel que $\vec{F} \subset \vec{u}^\perp$. Alors $\vec{u} \in \vec{F}^\perp$, et si l'on pose $F' = t_{\vec{u}/2}(F)$, on aura bien $t_{\vec{u}} = s_{F'} \circ s_F$ d'après le 1). ✓

Corollaire 3.4. *Toute translation du plan est une isométrie, et conserve les notions d'angles, orientés ou non orientés.*

Nous généraliserons ultérieurement ce résultat (et l'analogue pour les réflexions) à la dimension quelconque.

Voici maintenant le résultat qui est à la base de la notion de rotation.

Proposition 3.5. *Si $\vec{u} \in \vec{E}$ est non nul et $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\vec{u}' \in \vec{E}$ tel que $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \theta\ [2\pi]$.*

Démonstration. Notons $r = \|\vec{u}\|$, $\vec{i} = \vec{u}/r$, et soit $\vec{j} \in \vec{E}$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ soit une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Posons $\vec{u}' = (r\cos\theta)\vec{i} + (r\sin\theta)\vec{j}$. Un calcul facile montre que

$$\|\vec{u}'\| = r, \quad \frac{(\vec{u}|\vec{u}')}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}'\|} = \cos\theta, \quad \frac{[\vec{u}, \vec{u}']}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}'\|} = \frac{\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}')}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}'\|} = \sin\theta,$$

ainsi $\vec{u}'$ convient.

Réciproquement, soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de norme r et tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \theta\ [2\pi]$. Comme $r > 0$, on a aussi $(\widehat{\vec{i}, \vec{v}}) = \theta\ [2\pi]$, d'où

$$\cos\theta = \frac{(\vec{i}|\vec{v})}{\|\vec{i}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{[\vec{i}, \vec{v}]}{\|\vec{i}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{y}{r},$$

si bien que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, donc $\vec{v} = \vec{u}'$. ✓

On en déduit immédiatement :

Corollaire 3.6. *Soient $A \in E$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout point $M \in E$ distinct de A, il existe un unique point $M' \in E$ vérifiant $AM' = AM$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta\ [2\pi]$.*

Définition 3.7. Soient $A \in E$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation de centre A et d'angle θ**, et on note $r_{A,\theta}$ l'application de E dans E définie par les conditions :

(i) $r_{A,\theta}(A) = A$;

(ii) si $M \neq A$, $r_{A,\theta}(M) = M'$, où le point M' est défini par le corollaire précédent.

Remarques 3.8.

1) Dans cette définition, il y a un abus de vocabulaire, puisque θ n'est pas un angle, mais une mesure d'angle !

2) Observons au passage qu'on a l'identité $r_{A,\theta} = r_{A,\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'\ [2\pi]$.

Avec la définition, il n'est pas très facile de voir qu'une rotation est une application affine. Pour cela, nous allons ruser. Rappelons que la composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation (cf. proposition 3.3). Mais que se passe-t-il lorsque les axes sont sécants ?

Proposition 3.9.

1) *Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en un point O, et soit α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{D_1, D_2})$. Alors $s_{D_2} \circ s_{D_1} = r_{O,2\alpha}$.*

2) *Réciproquement, toute rotation $r_{O,\theta}$ s'écrit comme composée $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ pour tout couple de droites (D_1, D_2) sécantes en O et vérifiant $(\widehat{D_1, D_2}) = \frac{\theta}{2}\ [\pi]$.*

Démonstration. Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en un point O et telles que $(\widehat{D_1, D_2}) = \alpha\ [\pi]$. Ainsi, il existe $A_1 \in D_1$ et $A_2 \in D_2$ tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}}) = \alpha\ [2\pi]$. Si $M \in E$, notons $M' = s_{D_1}(M)$ et $M'' = s_{D_2}(M')$. On veut voir que $M'' = r_{O,2\alpha}(M)$.

Supposons $M \neq O$ (le résultat étant évident sinon). Les deux réflexions considérées étant des isométries, on a déjà $OM = OM' = OM''$. D'autre part,

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM''}}).$$

Mais les réflexions contrarient les angles orientés, donc, en utilisant le fait que O, A_1 (resp. O, A_2) sont fixes par s_{D_1} (resp. s_{D_2}) :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1}}) &= -(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM'}}) \\
(\widehat{\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM''}}) &= -(\widehat{\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA_2}}).
\end{aligned}$$

De ce qui précède, on déduit :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA_2}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}}) \\
&= 2\alpha\ [2\pi],
\end{aligned}$$

cqfd.

Réciproquement, soit $r_{O,\theta}$ une rotation. Soient $A_1 \neq O$ et $A_2 = r_{O,\frac{\theta}{2}}(A_1)$. Alors $A_2 \neq O$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}}) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Si $D_1 = (OA_1)$ et $D_2 = (OA_2)$, on a donc $(\widehat{D_1, D_2}) = \frac{\theta}{2}\ [\pi]$. D'après le sens direct, on trouve que $s_{D_2} \circ s_{D_1} = r_{O,\theta}$. ✓

Vu ce que l'on sait pour les réflexions, on obtient en particulier :

Corollaire 3.10. *Toute rotation plane est une isométrie, et conserve les notions d'angles, orientés ou non orientés.*

4 Bissectrices

On se place toujours dans un **plan affine euclidien orienté** E.

Faisons une remarque préliminaire à ce qui suit : une réflexion étant une symétrie, donc une involution, dire qu'une réflexion transforme un objet (point, droite ou demi-droite) en un autre objet revient à dire qu'elle les échange.

Proposition 4.1. *Soient d_1 et d_2 deux demi-droites affines de même origine A. Il existe une unique droite Δ telle que la réflexion s_Δ échange d_1 et d_2 :*

1) *si $d_1 \neq d_2$, Δ est la médiatrice de tout segment $[A_1A_2]$, avec $A_1 \in d_1$ et $A_2 \in d_2$ tels que $AA_1 = AA_2 > 0$;*

2) *si $d_1 = d_2$, Δ est le support commun de d_1 et d_2.*

Dans les deux cas, Δ passe par le point A.

Démonstration. 1) Supposons d'abord que $d_1 \neq d_2$. Soient A_1, A_2 définis comme dans l'énoncé, de sorte que d_1 (resp. d_2) est la demi-droite d'origine A et dirigée par $\overrightarrow{AA_1}$ (resp. $\overrightarrow{AA_2}$). Soit Δ une droite du plan. D'après le lemme 3.1, $s_\Delta(d_1)$ est la demi-droite d'origine $s_\Delta(A)$ et dirigée par $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{AA_1})$, d'où :

$$s_\Delta(d_1) = d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} s_\Delta(A) = A \\ \overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{AA_1}) \text{ et } \overrightarrow{AA_2} \text{ positivement liés} \end{cases}$$

Comme $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{s_\Delta(A)s_\Delta(A_1)} = \overrightarrow{As_\Delta(A_1)}$, cela revient à :

$$s_\Delta(d_1) = d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} s_\Delta(A) = A \\ \exists \lambda \geq 0 : \overrightarrow{As_\Delta(A_1)} = \lambda \overrightarrow{AA_2} \end{cases}$$

Mais s_Δ est une isométrie (cf. chapitre III, proposition 8.9), donc on a $As_\Delta(A_1) = s_\Delta(A)s_\Delta(A_1) = AA_1 = AA_2$, de sorte que si ce λ existe, il vérifie $|\lambda| = 1$, donc $\lambda = 1$. Il s'ensuit que

$$s_\Delta(d_1) = d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} s_\Delta(A) = A \\ \overrightarrow{As_\Delta(A_1)} = \overrightarrow{AA_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \Delta \\ s_\Delta(A_1) = A_2 \end{cases}$$

Or nous savons (proposition 5.5 du chapitre III) qu'il existe une réflexion, et une seule, échangeant deux points distincts donnés : celle d'axe la médiatrice du segment qu'ils forment. C'est pourquoi nous obtenons finalement l'équivalence

$$s_\Delta(d_1) = d_2 \Leftrightarrow \Delta \text{ est la médiatrice de } [A_1A_2]$$

puisque la condition « A sur la médiatrice de $[A_1A_2]$ » revient à $AA_1 = AA_2$, qui est une de nos hypothèses.

2) Supposons maintenant que $d_1 = d_2$. Soit $A_1 \neq A$ un point de d_1. En raisonnant comme au 1), on aboutit à

$$s_\Delta(d_1) = d_2 = d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} s_\Delta(A) = A \\ s_\Delta(A_1) = A_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \Delta \\ A_1 \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = (AA_1),$$

cqfd. ✓

La proposition précédente dit que la figure géométrique formée par deux demi-droites de même origine possède un, et un seul, axe de symétrie. Cet axe mérite donc qu'on lui accorde notre attention :

Définition 4.2. Soient d_1 et d_2 deux demi-droites affines de même origine A. L'unique axe de symétrie de la figure formée par d_1 et d_2 (celui défini par la proposition précédente) s'appelle la **bissectrice intérieure** du couple (d_1, d_2).

Pour satisfaire notre esprit, voici le résultat qui justifie l'emploi du mot « bissectrice » par son étymologie. Pour l'explication de l'adjectif « intérieure », on patientera encore quelques lignes.

Proposition 4.3. *Soient d_1 et d_2 deux demi-droites affines de même origine A. Il y a exactement deux demi-droites δ d'origine A qui vérifient l'identité $\widehat{(d_1, \delta)} = \widehat{(\delta, d_2)}$: ce sont les demi-droites d'origine A qui sont supportées par la bissectrice intérieure de (d_1, d_2).*

Démonstration. Exercice. ✓

Remarque 4.4. On pouvait définir la notion de bissectrice intérieure à partir de ce résultat, et montrer ensuite l'équivalence avec la propriété énoncée dans la proposition 4.1.

On se souvient peut-être qu'il existe une autre notion de bissectrice pour un couple de demi-droites. Elle est motivée par le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Soient d_1 et d_2 deux demi-droites d'origine A, et soient d_1', d_2' leurs opposées respectives. Alors :*

1) *La bissectrice intérieure Δ de (d_1, d_2) est également la bissectrice intérieure de (d_1', d_2').*

2) *Les couples (d_1', d_2) et (d_1, d_2') ont même bissectrice intérieure Δ', qui n'est autre que la perpendiculaire à Δ en A.*

Démonstration.

1) Soit D_1 (resp. D_2) le support commun de d_1, d_1' (resp. de d_2, d_2'). Observons que $s_\Delta(D_1)$ est une droite contenant $s_\Delta(d_1) = d_2$, c'est donc la droite D_2.

L'image de d_1' par s_Δ est donc une demi-droite d'origine A (ce point est fixe) et est supportée par $s_\Delta(D_1) = D_2$. C'est nécessairement d_2 ou d_2'. Ce ne peut être la première solution, car $s_\Delta(d_1') = d_2$ équivaut à $s_\Delta(d_2) = d_1'$, alors qu'on doit avoir $s_\Delta(d_2) = d_1$. Donc $s_\Delta(d_1') = d_2'$.

Autre méthode : soit δ l'une des demi-droites d'origine A supportées par Δ. D'après la proposition 4.3 on a :

$$\widehat{(d_1', \delta)} = \widehat{(d_1', d_1)} + \widehat{(d_1, \delta)} = \pi \ [2\pi] + \widehat{(d_1, \delta)} = \widehat{(d_2, d_2')} + \widehat{(\delta, d_2)} = \widehat{(\delta, d_2')}.$$

On conclut en utilisant la proposition 4.3 dans l'autre sens.

2) Le fait que (d_1', d_2) et (d_1, d_2') ont même bissectrice intérieure, notée Δ', résulte du premier point. Pour prouver l'orthogonalité de Δ et Δ', on utilise le :

Lemme 4.6. *Avec les notations précédentes, si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ dirigent respectivement d_1 et d_2, et s'ils sont de même norme, alors $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ dirige Δ et $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ dirige Δ'.*

Démonstration. Notons $A_1 = A + \vec{x}_1$, $A_2 = A + \vec{x}_2$, $B = A + \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. On a : $AA_1 = AA_2 > 0$, $BA_1 = \|\vec{x}_2\| = \|\vec{x}_1\| = BA_2$, donc B est sur Δ par la proposition 4.1, si bien que $\Delta = (AB)$ est dirigée par $\overrightarrow{AB} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Pour l'autre assertion, on remarque que $-\vec{x}_2$ dirige d_2', donc on peut répéter le raisonnement précédent et conclure que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ dirige la bissectrice intérieure de (d_1, d_2'), à savoir Δ'. ✓

On achève la preuve de la proposition en écrivant : $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \|\vec{x}_1\|^2 - \|\vec{x}_2\|^2 = 0$, c'est-à-dire $\Delta \perp \Delta'$. ✓

Définition 4.7. Soient d_1 et d_2 deux demi-droites d'origine A. La perpendiculaire en A à la bissectrice intérieure de (d_1, d_2) s'appelle la **bissectrice extérieure** de (d_1, d_2).

À vrai dire, le vocable de « bissectrice » peut étonner pour cette dernière, dans la mesure où cette droite ne « partage » pas géométriquement l'angle formé par les deux demi-droites, mais seulement l'angle formé par l'une des demi-droites et par l'opposée de l'autre demi-droite. Mais les conventions sont ainsi !

Voici une caractérisation des bissectrices extérieures, similaire à celle de la proposition 4.3.

Proposition 4.8. *Soient d_1 et d_2 deux demi-droites affines de même origine A. Il y a exactement deux demi-droites δ d'origine A qui vérifient l'identité $\widehat{(d_1, \delta)} = \widehat{(\delta, d_2)} + \pi \ [2\pi]$: ce sont les demi-droites d'origine A qui sont supportées par la bissectrice extérieure de (d_1, d_2).*

Démonstration. Exercice. ✓

Passons maintenant aux bissectrices d'un couple de droites, en commençant par la :

Proposition 4.9. *Soient D_1 et D_2 deux droites affines sécantes en un point A, et soit d_1 (resp. d_2) l'une des deux demi-droites d'origine A supportées par D_1 (resp. par D_2). Il y a exactement deux droites Δ du plan telles que la réflexion s_Δ échange D_1 et D_2 : ce sont les bissectrices intérieure et extérieure de (d_1, d_2).*
En particulier, ces deux droites passent par A et y sont perpendiculaires.

Remarquons que ce résultat ne dépend pas du choix de (d_1, d_2) (parmi les quatre possibilités), d'après la proposition 4.5.

Démonstration. Soit d_1 (resp. d_2) une demi-droite d'origine A supportée par D_1 (resp. par D_2), et soit d_2' l'opposée de d_2. Si s_Δ échange D_1 et D_2, alors

$$\{s_\Delta(A)\} = s_\Delta(D_1 \cap D_2) = s_\Delta(D_1) \cap s_\Delta(D_2) = D_2 \cap D_1 = \{A\}.$$

Par suite, $s_\Delta(d_1)$ est une demi-droite d'origine A supportée par $s_\Delta(D_1) = D_2$: c'est donc d_2 ou d_2'. Autrement dit, Δ ne peut être que la bissectrice intérieure ou extérieure de (d_1, d_2).

Réciproquement, si Δ est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de (d_1, d_2), alors $s_\Delta(D_1)$ est une droite contenant $s_\Delta(d_1) = d_2$ (resp. $s_\Delta(d_1) = d_2'$), donc c'est D_2. ✓

Traduisons la propriété précédente : la figure géométrique formée par deux droites sécantes possède exactement deux axes de symétrie, qui sont perpendiculaires. Là encore, ces deux axes méritent d'être distingués :

Définition 4.10. Soient D_1 et D_2 deux droites affines sécantes en un point A. Les deux axes de symétrie (perpendiculaires en A) de la figure formée par D_1 et D_2 (définis par la proposition précédente) sont appelés les **bissectrices** de la paire (D_1, D_2).

Attention : il n'y a aucun moyen de distinguer les bissectrices d'un couple de droites l'une de l'autre, contrairement à celles d'un couple de demi-droites.

De nouveau, justifions l'emploi du terme de « bissectrices » :

Proposition 4.11. *Soient D_1, D_2, Δ trois droites concourantes en un point A. Alors Δ est l'une des bissectrices de (D_1, D_2) si et seulement si $(\widehat{D_1, \Delta}) = (\widehat{\Delta, D_2})$.*

Démonstration. Exercice. ✓

On dispose également d'une caractérisation purement métrique des bissectrices de droites.

Proposition 4.12. *Soient D_1 et D_2 deux droites affines sécantes. La réunion des deux bissectrices de (D_1, D_2) constitue exactement l'ensemble des points du plan qui sont équidistants de D_1 et de D_2.*

Démonstration. Exercice. ✓

5 Quelques résultats classiques liés aux notions d'angles

Nous donnons ici quelques-uns des plus beaux (et des plus utiles) résultats que l'on peut obtenir en manipulant des angles.

Commençons par la géométrie « élémentaire » des triangles, qui ne se réfère qu'aux angles non orientés.

Théorème 5.1. *Si ABC est un triangle d'un plan euclidien, on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et on désigne par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles (non orientés) associés aux trois sommets. On note également $\mathcal{A}$ l'aire (géométrique) de ABC, R le rayon du cercle circonscrit à ABC et $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ son demi-périmètre.*

1) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.
2) *ABC est isocèle en A (i.e. $b = c$) si et seulement si $\widehat{B} = \widehat{C}$.*
3) *ABC est équilatéral (i.e. $a = b = c$) si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.*
4) **Formule d'Al Kashi :** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
5) **Loi des sinus :** $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.
6) **Formule de Héron :** $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
7) **Trigonométrie dans un triangle rectangle :** *si ABC est rectangle en A, alors* $\cos\widehat{B} = \dfrac{c}{a}$, $\sin\widehat{B} = \dfrac{b}{a}$ *et* $\tan\widehat{B} = \dfrac{b}{c}$.

Démonstration. Cf. Exercices. ✓

Remarque 5.2. L'égalité $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \pi$ pour un triangle est à la fois fondamentale et caractéristique de la géométrie euclidienne, qui est une géométrie à « courbure » nulle. En effet, il existe d'autres géométries où cette somme peut être soit plus petite que π (courbure négative), soit plus grande (courbure positive). Par exemple, on peut très bien dessiner un triangle possédant jusqu'à trois angles droits sur une sphère !

Dans toute suite de ce paragraphe, E désigne un plan affine euclidien orienté.

Lemme 5.3. *Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites de E, dirigées respectivement par des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$. Les identités suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{D_3, D_4})$ *(dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$);*

(ii) $2(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = 2(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_4})$ *(dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).*

Démonstration. Soient α une mesure de $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ et β une mesure de $(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_4})$, de sorte que

$$(\widehat{D_1, D_2}) = \alpha\ [\pi], \quad (\widehat{D_3, D_4}) = \beta\ [\pi], \quad 2(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = 2\alpha\ [2\pi], \quad 2(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_4}) = 2\beta\ [2\pi].$$

De là, (i) $\Leftrightarrow \alpha\ [\pi] = \beta\ [\pi] \Leftrightarrow 2\alpha\ [2\pi] = 2\beta\ [2\pi] \Leftrightarrow$ (ii). ✓

Théorème 5.4 (de l'angle inscrit). *Soient $A, B, C \in E$ trois points distincts sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et soit M un point de la tangente T_A à $\mathcal{C}$ en A, distinct de A. On a les égalités suivantes :*

1) $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ *(dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$);*
2) $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}})$ *(dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$);*
3) $(\widehat{(CA), (CB)}) = (\widehat{T_A, (AB)})$ *(dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$).*

Démonstration. Soient α une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$, Δ la médiatrice de $[CA]$, Δ' la médiatrice de $[CB]$. On a donc

$$(\widehat{\Delta, (CA)}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] = (\widehat{\Delta', (CB)}),$$

c'est-à-dire, par la règle d'échange :

$$(\widehat{\Delta, \Delta'}) = (\widehat{(CA), (CB)}) = \alpha\ [\pi].$$

Comme O est l'unique point d'intersection de Δ et Δ' (cf. exercice 6 du chapitre III), on a donc $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = r_{O,2\alpha}$ d'après la proposition 3.9. Or $r_{O,2\alpha}(A) = s_{\Delta'} \circ s_\Delta(A) = s_{\Delta'}(C) = B$, d'où

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{r_{O,2\alpha}(O) r_{O,2\alpha}(A)}}) = 2\alpha\ [2\pi] = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}),$$

ce qui était la première identité visée.

Soient maintenant β une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}})$ et Δ'' la médiatrice de $[AB]$. En procédant comme ci-dessus, on montre successivement les points suivants :

- $(\widehat{(OA), \Delta''}) = \beta\ [\pi]$,
- $s_{\Delta''} \circ s_{(OA)} = r_{O,2\beta}$,
- $r_{O,2\beta}(A) = B$.

On en conclut donc : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2\beta\ [2\pi] = 2(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}})$, ce qui prouve la deuxième identité.

La dernière assertion sur les angles de droites résulte alors des deux identités précédentes et du lemme 5.3. ✓

Avant d'établir le prochain résultat important, nous avons besoin d'un lemme préparatoire.

Lemme 5.5. *Soient A, B deux points distincts de E, et soit Δ une droite passant par A mais pas par B. Il existe un cercle, et un seul, qui passe par A et B, et qui admet Δ pour tangente en A.*

Démonstration. Notons D la médiatrice de $[AB]$, et Δ' la perpendiculaire à Δ en A. On a

$$(\widehat{\Delta, \Delta'}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] = (\widehat{(AB), D}),$$

c'est-à-dire, par la règle d'échange :

$$(\widehat{\Delta', D}) = (\widehat{\Delta, (AB)}),$$

angle qui n'est pas nul, sinon $\Delta \parallel (AB)$ donc $\Delta = (AB)$, ce qui est exclu. Par conséquent, Δ' et D sont sécantes en un point O. Alors le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, OA)$ convient puisque $OA = OB$ et $(OA) \perp \Delta$.

Réciproquement, si $\mathcal{C}(O', R')$ convient alors $O'A = O'B$ donc $O' \in D$, et $(O'A)$ est perpendiculaire à Δ en A donc $O' \in \Delta'$. Ceci force à avoir $O' = O$, et donc aussi $R' = O'A = OA$, cqfd. ✓

Définition 5.6. Des points de E sont dits **cocycliques** s'ils sont situés sur un même cercle.

Par exemple, un point, ou deux points distincts, sont toujours cocycliques, et ce, d'une infinité de façons. Par contre, trois points distincts sont cocyliques si et seulement s'ils ne sont pas alignés : ils sont alors situés sur un unique cercle, appelé cercle circonscrit au triangle ABC (cf. exercice 6 du chapitre III).

Moins évidente, peut-être, voici une condition nécessaire et suffisante de cocyclicité pour quatre points.

Théorème 5.7 (cocyclicité de quatre points). *Soient A, B, C, D quatre points de E, tous distincts sauf éventuellement C et D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A, B, C, D sont cocycliques (resp. alignés);*

(ii) $\widehat{((CA), (CB))} = \widehat{((DA), (DB))}$ *et la valeur commune de ces angles n'est pas* $0\ [\pi]$ *(resp. est* $0\ [\pi]$*).*

Démonstration. L'assertion concernant l'alignement est immédiate.

Supposons donc que A, B, C, D soient cocycliques, sur un cercle de centre O. D'après le théorème de l'angle inscrit,

$$2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}).$$

Le lemme 5.3 implique donc $\widehat{((CA), (CB))} = \widehat{((DA), (DB))}$, et cette valeur commune ne peut être $0\ [\pi]$, car 3 points cocycliques et distincts ne peuvent être alignés, comme nous l'avons rappelé plus haut.

Réciproquement, supposons que $\widehat{((CA), (CB))} = \widehat{((DA), (DB))}$ et que la valeur commune de ces angles n'est pas $0\ [\pi]$. Alors A, B, C (resp. A, B, D) ne sont pas alignés donc sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$). Montrons que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Soit donc T_A (resp. T'_A) la tangente en A à $\mathcal{C}$ (resp. à $\mathcal{C}'$). D'après le théorème de l'angle inscrit et l'hypothèse, on a

$$(\widehat{T_A, (AB)}) = \widehat{((CA), (CB))} = \widehat{((DA), (DB))} = (\widehat{T'_A, (AB)}).$$

La règle d'échange donne alors $(\widehat{T_A, T'_A}) = 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $T_A = T'_A$ puisque ces droites passent par le même point A. Par le lemme 5.5, cela implique $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ puisqu'ils passent tous deux par A et B. ✓

Remarque 5.8. Une question naturelle se pose : quelles sont toutes les transformations affines conservant les angles non orientés (resp. les angles orientés en dimension 2) ? Réponse : ce sont les similitudes (resp. les similitudes directes en dimension 2), c'est-à-dire les composées d'une isométrie par une homothétie. Nous le prouverons plus loin dans ce cours.

6 Coordonnées polaires

Les coordonnées cartésiennes ne constituent pas toujours le repérage le plus adapté à l'étude de certains ensembles géométriques (comme les coniques, par exemple).

Dans ce paragraphe, on se place dans un plan affine euclidien orienté E, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}.$$

On remarquera qu'il s'agit d'un vecteur unitaire.

Le résultat suivant est évident.

Lemme 6.1. *Considérons l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow E \\ (r, \theta) &\longmapsto O + r\vec{u}(\theta) \end{aligned}$$

Alors φ est surjective, et

1) *si $M = O$, $\varphi^{-1}(M) = \{0\} \times \mathbb{R}$;*

2) *si $M \neq O$, $\varphi^{-1}(M) = \{(OM, \theta_0 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-OM, \theta_0 + \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$, où θ_0 est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.*

Définitions 6.2.

1) Si $M \in E$, on appelle **(système de) coordonnées polaires du point M dans $\mathcal{R}$** tout élément de $\varphi^{-1}(M)$ (il n'y a donc pas unicité d'un tel système). Si (r, θ) est un tel système, cela signifie donc que M admet pour coordonnées cartésiennes $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ dans $\mathcal{R}$.

2) Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application, on appelle **ensemble d'équation polaire $f(r, \theta) = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$** l'ensemble des points $M \in E$ dont au moins un système (r_0, θ_0) de coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$ vérifie

$$(r_0, \theta_0) \in A \quad \text{et} \quad f(r_0, \theta_0) = 0.$$

Exemples 6.3.

1) Si $a \geq 0$ est fixé, l'ensemble d'équation polaire $r = a$ (dans $\mathcal{R}$) est le cercle de centre O et de rayon a (réduit au point O si $a = 0$).

2) Si $\theta_0 \in \mathbb{R}$ est fixé, l'ensemble d'équation polaire $\theta = \theta_0$ (dans $\mathcal{R}$) est la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\theta_0)$.

Nous allons maintenant caractériser par une équation polaire les droites de E qui ne passent pas par l'origine. Commençons par le

Lemme 6.4. *Toute droite de E admet une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ de la forme :*

$$x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 = p. \tag{1}$$

Démonstration. Soit D une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans $\mathcal{R}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Notons $\vec{n} = (a, b)$, c'est un vecteur normal à D. Si $M = (x, y)$ dans $\mathcal{R}$, alors $M \in D$ si et seulement si $(\vec{n}|\overrightarrow{OM}) = -c$. Posons

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \text{et} \quad p = -\frac{c}{\|\vec{n}\|}.$$

Alors $M \in D$ si et seulement si $(\vec{v}|\overrightarrow{OM}) = p$. Il suffit donc de prendre θ_0 tel que $\vec{v} = \vec{u}(\theta_0)$. ✓

Définition 6.5. Si D est une droite de E, l'équation (1) s'appelle **équation normale** ou **équation d'Euler** de D.

Proposition 6.6. *Soit D une droite de E ne passant pas par O. Alors D admet pour équation polaire*

$$r\cos(\theta - \theta_0) = p,$$

où θ_0 et p sont définis par l'équation (1).

Démonstration. Soit M un point de E, de coordonnées polaires (r, θ) dans $\mathcal{R}$. Par le lemme précédent, M appartient à D si et seulement si

$$r(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0) = p,$$

d'où le résultat. ✓

Remarque 6.7. Les coordonnées polaires admettent une généralisation naturelle en dimension 3. On les appelle alors coordonnées sphériques.

7 Exercices

N.B. Dans les exercices 1 à 5, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien et A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On utilisera les notations classiques des angles non orientés :

$$\widehat{A} = \widehat{BAC}, \quad \widehat{B} = \widehat{ABC}, \quad \widehat{C} = \widehat{BCA},$$
$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB.$$

Exercice 1. On suppose que le triangle ABC est rectangle en A.

1) Montrer : $\cos \widehat{B} = \frac{c}{a}$, $\widehat{B} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin \widehat{B} = \frac{b}{a}$ et $\tan \widehat{B} = \frac{b}{c}$.

2) Soit $M \in [AB]$, avec $M \neq B$. On note P son projeté orthogonal sur (BC). Montrer que $MP < AC$.

Exercice 2. Montrer que ABC est isocèle en A (i.e. $AB = AC$) si et seulement si $\widehat{B} = \widehat{C}$. En déduire une caractérisation des triangles équilatéraux.

Exercice 3. Dans cet exercice, on admet (provisoirement !) la formule : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

1) Montrer que ABC est rectangle si et seulement si $\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} = 1$.

2) Montrer que $\sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{C}}{2} \leq \frac{1}{8}$ et étudier les cas d'égalité.

Exercice 4.

1) Montrer la **formule d'Al Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos \widehat{A}$.

2) Retrouver à l'aide de cette formule les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Exercice 5. On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1) Montrer que, pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $|[\vec{u}, \vec{v}]| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$.

2) Montrer que l'aire géométrique $\mathcal{A}$ du triangle ABC est donnée par la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin \widehat{A}$ (et par les autres formules similaires obtenues par permutation des sommets). On donnera deux preuves : l'une qui vient de la définition de l'aire, et l'autre utilisant son expression avec des produits mixtes et la question précédente.

3) En déduire la **loi des sinus** : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$.

4) En utilisant la relation $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}\,b^2\,c^2\,(1 - \cos^2 \widehat{A})$, établir :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{8}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - \frac{1}{16}\left(a^4 + b^4 + c^4\right).$$

5) On note $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre du triangle ABC. Prouver la **formule de Héron** :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 6 (Projection orthogonale d'un angle droit de l'espace sur un plan).
Soient E un espace affine euclidien de dimension 3, $\mathcal{P}$ un plan de E.

1) Soient A, B et C des points distincts de E. On note A', B' et C' leurs projetés orthogonaux respectifs sur $\mathcal{P}$.

a) On suppose que :

(i) $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$;

(ii) $(AB) \parallel \mathcal{P}$;

(iii) (AC) et $\mathcal{P}$ ne sont pas perpendiculaires.

Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. En déduire que l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est bien défini et vaut $\frac{\pi}{2}$.

b) On suppose que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = \frac{\pi}{2}$. Montrer que $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CC'})$, et en déduire que $(AB) \parallel \mathcal{P}$ ou $(AC) \parallel \mathcal{P}$.

c) On suppose que :

(i) $\widehat{B'A'C'} = \frac{\pi}{2}$;

(ii) $(AB) \parallel \mathcal{P}$.

Montrer que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

2) Soit $ABCD$ un carré (non trivial) de E, de centre O. On suppose de plus que le plan contenant $ABCD$ n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$. On note A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C et D sur $\mathcal{P}$.

a) Montrer que les points A', B', C' et D' ne sont pas alignés, et en déduire que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme non aplati. Quel est son centre ?

b) À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) $A'B'C'D'$ est-il un losange ? un rectangle ? un carré ?

Dans tout ce qui suit, on se place dans un plan affine euclidien orienté E.

Exercice 7. Soit MNP un triangle non aplati. On note $mp(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$ la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$.

1) Prouver l'équivalence des quatre conditions suivantes :

(i) $mp(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) \in [0, \pi]$;

(ii) $mp(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = \widehat{M}$;

(iii) $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = \widehat{M}\ [2\pi]$;

(iv) MNP est un triangle direct.

2) Prouver l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $P = r_{M,\frac{\pi}{3}}(N)$;

(ii) MNP est un triangle équilatéral direct.

Exercice 8. Soit ABC un triangle non aplati de E.

1) Montrer qu'il existe une orientation de E telle qu'on ait

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \widehat{A}\ [2\pi], \qquad (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \widehat{B}\ [2\pi], \qquad (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \widehat{C}\ [2\pi].$$

2) En déduire : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Exercice 9. Soient $\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}, \vec{v}'$ des vecteurs non nuls de $\overrightarrow{E}$, et soit θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

1) On suppose que $(\vec{u}, \vec{u}')$ et $(\vec{v}, \vec{v}')$ sont des bases orthogonales de même sens. Déterminer $\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$ en fonction de θ.

2) Même question lorsque $(\vec{u}, \vec{u}')$ et $(\vec{v}, \vec{v}')$ sont des bases orthogonales de sens contraire.

Exercice 10. Soient d_1 et d_2 deux demi-droites affines de même origine A.

1) Démontrer qu'il y a exactement deux demi-droites δ d'origine A qui vérifient l'identité $\widehat{(d_1, \delta)} = \widehat{(\delta, d_2)}$, à savoir les demi-droites d'origine A qui sont supportées par la bissectrice intérieure de (d_1, d_2).

2) Démontrer qu'il y a exactement deux demi-droites δ d'origine A qui vérifient l'identité $\widehat{(d_1, \delta)} = \widehat{(\delta, d_2)} + \pi\ [2\pi]$, à savoir les demi-droites d'origine A qui sont supportées par la bissectrice extérieure de (d_1, d_2).

Exercice 11. Soient D_1, D_2, Δ trois droites concourantes en un point A. Prouver que Δ est l'une des bissectrices de (D_1, D_2) si et seulement si $\widehat{(D_1, \Delta)} = \widehat{(\Delta, D_2)}$.

Exercice 12. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en A, d_1 (resp. d_2) une demi-droite d'origine A portée par D_1 (resp. par D_2), et Δ une bissectrice de la paire (D_1, D_2).
Montrer que Δ est la bissectrice intérieure de la paire (d_1, d_2) si et seulement si $d_1 \setminus \{A\}$ et $d_2 \setminus \{A\}$ ne sont pas dans un même demi-plan ouvert de frontière Δ.

Exercice 13. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes. Montrer que la réunion des deux bissectrices de (D_1, D_2) constiue exactement l'ensemble des points du plan qui sont équidistants de D_1 et de D_2.
Application. On suppose E rapporté à un repère orthonormé. Trouver les équations cartésiennes des deux bissectrices du couple (D_1, D_2), où D_1 est d'équation $3x + 4y + 3 = 0$ et D_2 est d'équation $12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 14. Soient :

- ABC un triangle non aplati de E ;
- Δ_A (resp. Δ_B, Δ_C) la bissectrice intérieure de $([AB), [AC))$ (resp. $([BC), [BA))$, $([CB), [CA))$) ;
- Δ'_A (resp. Δ'_B, Δ'_C) la bissectrice extérieure de $([AB), [AC))$ (resp. $([BC), [BA))$, $([CB), [CA))$) ;
- $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1) a) Montrer que le système de points pondérés $((A, a), (B, b), (C, c))$ admet un barycentre, noté O, situé à l'intérieur du triangle ABC.

b) Montrer que $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires. En déduire que $O \in \Delta_A$.
On montrerait de même $O \in \Delta_B$ et $O \in \Delta_C$, donc Δ_A, Δ_B, Δ_C concourantes en O.

c) Prouver que O est le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ tangent simultanément aux trois droites (AB), (BC) et (CA).
Ce cercle $\mathcal{C}$ est le **cercle inscrit dans le triangle ABC**.

2) a) Montrer que le système de points pondérés $((A, a), (B, -b), (C, -c))$ admet un barycentre, noté O_A, situé à l'extérieur du triangle ABC.

b) Montrer $\Delta_A \cap \Delta'_B \cap \Delta'_C = \{O_A\}$.

c) Prouver que O_A est le centre d'un cercle $\mathcal{C}_A$ tangent simultanément aux trois droites (AB), (BC) et (CA).

En permutant les lettres, on obtiendrait de même deux autres cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ tangents simultanément aux trois droites (AB), (BC) et (CA), et de centres O_B, O_C extérieurs à ABC. Les trois cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ sont les **cercles exinscrits au triangle** ABC.

3) Montrer que $\mathcal{C}, \mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$ sont les seuls cercles tangents simultanément aux trois droites (AB), (BC) et (CA).

Exercice 15. Soit ABC un triangle non aplati. On note O le centre du cercle circonscrit à ABC et R son rayon. On utilise les notations habituelles de la géométrie du triangle.

1) En utilisant le théorème de l'angle inscrit, démontrer l'égalité $\cos \widehat{BOC} = 2\cos^2 \widehat{A} - 1$.

2) Montrer qu'on a par ailleurs : $\cos \widehat{BOC} = 1 - \dfrac{a^2}{2R^2}$. [Lorsque $O \notin (BC)$, utiliser la formule d'Al Kashi.]

3) Déduire de ce qui précède l'égalité $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$, qui complète la **loi des sinus** de l'exercice 5.

Exercice 16. Soit ABC un triangle non rectangle. On note I, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. Soient également H l'orthocentre de ABC, O le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ à ABC et Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Le triangle IJK est appelé **triangle orthique** du triangle ABC.

1) a) Montrer : $(\widehat{(BA), (BC)}) = (\widehat{\Delta, (AC)})$.

b) En déduire : $(\widehat{(AB), (AO)}) = (\widehat{(AI), (AC)})$.

c) Prouver que la bissectrice intérieure ou extérieure issue de A est aussi une bissectrice du couple de droites $((AO), (AI))$.

2) a) Montrer que B, C, J et K sont cocycliques.

b) Montrer : $(\widehat{(AC), (JK)}) = (\widehat{(AC), \Delta})$. En déduire que (JK) et Δ sont parallèles.

c) Montrer que les droites (OA) (resp. (OB), (OC)) et (JK) (resp. (KI), (IJ)) sont perpendiculaires.

3) a) Montrer que les points A, I, J, B sont cocycliques, et qu'il en va de même pour B, I, H, K.

b) En déduire : $(\widehat{(IA), (IJ)}) = (\widehat{(IK), (IA)})$. Quelles sont les bissectrices du triangle orthique ?

Exercice 17. Soient ABC un triangle non aplati, M un point quelconque, P, Q, R les projections orthogonales respectives de M sur (BC), (CA), (AB).

1) On suppose $M \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$. Vérifier que P, Q, R sont distincts, puis établir les égalités : $(\widehat{(PQ), (PM)}) = (\widehat{(CA), (CM)})$ et $(\widehat{(PM), (PR)}) = (\widehat{(BM), (BA)})$.

2) Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC.

N.B. Dans ce cas, la droite (PQR) s'appelle la **droite de Simson** de M pour ABC.

Exercice 18 (Théorème(s) de l'arc capable). Soient A, B deux points distincts de E et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On se propose de décrire les ensembles suivants :

$$\Gamma_\alpha = \{M \in E \smallsetminus \{A, B\} \ : \ (\widehat{(MA), (MB)}) = \alpha \ [\pi]\},$$
$$\Gamma'_\alpha = \{M \in E \smallsetminus \{A, B\} \ : \ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \ [2\pi]\},$$
$$\Gamma''_\alpha = \{M \in E \smallsetminus \{A, B\} \ : \ \widehat{AMB} = \alpha\} \quad \text{(ici, pour } \alpha \in [0, \pi]).$$

I. Détermination de Γ_α

1) On suppose $\alpha = 0 \ [\pi]$. Montrer que $\Gamma_\alpha = (AB) \smallsetminus \{A, B\}$.

2) On suppose $\alpha \neq 0\ [\pi]$.

a) Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A telle que $(\widehat{D, (AB)}) = \alpha\ [\pi]$.

b) Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ qui passe par A, B et qui est tangent à D en A.

c) En déduire que $\Gamma_\alpha = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

II. Détermination de Γ'_α

1) On suppose $\alpha = 0\ [2\pi]$. Montrer que $\Gamma'_\alpha = (AB) \setminus [AB]$.

2) On suppose $\alpha = \pi\ [2\pi]$. Montrer que $\Gamma'_\alpha =]AB[$.

3) On suppose $\alpha \neq 0\ [\pi]$.

a) Remarquer que $\Gamma'_\alpha \subset \Gamma_\alpha$.

b) On note I l'image de B par la rotation de centre A et d'angle (de mesure) $-\alpha$. Avec la notation de I.2, vérifier que $D = (AI)$.

c) Prouver que pour $M \in \Gamma_\alpha$, on a : $M \in \Gamma'_\alpha$ si et seulement si les bases $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$ sont de même sens.

d) En déduire que $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \cap F$, où F désigne le demi-plan ouvert délimité par (AB) et qui ne contient pas I.

III. Détermination de Γ''_α

Ici, on suppose donc que α est dans l'intervalle $[0, \pi]$.

1) Vérifier que $\Gamma''_\alpha = (AB) \setminus [AB]$ si $\alpha = 0$ et que $\Gamma''_\alpha =]AB[$ si $\alpha = \pi$.

2) Montrer que $\Gamma''_\alpha = \Gamma'_\alpha \cup \Gamma'_{-\alpha}$ lorsque $\alpha \in]0, \pi[$.

Exercice 19. On suppose que E est un plan, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit M un point de E, de coordonnées polaires (r, θ) dans $\mathcal{R}$. Prouver les assertions suivantes.

1) Le symétrique de M par rapport à O admet $(-r, \theta)$ pour coordonnées polaires.

2) L'image de M par la rotation de centre O et d'angle α admet $(r, \theta + \alpha)$ pour coordonnées polaires.

3) Le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ admet $(r, 2\alpha - \theta)$ pour coordonnées polaires.

4) Le symétrique de M par rapport à $O + \mathbb{R}\vec{i}$ admet $(r, -\theta)$ pour coordonnées polaires.

5) Le symétrique de M par rapport à $O + \mathbb{R}\vec{j}$ admet $(r, \pi - \theta)$ pour coordonnées polaires.

Exercice 20. On suppose que E est un plan. Dans les deux cas suivants, déterminer l'ensemble dont on donne l'équation polaire.

1) $r = \dfrac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \neq 0$.

2) $r = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\theta} + \sqrt{1 - \sin 2\theta}}$.

Chapitre VI : Isométries et similitudes vectorielles

Dans tout ce chapitre, $\vec{E}$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, orienté.

1 Adjoint d'un endomorphisme

Commençons par quelques faits élémentaires.

Lemme 1.1. *Soient $u, v \in L(\vec{E})$. Alors $u = v$ si et seulement si $(u(\vec{x})|\vec{y}) = (v(\vec{x})|\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.*

Démonstration. Soit $\vec{x} \in \vec{E}$ quelconque. Par hypothèse, on a, pour tout $\vec{y} \in \vec{E}$, $(u(\vec{x}) - v(\vec{x})|\vec{y}) = 0$. On en déduit que $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) \in \vec{E}^{\perp} = \{\vec{0}\}$, c.q.f.d. ✓

Lemme 1.2. *Soit $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ une base orthonormée de $\vec{E}$. Si $u \in L(\vec{E})$, sa matrice $A = (a_{ij})$ dans la base $(\vec{e}_i)$ est donnée par $a_{ij} = (u(\vec{e}_j)|\vec{e}_i)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.*

Démonstration. Rappelons que si $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$, alors $x_i = (\vec{x}|\vec{e}_i)$ puisqu'on a une base orthonormée. En particulier, on trouve que $u(\vec{e}_j) = \sum_i (u(\vec{e}_j)|\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$ pour tout j. ✓

Théorème 1.3. *Soit $u \in L(\vec{E})$. Il existe un unique endomorphisme de $\vec{E}$, noté u^*, tel qu'on ait, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$:*

$$(u(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|u^*(\vec{y}))\,.$$

Démonstration. Soit $\vec{y} \in \vec{E}$. L'application $\vec{x} \mapsto (u(\vec{x})|\vec{y})$ étant une forme linéaire, l'isomorphisme canonique entre $\vec{E}$ et son dual $\vec{E}^*$ implique l'existence d'un unique $\vec{z} \in \vec{E}$ tel que $(u(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{z})$ pour tout $\vec{x}$. Posant $u^*(\vec{y}) = \vec{z}$, on obtient une application de $\vec{E}$ dans lui-même qui est caractérisée par la condition de l'énoncé, d'où son unicité. Il reste donc à voir que u^* est linéaire. Or, pour $\vec{y}, \vec{z} \in \vec{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés, on a pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$:

$$\begin{aligned}(\vec{x}|u^*(\vec{y} + \lambda\vec{z})) = (u(\vec{x})|\vec{y} + \lambda\vec{z}) = (u(\vec{x})|\vec{y}) + \lambda\,(u(\vec{x})|\vec{z}) &= (\vec{x}|u^*(\vec{y})) + (\vec{x}|\lambda u^*(\vec{z})) \\ &= (\vec{x}|u^*(\vec{y}) + \lambda u^*(\vec{z}))\,.\end{aligned}$$

On conclut alors avec le lemme 1.1. ✓

Définition 1.4. Soit $u \in L(\vec{E})$. L'unique endomorphisme u^* défini par le théorème précédent s'appelle **l'adjoint de u**.

Voici quelques propriétés des adjoints.

Proposition 1.5. *Soient $u, v \in L(\overrightarrow{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) *Dans toute base orthonormée, la matrice de u^* est la transposée de celle de u.*
2) $\text{dét}(u^*) = \text{dét}(u)$.
3) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.
4) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
5) $u^{**} = u$.
6) *Si $u^* = u$ (on dit alors que u est* **autoadjoint** *ou* **symétrique***), alors toutes ses valeurs propres sont réelles et il est diagonalisable dans une base orthonormée*[1].

Démonstration. Soit $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$. Comme on a, pour tous i, j :

$$(u^*(\vec{e}_j)|\vec{e}_i) = (\vec{e}_j|u(\vec{e}_i)) = (u(\vec{e}_i)|\vec{e}_j),$$

l'assertion 1) découle du lemme 1.2.

Les autres propriétés s'obtiennent à partir de 1) et des propriétés bien connues de la transposition matricielle et des matrices symétriques réelles. ✓

2 Isométries vectorielles

2.1 Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

Commençons par... le commencement :

Définition 2.1. Soit $u \in L(\overrightarrow{E})$. On dit que u est une **isométrie (vectorielle)** de $\overrightarrow{E}$ si **u conserve la norme**, c'est-à-dire si $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \overrightarrow{E}$.

Proposition 2.2.

1) *Toute isométrie de $\overrightarrow{E}$ est un automorphisme.*
2) *L'ensemble $O(\overrightarrow{E})$ des isométries de $\overrightarrow{E}$ est un sous-groupe de $GL(\overrightarrow{E})$.*
3) *L'ensemble $SO(\overrightarrow{E})$ (noté aussi $O^+(\overrightarrow{E})$) des isométries directes de $\overrightarrow{E}$ est un sous-groupe distingué de $O(\overrightarrow{E})$.*

Démonstration.

1) L'injectivité résulte immédiatement de la définition d'une isométrie, et donc la bijectivité aussi (on est en dimension finie).

2) a) D'après le point précédent, $O(\overrightarrow{E}) \subset GL(\overrightarrow{E})$.

b) Il est clair que $\text{id} \in O(\overrightarrow{E})$.

c) Soit u une isométrie. Nous savons que u^{-1} existe dans $GL(\overrightarrow{E})$, et comme u conserve la norme on peut écrire

$$\|u^{-1}(\vec{x})\| = \|u(u^{-1}(\vec{x}))\| = \|\vec{x}\|$$

pour tout $\vec{x}$, de sorte que u^{-1} est aussi une isométrie.

d) Si $u, v \in O(\overrightarrow{E})$, alors $\|v \circ u(\vec{x})\| = \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x}$, donc $v \circ u \in O(\overrightarrow{E})$ également.

3) C'est facile.

✓

1. C'est un cas particulier d'un très important résultat appelé Théorème Spectral.

Définitions 2.3.

1) Le groupe $O(\vec{E})$ des isométries de $\vec{E}$ s'appelle **groupe orthogonal de $\vec{E}$**.
2) Le groupe $SO(\vec{E})$ des isométries directes de $\vec{E}$ s'appelle **groupe spécial orthogonal de $\vec{E}$**.
3) L'ensemble $O(\vec{E}) \setminus SO(\vec{E})$ des isométries indirectes de $\vec{E}$ sera noté $O^-(\vec{E})$.

Nous passons maintenant aux diverses caractérisations des isométries vectorielles, qui ne manquent pas.

Théorème 2.4. *Pour $u \in L(\vec{E})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est une isométrie;*
(ii) *u préserve le produit scalaire, i.e. : pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, $(u(\vec{x})|u(\vec{y})) = (\vec{x}|\vec{y})$;*
(iii) $u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{id}_{\vec{E}}$.
(iv) *pour toute b.o.n. $(\vec{e_i})$ de $\vec{E}$, $\big(u(\vec{e_i})\big)$ est une b.o.n. de $\vec{E}$;*
(v) *il existe une b.o.n. $(\vec{e_i})$ de $\vec{E}$ telle que $\big(u(\vec{e_i})\big)$ soit une b.o.n. de $\vec{E}$;*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : il suffit de se rappeler la formule bien connue : $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 4\,(\vec{x}|\vec{y})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : pour $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, on a $(\vec{x}|u^* \circ u(\vec{y})) = (u(\vec{x})|u(\vec{y})) = (\vec{x}|\vec{y})$. D'après le lemme 1.1, on obtient $u^* \circ u = \mathrm{id}$. Pour l'autre identité, on peut procéder de même, ou bien remarquer que $u^* \circ u = \mathrm{id}$ implique u injective, donc u bijective et $u^{-1} = u^*$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : soit $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ une b.o.n. de $\vec{E}$. Puisque $u^* \circ u = \mathrm{id}$, on a pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$(u(\vec{e}_i)|u(\vec{e}_j)) = (\vec{e}_i|u^* \circ u(\vec{e}_j)) = (\vec{e}_i|\vec{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi la famille $(u(\vec{e}_i))$ est orthonormale, formée de vecteurs non nuls (car u bijective), elle est donc automatiquement libre (c'est connu) et c'est bien une b.o.n. de $\vec{E}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : évident.

(v) $\Rightarrow$ (i) : soit $(\vec{e}_i)$ une b.o.n. de $\vec{E}$ telle que $(u(\vec{e}_i))$ soit aussi une b.o.n. Pour $\vec{x} = \sum x_i\vec{e}_i$ on a :

$$\|u(\vec{x})\|^2 = \|\textstyle\sum_i x_i u(\vec{e}_i)\|^2 = \sum_i x_i^2 = \|\vec{x}\|^2,$$

ce qui achève la preuve du théorème. ✓

On déduit de ce théorème plusieurs résultats fondamentaux. Auparavant, faisons deux

Rappels 2.5.

1) Une matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si elle vérifie les conditions ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$, i.e. si A est inversible, d'inverse égale à sa transposée. L'ensemble $O(n)$ des matrices $A \in M(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, appelé **groupe des matrices orthogonales (de rang n)**.

2) Si une matrice A est orthogonale, alors dét $A = \pm 1$ (conséquence immédiate de la définition).

3) Lorsqu'une matrice orthogonale $A \in O(n)$ vérifie de plus dét $A = 1$, on dit que A est **spéciale orthogonale**. L'ensemble $SO(n)$ des matrices spéciales orthogonales est un sous-groupe distingué de $O(n)$.

Corollaire 2.6.

1) *Soit $u \in L(\vec{E})$, alors u est une isométrie si et seulement si sa matrice A dans une (dans toute) base orthonormée de $\vec{E}$ est orthogonale.*

2) *Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$, l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de groupes de $O(\vec{E})$ sur $O(n)$.*

3) *Pour toute base orthonormée* $\mathcal{B}$ *de* $\overrightarrow{E}$*, l'application* $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est un isomorphisme de groupes de* $SO(\overrightarrow{E})$ *sur* $SO(n)$*.*

4) *Si* u *est une isométrie, alors* $\mathrm{dét}\, u = \pm 1$.

5) $SO(\overrightarrow{E}) = O(\overrightarrow{E}) \cap SL(\overrightarrow{E})$.

Démonstration.

1) découle l'équivalence entre (i) et (iii) du théorème 2.4, ainsi que les propriétés des adjoints (cf. proposition 1.5).

2) Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$. Il est clair que l'application $\varphi_{\mathcal{B}} : u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un morphisme de groupes. Par ailleurs, si A est une matrice quelconque de $M(n, \mathbb{R})$, on sait qu'il existe une unique $u \in L(\overrightarrow{E})$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors 1) nous dit précisément que $\varphi_{\mathcal{B}}$ est bien une bijection de $O(\overrightarrow{E})$ sur $O(n)$.

3) Similaire.

4) vient de 2) et du fait que $A \in O(n) \Rightarrow \mathrm{dét}\, A = \pm 1$.

5) D'après ce qui précède, pour $u \in O(\overrightarrow{E})$ la condition $\mathrm{dét}\, u > 0$ équivaut à $\mathrm{dét}\, u = 1$.

✓

Remarques 2.7.

1) Les isomorphismes $O(\overrightarrow{E}) \simeq O(n)$ et $SO(\overrightarrow{E}) \simeq SO(n)$ ne sont pas canoniques (ils dépendent du choix d'une base), sauf le second en dimension 2 (voir la discussion suivant la corollaire 3.3).

2) Pour montrer qu'une matrice donnée A est orthogonale, il suffit d'après la dernière caractérisation du théorème 2.4 de vérifier que ses colonnes (ou ses lignes) sont unitaires et deux à deux orthogonales pour le produit scalaire usuel de $M(n, 1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. C'est toujours plus simple que de prouver l'identité ${}^tAA = I_n$.

Proposition 2.8.

1) *Soient* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* $\overrightarrow{E}$*,* $\mathcal{B}'$ *une autre base (quelconque),* $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*, et* u *l'unique endomorphisme de* $\overrightarrow{E}$ *défini par* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{B}'$ *est une base orthonormée (resp. une base orthonormée de même sens que* $\mathcal{B}$*);*

(ii) $u \in O(\overrightarrow{E})$ *(resp.* $u \in SO(\overrightarrow{E})$*);*

(iii) $P \in O(n)$ *(resp.* $P \in SO(n)$*).*

2) *Le groupe* $O(\overrightarrow{E})$ *(resp.* $SO(\overrightarrow{E})$*) agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées (resp. des bases orthonormées de même sens) de* $\overrightarrow{E}$*.*

Démonstration. 1) On a $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, donc $\mathcal{B}'$ est une b.o.n. si et seulement si $u \in O(\overrightarrow{E})$ d'après le théorème 2.4, c'est-à-dire si et seulement si $A \in O(n)$ d'après le corollaire 2.6. L'autre assertion se prouve de la même manière.

2) D'une part, d'après le théorème 2.4, une isométrie envoie bien une b.o.n. sur une autre b.o.n., et il est clair que le sens est respecté si l'isométrie est directe. Par conséquent, $O(\overrightarrow{E})$ agit dans l'ensemble des b.o.n., et $SO(\overrightarrow{E})$ dans celui des b.o.n. de même sens.

D'autre part, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux b.o.n. (resp. b.o.n. de même sens), et soit u l'unique application linéaire telle que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. D'après 1), cette unique u est nécessairement une isométrie (resp. une isométrie directe). Ainsi, pour tout couple $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de b.o.n. de $\overrightarrow{E}$ il existe une unique $u \in O(\overrightarrow{E})$ (qui est dans $SO(\overrightarrow{E})$ si les bases sont de même sens) telle que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, i.e. l'action est simplement transitive. ✓

Terminons ce paragraphe de généralités avec deux résultats très utiles.

Proposition 2.9. *Soient $u \in O(\vec{E})$ et $\vec{F}$ un sev de $\vec{E}$. Alors $u(\vec{F})^\perp = u(\vec{F}^\perp)$. En particulier, si $\vec{F}$ est stable par u, son complémentaire orthogonal $\vec{F}^\perp$ l'est aussi.*

Démonstration. C'est une reformulation du lemme 8.6 du chapitre III. ✓

Proposition 2.10. *Soit $u \in O(\vec{E})$. Alors les seules valeurs propres* **réelles** *possibles de u sont 1 et -1. En outre, les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ sont orthogonaux.*

Démonstration. Soit λ une valeur propre réelle de u, et soit $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ. On a : $\|\vec{x}\| = \|u(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, d'où $\lambda = \pm 1$.

Par ailleurs, si $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$, on a $u(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u(\vec{y}) = -\vec{y}$, donc $(\vec{x}|\vec{y}) = (u(\vec{x})|u(\vec{y})) = -(\vec{x}|\vec{y})$, si bien que $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$. ✓

2.2 Notions euclidiennes préservées par les isométries

Par définition, une isométrie vectorielle est une application linéaire conservant la norme. On en déduit immédiatement :

Proposition 2.11. *Toute isométrie vectorielle u conserve la distance, i.e. vérifie : $\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.*

Dans cette direction, on a en fait un résultat spectaculaire (et pourtant facile à prouver), qui caractérise très simplement les isométries vectorielles parmi les applications de $\vec{E}$ dans lui-même qui conservent la distance euclidienne. C'est donc la réciproque de la proposition précédente :

Théorème 2.12. *Soit $u : \vec{E} \to \vec{E}$ une application (ensembliste) conservant la distance et l'origine, i.e. vérifiant $\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ et $u(\vec{0}) = \vec{0}$. Alors u est une isométrie vectorielle (en particulier u est linéaire).*

Démonstration. Exercice. ✓

D'autre part, une isométrie préservant les produits scalaires, on a bien évidemment :

Proposition 2.13. *Toute isométrie vectorielle conserve l'orthogonalité (des vecteurs et des sous-espaces).*

En particulier, une isométrie préserve les angles droits (orientés ou non). Plus généralement, on a le :

Théorème 2.14.

1) *Les isométries conservent les notions d'angles non orientés.*

2) *Si $\vec{E}$ est un plan euclidien orienté, les isométries directes conservent les notions d'angles orientés, les isométries indirectes les contrarient.*

Démonstration. Soit u une isométrie de $\vec{E}$, soient $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ non nuls. Clairement, il suffit de vérifier les assertions pour les angles de vecteurs. Grâce aux propriétés déjà établies des isométries, on a :

$$\widehat{u(\vec{x}), u(\vec{y})} = \arccos \frac{(u(\vec{x})|u(\vec{y}))}{\|u(\vec{x})\| \cdot \|u(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \widehat{\vec{x}, \vec{y}}.$$

Ce calcul démontre 1), mais aussi que le cosinus des mesures d'un angle orienté est conservé. D'autre part,

$$[u(\vec{x}), u(\vec{y})] = \det u \cdot [\vec{x}, \vec{y}],$$

ce qui montre que le sinus sera préservé si u est directe, changé en son opposé sinon. ✓

2.3 Symétries orthogonales

Rappel 2.15. Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On appelle **symétrie orthogonale d'axe $\vec{F}$**, et on note $s_{\vec{F}}$, la symétrie associée à la projection orthogonale $p_{\vec{F}}$ sur $\vec{F}$, c'est-à-dire l'application linéaire $s_{\vec{F}} = 2p_{\vec{F}} - \mathrm{id}$. Autrement dit, $s_{\vec{F}}$ est définie par

$$s_{\vec{F}} = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{sur } \vec{F}, \\ -\mathrm{id} & \text{sur } \vec{F}^{\perp}. \end{cases}$$

Les symétries orthogonales sont évidemment des isométries : on l'a déjà montré dans le chapitre III, mais cela peut se voir autrement. En effet, dans une b.o.n. adaptée (construite en réunissant une b.o.n quelconque de $\vec{F}$ et une b.o.n. quelconque de $\vec{F}^{\perp}$), la matrice de $s_{\vec{F}}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\vec{F}} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{\vec{F}^{\perp}} \end{pmatrix},$$

donc est orthogonale.

Plus précisément, on obtient ceci.

Proposition 2.16. *Une symétrie orthogonale $s_{\vec{F}}$ est une isométrie, et c'est une isométrie directe si et seulement si* codim $\vec{F}$ *est pair. En particulier, l'isométrie* $\mathrm{id} = s_{\vec{E}}$ *est toujours directe, alors que l'isométrie* $-\mathrm{id} = s_{\{\vec{0}\}}$ *n'est directe que si, et seulement si, n est pair.*

À propos de symétries orthogonales, on utilisera le vocabulaire suivant.

Définitions 2.17. Si codim $\vec{F} = 1$ (resp. codim $\vec{F} = 2$), on dira que $s_{\vec{F}}$ est une **réflexion** (resp. un **renversement**[2]).

Remarque 2.18. D'après la proposition 2.16, une réflexion est toujours indirecte, et un renversement est toujours direct.

Voici maintenant une caractérisation des symétries orthogonales parmi les isométries.

Proposition 2.19. *Pour $u \in O(\vec{E})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est une symétrie orthogonale;*

(ii) $u \circ u = \mathrm{id}$*;*

(iii) *u est autoadjoint, i.e. $u^* = u$;*

(iv) *u est diagonalisable.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est déjà connu (et est valable pour des symétries même non orthogonales, cf. chapitre II, proposition 5.7).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est évident, puisque $u \in O(\vec{E}) \Rightarrow u^* = u^{-1}$ et $u \circ u = \mathrm{id} \Rightarrow u^{-1} = u$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) est vrai pour tous les endomorphismes (proposition 1.5), mais on peut le voir d'une façon plus simple ici, en montrant en fait que (ii) $\Rightarrow$ (iv) : on a déjà vu (proposition 2.10) que les seules valeurs propres réelles possibles sont ± 1. Les sous-espaces propres correspondants $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ sont forcément en somme directe, il reste donc à voir que $\vec{E}$ en est la somme, ce qui est facile en écrivant tout $\vec{x} \in \vec{E}$ sous la forme $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + u(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - u(\vec{x}))$.

2. Certains auteurs utilisent le vocable « retournement » à la place de « renversement ».

Observons au passage qu'en fait (ii) $\Rightarrow$ (iv) est valable pour tout $u \in L(\vec{E})$, puisque (ii) implique que les seules valeurs propres réelles de u sont ± 1 : il suffit d'écrire que $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ implique $\vec{x} = u^2(\vec{x}) = \lambda^2 \vec{x}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : d'après la proposition 2.10, si u est diagonalisable, cela signifie que $\vec{E}$ est somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. Par conséquent, $u|_{\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})} = \mathrm{id}$ et $u|_{\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id})} = -\mathrm{id}$, ce qui signifie précisément que u est la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. ✓

3 Structure des isométries vectorielles et classification en dimension ≤ 3

On va, dans ce paragraphe, donner la liste des isométries directes et indirectes en petite dimension.

3.1 Cas de la dimension 1

Il n'y a pas vraiment grand-chose à dire, et c'est évident :

Proposition 3.1. *Si $n = 1$, alors $SO(\vec{E}) = \{\mathrm{id}\}$ et $O^-(\vec{E}) = \{-\mathrm{id}\}$.*

3.2 Cas de la dimension 2

Dans tout ce paragraphe, $\vec{E}$ désigne un plan vectoriel euclidien, qu'on supposera **orienté**. Commençons par rappeler les descriptions (qu'on reverra en Exercice) :

Proposition 3.2.

$$\begin{aligned} SO(2) &= \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}, \\ O^-(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}. \\ &= \{\textit{matrices diagonalisables de } O(2)\textit{, admettant pour valeurs propres } 1 \textbf{ et } -1\}. \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt :

Corollaire 3.3. *On a les isomorphismes $SO(2) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$, en particulier le groupe $SO(\vec{E})$ est abélien.*

Un commentaire sur ce résultat : on savait déjà $SO(\vec{E})$ isomorphe à $SO(2)$ (c'est d'ailleurs pour cette raison qu'il est abélien), via le choix d'une base orthonormée de $\vec{E}$. Ce qui est particulier à la dimension 2, c'est que l'isomorphisme est **canonique** dès que $\vec{E}$ est orienté. En effet, l'isométrie de $\vec{E}$ dont l'expression est R_θ dans cette b.o.n. choisie aura la même expression dans toute autre b.o.n. de même sens, car la matrice de passage P sera aussi dans $SO(2)$, groupe abélien, de sorte que $R'_\theta = P^{-1} R_\theta P = R_\theta$. En dimension > 2, ce fait ne se produira plus.

Définition 3.4. D'après la proposition 3.5 du chapitre V, si $\vec{u} \in \vec{E}$ est non nul et $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\vec{u}' \in \vec{E}$ tel que $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \theta\ [2\pi]$. Ceci permet de définir une application r_θ de $\vec{E}$ dans lui-même, par les conditions $r_\theta(\vec{0}) = \vec{0}$ et $r_\theta(\vec{u}) = \vec{u}'$ pour $\vec{u} \neq \vec{0}$. On l'appelle **rotation d'angle de mesure θ** ou, par abus de langage, **rotation d'angle θ**.

Proposition 3.5. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la rotation r_θ est une isométrie directe de $\vec{E}$, ayant pour matrice R_θ dans* **toute** *base orthonormée directe de $\vec{E}$.*

En particulier, ce résultat dit que r_θ est linéaire, ce qui n'est pas évident à voir avec la définition.

Démonstration. Fixons une b.o.n.d. $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit f_θ l'isométrie directe de $\vec{E}$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est R_θ. Par définition, si $\vec{u}$ a pour composantes (x, y) dans $\mathcal{B}$, alors

$f_\theta(\vec{u})$ a pour composantes $(x\cos\theta - y\sin\theta,\, x\sin\theta + y\cos\theta)$. On vérifie facilement que $\vec{u}' = f_\theta(\vec{u})$ satisfait aux conditions $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \theta\ [2\pi]$. Par unicité, on en déduit que $f_\theta(\vec{u}) = r_\theta(\vec{u})$, ce qui prouve que $r_\theta = f_\theta$ et en particulier $r_\theta \in SO(\vec{E})$.

L'assertion sur la forme matricielle de r_θ a déjà été expliquée ci-dessus. ✓

De ce résultat et de la proposition 3.2 on déduit immédiatement :

Corollaire 3.6. *Le groupe $SO(\vec{E})$ est exactement constitué des rotations de $\vec{E}$.*

Reste à savoir ce qu'il y a dans $O^-(\vec{E})$. En utilisant la proposition 3.2, ainsi que la proposition 2.16 et la proposition 2.19, on obtient immédiatement :

Proposition 3.7. *L'ensemble $O^-(\vec{E})$ est exactement constitué des réflexions de $\vec{E}$.*

D'autre part, voici un moyen de distinguer rotations et réflexions parmi les isométries planes.

Proposition 3.8. *Les valeurs propres d'une rotation r_θ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. En particulier, les seules isométries diagonalisables de $\vec{E}$ sont les réflexions et les deux rotations $\pm\,\mathrm{id}$.*

Démonstration. L'assertion sur les valeurs propres de r_θ est immédiate. On en déduit qu'une rotation r_θ est diagonalisable si et seulement si $\theta = 0\ [2\pi]$ ou $\theta = \pi\ [2\pi]$, ce qui correspond respectivement à id et $-$ id. Par ailleurs, on sait que les réflexions sont diagonalisables (cf. proposition 2.19). ✓

Remarque 3.9. Comme $\mathrm{id} = s_{\vec{E}}$ et $-\mathrm{id} = s_{\vec{0}}$, ce résultat est cohérent avec celui de la proposition 2.16.

Comment trouver l'axe d'une réflexion quand celle-ci est donnée par sa matrice dans $O^-(2)$? Voici la réponse.

Proposition 3.10. *Supposons $\vec{E}$ muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. La réflexion s dont la matrice dans $\mathcal{B}$ s'écrit*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

*est d'axe la droite $\vec{\Delta}$ d'***angle polaire** *$\frac{\theta}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire telle que $\widehat{(\mathbb{R}\vec{i}, \vec{\Delta})} = \frac{\theta}{2}\ [\pi]$.*

Démonstration. Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Alors :

$$\begin{aligned} s(\vec{u}) = \vec{u} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\cos\theta) - y\sin\theta = 0 \\ -x\sin\theta + y(1+\cos\theta) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\theta}{2}(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}) = 0 \\ 2\cos\frac{\theta}{2}(-x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2}) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x\sin\tfrac{\theta}{2} - y\cos\tfrac{\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, s est d'axe la droite $\vec{\Delta}$ engendrée par le vecteur $\vec{v} = \cos\frac{\theta}{2}\vec{i} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{j}$. Or il est clair que $\widehat{(\vec{i}, \vec{v})} = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$, d'où le résultat (par une propriété des angles orientés de droites). ✓

Pour finir ce paragraphe, faisons le lien entre rotations et réflexions.

Proposition 3.11.

1) *Soient $\vec{D_1}$, $\vec{D_2}$ deux droites telles que $\widehat{(\vec{D_1}, \vec{D_2})} = \theta\ [\pi]$. Alors $s_{\vec{D}_2} \circ s_{\vec{D}_1} = r_{2\theta}$.*

2) *Réciproquement, toute rotation de $\vec{E}$ s'écrit (d'une infinité de façons) comme produit de deux réflexions.*

Démonstration. Cela se démontre comme dans la proposition 3.9 du chapitre V, qui en est la version affine. On ne peut pas dire que cela en découle puisqu'on ne sait pas (encore) que la partie linéaire d'une rotation affine est une rotation vectorielle ! ✓

3.3 Cas général : forme réduite des isométries

Avant d'examiner le cas de la dimension 3, nous avons besoin de résultats généraux.

Lemme 3.12. *Soit $u \in O(\vec{E})$. Il existe un sous-espace vectoriel $\vec{P}$ de dimension 1 ou 2 de $\vec{E}$ stable par u.*

Démonstration. Posons $v = u + u^* + 2\,\mathrm{id}$. Il est clair que v est autoadjoint, donc toutes ses valeurs propres sont réelles. Soient λ une telle valeur propre et $\vec{x} \neq \vec{0}$ un vecteur propre associé à λ. On a $\lambda\vec{x} = v(\vec{x}) = u(\vec{x}) + u^*(\vec{x}) + 2\vec{x}$, et donc $\lambda u(\vec{x}) = u^2(\vec{x}) + \vec{x} + 2u(\vec{x})$ (puisque $u \circ u^* = \mathrm{id}$). Par conséquent,

$$u^2(\vec{x}) = (\lambda - 2)u(\vec{x}) - \vec{x},$$

ce qui prouve que le sous-espace $\vec{P} = \mathrm{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$ convient. ✓

Proposition 3.13. *On suppose $n \geq 2$. Pour toute isométrie u de $\vec{E}$, il y a une décomposition $\vec{E} = \vec{E_1} \oplus \cdots \oplus \vec{E_k}$ de $\vec{E}$ en somme directe de sous-espaces :*

1) *deux à deux orthogonaux,*
2) *stables par u,*
3) *de dimension 1 ou 2.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, c'est évident. Supposons donc la propriété vraie au rang n, et soit $\vec{E}$ un espace euclidien de dimension $n+1$. Si u est une isométrie de $\vec{E}$, alors le lemme précédent implique qu'il existe un sous-espace $\vec{E_1}$ de dimension 1 ou 2 stable par u. Mais alors son orthogonal $\vec{E_1}^{\perp}$ est également stable par u (voir proposition 2.9) et il est de dimension $n - 1$ ou n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à $\vec{E_1}^{\perp}$. ✓

Théorème 3.14 (Forme réduite des isométries). *Supposons $n \geq 2$. Si $u \in O(\vec{E})$, il existe une base orthonormée de $\vec{E}$ dans laquelle la matrice de u est du type*

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix},$$

où $p = \dim \mathrm{Inv}(u) = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$, $q = \dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$, $p + q + 2m = n$ et les R_{θ_i} sont des matrices de $SO(2)$, distinctes de $\pm I_2$ (i.e. $\theta_i \neq 0\ [\pi]$).

Démonstration. D'après la proposition précédente, on peut écrire $\vec{E} = \vec{E_1} \oplus \cdots \oplus \vec{E_k}$, avec les $\vec{E}_i$ deux à deux orthogonaux, stables par u, et de dimension 1 ou 2. Quitte à les permuter, on peut supposer qu'ils sont ordonnés de la manière suivante : il existe k_0 et k_1 tels que

1) $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_{k_0}$ sont les sous-espaces sur lesquels la restriction de u est id,
2) $\vec{E}_{k_0+1}, \ldots, \vec{E}_{k_1}$ sont les sous-espaces sur lesquels la restriction de u est $-\mathrm{id}$,
3) $\vec{E}_{k_1+1}, \ldots, \vec{E}_k$ sont les sous-espaces restants, i.e. ceux sur lesquels la restriction de u n'admet ni 1 ni -1 comme valeur propre.

Observons alors que les $\overrightarrow{E_i}$ du troisème type sont nécessairement des plans : si l'un deux était une droite $\overrightarrow{D}$, le fait qu'il soit stable par u impliquerait $u|_{\vec{D}} \in O(\overrightarrow{D})$, donc $u|_{\vec{D}} = \pm\,\mathrm{id}$ d'après la classification déjà vue en dimension 1. Ainsi $\overrightarrow{E_i} = \overrightarrow{D}$ serait du premier ou du deuxième type, contradiction.

Il s'ensuit (par la classification en dimension 2) que la restriction de u à chacun de ces plans $\overrightarrow{E_i}$ du troisème type est une rotation r_{θ_i}, distincte de $\pm\,\mathrm{id}$.

Posons $\overrightarrow{F} = \bigoplus_{i=1}^{k_0} \overrightarrow{E_i}$ et $\overrightarrow{G} = \bigoplus_{i=k_0+1}^{k_1} \overrightarrow{E_i}$. Par construction, $\overrightarrow{F}$ est donc le sous-espace propre pour la valeur propre 1, c'est-à-dire $\overrightarrow{F} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$; de même, $\overrightarrow{G} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$.

On construit alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{E}$ en réunissant une base orthonormée quelconque de $\overrightarrow{F}$, une base orthonormée quelconque de $\overrightarrow{G}$, et une base orthonormée directe quelconque pour chaque plan $\overrightarrow{E_i}$ $(k_1 + 1 \leq i \leq n)$, que l'on aura préalablement orienté. Dans $\mathcal{B}$, la matrice de u est bien de la forme annoncée. ✓

De la forme réduite des isométries, on déduit la caractérisation suivante des isométries (in)directes.

Corollaire 3.15. *Soit $u \in O(\overrightarrow{E})$. Avec les notations du théorème précédent, $u \in SO(\overrightarrow{E})$ si et seulement si* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Inv}(u) = n - p$ *est pair.*

3.4 Cas de la dimension 3

Appliquons maintentant les résultats du paragraphe précédent au cas $n = 3$. Un élément u de $SO(\overrightarrow{E})$ admet donc dans une b.o.n. adaptée $\mathcal{B}$ la matrice

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ (ici on autorise toutes les valeurs de θ pour éviter de discuter trop de cas particuliers). Posons $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Inv}(u)$. D'après le corollaire 3.15, c'est un sous-espace de dimension 1 ou 3. Si $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}$ (i.e. $\theta = 0\ [2\pi]$), alors bien sûr $u = \mathrm{id}$; sinon, l'axe $\overrightarrow{\Delta}$ de u est une droite, engendrée par le troisième vecteur de la base $\mathcal{B}$. Supposons alors **$\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ orientés**, de sorte que le plan $\overrightarrow{\Delta}^\perp$ l'est également. D'après le cas $n = 2$, $u|_{\vec{\Delta}^\perp}$ est une rotation plane d'angle θ, d'où le vocabulaire suivant.

Définitions 3.16. Si $u \in SO(\overrightarrow{E})$ est représentée par la matrice ρ_θ dans une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$, on dit que u est la **rotation d'angle θ et d'axe** $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. On la notera $r_{\vec{\Delta},\theta}$, sachant que le cas $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}$ correspond à $u = \mathrm{id}$, et donc à $\theta = 0\ [2\pi]$; dans tous les autres cas, $\overrightarrow{\Delta}$ est une droite.
Dans le cas particulier où $\theta = \pi\ [2\pi]$, u est le renversement $s_{\vec{\Delta}}$. Dans ce cas, on dira plutôt que u est le **demi-tour** d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ (vocabulaire propre à la dimension 3).

Insistons sur le fait que l'isométrie u, supposée distincte de id, n'est bien définie dans $SO(\overrightarrow{E})$ à partir de ρ_θ que si on oriente $\overrightarrow{E}$ **et** $\overrightarrow{\Delta}^\perp$ (ou, ce qui revient au même, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{\Delta}$), comme nous l'avons fait quelques lignes plus haut.

On a donc prouvé :

Proposition 3.17. *Le groupe $SO(\overrightarrow{E})$ est constitué des rotations $r_{\vec{\Delta},\theta}$ définies ci-dessus (dont l'identité et les demi-tours).*

Expliquons comment déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation lorsque celle-ci est donnée sous forme matricielle.

Proposition 3.18. *Soit $u \in SO(\vec{E})$, de matrice $A \in SO(3)$ dans une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Si $A \neq I_3$, alors $u = r_{\vec{\Delta},\theta}$, où $\vec{\Delta}$ est la droite solution du système $AX = X$ et θ est l'angle déterminé par les deux conditions suivantes :*

1) $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta$, *et*

2) $\sin\theta$ *est du signe du produit mixte $[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{i}]$, où $\vec{i}$ est un vecteur dirigeant et orientant $\vec{\Delta}$ et $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{i}$.*

Démonstration. Exercice. ✓

Passons maintenant au cas $u \in O^-(\vec{E})$. Dans une bonne b.o.n., u admet une matrice du type

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\theta = \pi\ [2\pi]$, alors $u = -\operatorname{id}$. Sinon, notons cette fois $\vec{\Delta} = \operatorname{Ker}(u + \operatorname{id})$, c'est-à-dire la droite engendrée par le troisième vecteur de la base. Choisissons une orientation sur $\vec{E}$ et sur $\vec{\Delta}$, de sorte que le plan $\vec{\Delta}^\perp$ est également orienté. Si $\theta = 0\ [2\pi]$, alors u est la réflexion d'axe $\vec{\Delta}^\perp = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id})$. En général, on observe que

$$\sigma_\theta = \rho_\theta \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \rho_\theta, \tag{2}$$

(où ρ_θ est la matrice de (1)) de sorte que u s'écrit comme la composée commutative $r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp} = s_{\vec{\Delta}^\perp} \circ r_{\vec{\Delta},\theta}$ de la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et d'angle θ par la réflexion d'axe $\vec{\Delta}^\perp$.

Définition 3.19. Soit $\vec{\Delta}$ une droite orientée de $\vec{E}$ (lui-même supposé orienté) et soit $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\theta \neq 0\ [\pi]$. La composée commutative $r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp} = s_{\vec{\Delta}^\perp} \circ r_{\vec{\Delta},\theta}$ s'appelle **antirotation de droite $\vec{\Delta}$ et d'angle θ**.

Proposition 3.20. *Le sous-espace des vecteurs fixes d'une antirotation est réduit à $\vec{0}$.*

Démonstration. Soit $r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp}$ une antirotation, avec $\theta \neq 0\ [\pi]$. Soit $\vec{x} \in \vec{E}$, s'écrivant $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ dans la décomposition $\vec{E} = \vec{\Delta} \oplus \vec{\Delta}^\perp$. Alors

$$r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp}(\vec{x}) = r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp}(\vec{y} + \vec{z}) = r_{\vec{\Delta},\theta}(-\vec{y} + \vec{z}) = -\vec{y} + r_\theta(\vec{z})$$

où r_θ désigne la rotation d'angle θ dans le plan orienté $\vec{\Delta}^\perp$. On en déduit

$$r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_{\vec{\Delta}^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{y} = \vec{y} \\ r_\theta(\vec{z}) = \vec{z} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{z} = \vec{0}$$

puisque $\theta \neq 0\ [\pi] \Rightarrow \operatorname{Inv}(r_\theta) = \{\vec{0}\}$. Le résultat annoncé s'ensuit. ✓

Remarques 3.21.

1) L'ensemble des vecteurs invariants par une antirotation est réduit à $\{\vec{0}\}$, ce n'est donc pas $\vec{\Delta}$, et c'est pour cela qu'on préfère dire « antirotation de droite $\vec{\Delta}$ » plutôt que « antirotation d'axe $\vec{\Delta}$ ».

2) L'écriture (2) est en fait valable pour toute matrice de $O^-(3)$, i.e. pour tout θ. Ainsi, toute réflexion peut s'écrire comme une antirotation, correspondant au cas « dégénéré » $\theta = 0\ [2\pi]$ (et donc $r_{\vec{\Delta},\theta} = \operatorname{id}$), et une antirotation d'angle $\theta = \pi\ [2\pi]$ n'est autre que $-\operatorname{id}$ (quelle que soit $\vec{\Delta}$). Toutefois, on préfère distinguer ces trois notions.

On a finalement démontré le résultat suivant.

Proposition 3.22. *Tout élément u de $O^-(\vec{E})$ est soit $-\operatorname{id}$, soit une réflexion (d'axe* $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{id})$*), soit une antirotation (de droite* $\vec{\Delta} = \operatorname{Ker}(u+\operatorname{id})$ *et d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$).*

Là encore, on prendra garde au fait que u ne sera bien déterminée à partir de sa matrice qu'après avoir fixé une orientation sur $\vec{E}$ et sur $\vec{\Delta}$.

Terminons avec l'analogue de la proposition 3.18 pour les isométries indirectes.

Proposition 3.23. *Soit $u \in O^-(\vec{E})$, de matrice $A \in O^-(3)$ dans une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Alors :*

1) *si A est symétrique, $u = -\operatorname{id}$ ou bien u est une réflexion, d'axe solution du système $AX = X$;*

2) *sinon, u est une antirotation de droite $\vec{\Delta}$ solution du système $AX = -X$, et d'angle θ déterminé par les deux conditions suivantes :*

   a) $\operatorname{tr} A = -1 + 2\cos\theta$, *et*

   b) $\sin\theta$ *est du signe du produit mixte $[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{i}]$, où $\vec{i}$ est un vecteur dirigeant et orientant $\vec{\Delta}$ et $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{i}$.*

Démonstration. Exercice. ✓

4 Génération du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal

Pour un énoncé convenable du théorème suivant, on conviendra que l'identité est produit de zéro réflexions.

Théorème 4.1 (Cartan-Dieudonné). *Le groupe $O(\vec{E})$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, soit $u \in O(\vec{E})$ et soit $p = \dim \operatorname{Inv}(u)$. Alors u s'écrit comme produit de $n-p$ réflexions, dont l'intersection des axes est exactement* $\operatorname{Inv}(u)$.

Démonstration. D'après le théorème 3.14, on a une décomposition en somme directe orthogonale

$$\vec{E} = \operatorname{Ker}(u-\operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u+\operatorname{id}) \oplus \vec{E}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{E}_m, \tag{1}$$

et la restriction de u à chaque plan $\vec{E}_i$ est une rotation r_i distincte de $\pm\operatorname{id}$. D'après la proposition 3.11, pour tout i il existe deux réflexions σ_i, σ_i' de $\vec{E}_i$ telles que $r_i = \sigma_i \circ \sigma_i'$. Prolongeons chaque σ_i en une isométrie s_i définie sur $\vec{E}$ tout entier, en posant $s_i|_{\vec{E}_i} = \sigma_i$ et $s_i|_{\vec{E}_i^\perp} = \operatorname{id}$. Prolongeons de la même façon σ_i' en une s_i' sur $\vec{E}$. Clairement, s_i et s_i' sont des réflexions de $\vec{E}$ (ce sont des isométries qui admettent pour valeurs propres 1 avec multiplicité $n-1$ et -1 avec multiplicité 1) et, pour tout i,

$$(s_1 \circ s_1' \circ \cdots \circ s_m \circ s_m')|_{\vec{E}_i} = (s_i \circ s_i')|_{\vec{E}_i} = \sigma_i \circ \sigma_i' = r_i = u|_{\vec{E}_i}.$$

Donc

$$s_1 \circ s_1' \circ \cdots \circ s_m \circ s_m' = \begin{cases} u & \text{sur } \vec{E}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{E}_m, \\ \operatorname{id} & \text{sur } (\vec{E}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{E}_m)^\perp = \operatorname{Ker}(u-\operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u+\operatorname{id}). \end{cases} \tag{2}$$

Écrivons maintenant $\operatorname{Ker}(u+\operatorname{id}) = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q)$, et soit s_i'' la réflexion d'axe $\vec{e}_i^{\,\perp}$. Alors $s_i''|_{\vec{e}_i^{\,\perp}} = \operatorname{id}$ et $s_i''|_{\operatorname{Vect}(\vec{e}_i)} = -\operatorname{id}$, d'où

$$s_1'' \circ \cdots \circ s_q'' = \begin{cases} -\operatorname{id} & \text{sur } \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q), \\ \operatorname{id} & \text{sur } \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_q)^\perp, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
s_1'' \circ \cdots \circ s_q'' &= \begin{cases} u & \text{sur } \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}), \\ \mathrm{id} & \text{sur } \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \vec{E}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{E}_m. \end{cases} \\
&= \begin{cases} u & \text{sur } \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}), \\ \mathrm{id} & \text{sur } \vec{E}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{E}_m. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}
$$

De (2) et (3), on déduit la décomposition globale

$$u = s_1'' \circ \cdots \circ s_q'' \circ s_1 \circ s_1' \circ \cdots \circ s_m \circ s_m',$$

où il y a bien au total $q + 2m = n - p$ réflexions.

Enfin, considérons l'intersection $\vec{F}$ des $n - p$ axes hyperplans des s_i, s_i', s_i''. Si $\vec{H}_i$ (resp. $\vec{H}_i'$) désigne l'axe de s_i (resp. de s_i'), on a donc

$$\vec{F} = \bigcap_{i=1}^{m} (\vec{H}_i \cap \vec{H}_i') \cap \bigcap_{j=1}^{q} \vec{e}_j^{\perp}.$$

Par définition des réflexions s_i et s_i', on a $\vec{E}_i^{\perp} \subset \vec{H}_i \cap \vec{H}_i'$. Mais $\vec{H}_i \neq \vec{H}_i'$ (sinon $s_i = s_i'$, $\sigma_i = \sigma_i'$ et $r_i = \mathrm{id}$, exclu), par conséquent leur somme $\vec{H}_i + \vec{H}_i'$ est de dimension $> n - 1$, c'est-à-dire égale à n, donc leur intersection $\vec{H}_i \cap \vec{H}_i'$ est (par la formule de Grassmann) de dimension $(n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 = \dim \vec{E}_i^{\perp}$, si bien qu'on a l'égalité

$$\vec{H}_i \cap \vec{H}_i' = \vec{E}_i^{\perp}.$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \bigcap_{i=1}^{m} \vec{E}_i^{\perp} \cap \bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Vect}(\vec{e}_j)^{\perp} \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \vec{E}_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \mathrm{Vect}(\vec{e}_j) \right)^{\perp} \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \vec{E}_i \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \right)^{\perp} \\
&= \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})
\end{aligned}
$$

d'après (1). Autrement dit, $\vec{F} = \mathrm{Inv}(u)$. ✓

Remarque 4.2. On peut démontrer que u ne peut s'écrire comme produit de $k < n - p$ réflexions (Exercice).

Avant d'examiner le cas du groupe spécial orthogonal, nous avons besoin du :

Lemme 4.3. *Supposons $n \geq 3$. Si s et s' sont des réflexions, il existe des renversements r et r' tels que $s \circ s' = r \circ r'$.*

Démonstration. Si $s = s'$ alors $s \circ s' = \mathrm{id} = r \circ r$ pour tout renversement r de $\vec{E}$. Supposons donc $s \neq s'$, si bien que l'intersection $\vec{F}$ des hyperplans axes de s, s' est de dimension $n-2$. Fixons une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$, fabriquée en réunissant une b.o.n. de $\vec{F}$ et une b.o.n. de $\vec{F}^{\perp}$, et soient A, A' les matrices de s, s' relativement à $\mathcal{B}$. Comme s, s' restreintes à $\vec{F}$ sont l'identité, elles stabilisent ce sous-espace, donc aussi son orthogonal (cf. proposition 2.9). Notons alors B (resp. B') la matrice de la restriction de s (resp. de s') au plan $\vec{F}^{\perp}$. Comme $n \geq 3$, on peut écrire

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} I_{n-2} & \\ & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-2} & \\ & B' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-3} & & \\ & -1 & \\ & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-3} & & \\ & -1 & \\ & & B' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Or B et B' admettent comme valeurs propres 1 et -1, avec multiplicité 1 chacune; par conséquent, les deux matrices du membre de droite de (4) admettent les valeurs propres 1 et -1, avec multiplicités respectives $n-2$ et 2 : ce sont donc les matrices de deux renversements r et r'. ✓

Théorème 4.4. *Supposons $n \geq 3$. Le groupe $SO(\vec{E})$ est engendré par les renversements. Plus précisément, si $u \in SO(\vec{E})$ et $p = \dim \mathrm{Inv}(u)$ (rappel : $n - p$ est un entier pair), alors u s'écrit comme produit de $n - p$ renversements.*

Ici aussi, on conviendra que l'identité est produit de zéro renversements.

Démonstration. D'après le théorème de Cartan-Dieudonné 4.1, u s'écrit comme produit de $n-p$ réflexions, et $n-p$ est pair d'après le corollaire 3.15. Par conséquent, on peut grouper les réflexions deux par deux et appliquer le lemme précédent. ✓

Remarque 4.5. En dimension 2, le seul renversement est $-\mathrm{id}$, donc ce théorème devient faux. Il doit être remplacé par la proposition 3.11. En dimension 1, les renversements ne sont pas définis, et on rappelle que $SO(\vec{E}) = \{\mathrm{id}\}$.

Finissons ce paragraphe par une forme plus précise du résultat précédent, dont l'intérêt, purement technique, n'apparaîtra que dans le chapitre suivant.

Proposition 4.6. *Supposons $n \geq 3$. Soit $u \in SO(\vec{E})$ tel que $p = \dim \mathrm{Inv}(u) \geq 1$, et soit $\vec{x} \in \mathrm{Inv}(u)$ non nul. Alors dans l'écriture en produit de renversements $u = r_1 \circ \cdots \circ r_{n-p}$ fournie par le théorème 4.4, on peut supposer que r_1 est tel que $\vec{x} \in \mathrm{Inv}(r_1)^{\perp}$.*

Démonstration. D'après le théorème de Cartan-Dieudonné 4.1, $u = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_{n-p}$, avec $\bigcap_i \mathrm{Inv}(s_i) = \mathrm{Inv}(u)$. En particulier, $\vec{x} \in \vec{F}$, où $\vec{F} = \mathrm{Inv}(s_1) \cap \mathrm{Inv}(s_2)$ est de dimension $n-2$. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-2})$ une b.o.n. quelconque de $\vec{F}$. L'écriture (4) de la preuve du lemme 4.3 montre que $s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$, avec r_1, r_2 des renversements et $r_1(\vec{e}_{n-2}) = -\vec{e}_{n-2}$, i.e. $\vec{e}_{n-2} \in \mathrm{Ker}(r_1 + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(r_1 - \mathrm{id})^{\perp} = \mathrm{Inv}(r_1)^{\perp}$ (ici on a utilisé le fait que r_1 est une symétrie orthogonale). Il suffit donc de choisir a priori $\vec{e}_{n-2} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ pour que la première matrice de (4) fournisse un renversement r_1 possédant la propriété requise. ✓

5 Similitudes vectorielles

Comme on va le voir, les similitudes sont des applications généralisant les isométries. Leur étude se ramènera d'ailleurs, dans une certaine mesure, à celle des isométries.

Définition 5.1. On dit que $\sigma \in L(\vec{E})$ est une **similitude (vectorielle)** s'il existe un réel $k > 0$ tel que $\|\sigma(\vec{x})\| = k\|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$.
S'il existe, un tel réel k est clairement unique; on l'appelle le **rapport** de la similitude σ.

Exemples 5.2. Toute isométrie est une similitude de rapport 1, toute homothétie (vectorielle) $\lambda\,\mathrm{id}$ est une similitude de rapport $k = |\lambda|$. Il faudra donc prendre soin de ne pas confondre les deux notions de rapport pour une homothétie.

Observons qu'une similitude vectorielle est une application linéaire injective, donc bijective (on est en dimension finie). Mais on a mieux que cela (preuves faciles, similaires à celles données pour les isométries) :

Proposition 5.3.

1) *Toute similitude est un automorphisme linéaire de $\vec{E}$.*
2) *L'ensemble $GO(\vec{E})$ des similitudes de $\vec{E}$ est un sous-groupe de $GL(\vec{E})$.*
3) *L'ensemble $GO^+(\vec{E})$ des similitudes directes de $\vec{E}$ est un sous-groupe distingué de $GO(\vec{E})$.*
4) *L'ensemble $GO^-(\vec{E})$ des similitudes indirectes de $\vec{E}$ n'est pas un groupe.*

On peut en outre préciser facilement la structure des groupes de similitudes à partir des groupes d'isométries.

Théorème 5.4.

1) *L'application $O(\vec{E}) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow GO(\vec{E}), (u,k) \mapsto (k\,\mathrm{id}) \circ u = ku$ est un isomorphisme de groupes. Autrement dit : toute similitude vectorielle s'écrit de manière unique comme composée (commutative) d'une isométrie et d'une homothétie de rapport > 0.*

2) *L'application $SO(\vec{E}) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow GO^+(\vec{E}), (u,k) \mapsto (k\,\mathrm{id}) \circ u = ku$ est un isomorphisme de groupes. Autrement dit : toute similitude vectorielle directe s'écrit de manière unique comme composée (commutative) d'une isométrie directe et d'une homothétie de rapport > 0.*

Démonstration. 1) Il est clair que l'application $O(\vec{E}) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow GO(\vec{E}), (u,k) \mapsto ku$ est un morphisme de groupes.

Il est injectif, car si $ku = \mathrm{id}$, alors pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $\|ku(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, c'est-à-dire $k\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$. On en déduit $k = 1$, puis $u = \mathrm{id}$.

Il est aussi surjectif : si $\sigma \in GO(\vec{E})$, alors $\sigma = k(k^{-1}\sigma)$, où k est le rapport de σ.

2) Preuve similaire. ✓

En utilisant les résultats du paragraphe 4, on trouve :

Corollaire 5.5.

1) *Le groupe $GO(\vec{E})$ est engendré par les isométries et les homothéties (de rapport positif), donc par les réflexions et les homothéties (de rapport positif).*

2) *Si $n \geq 3$, le groupe $GO^+(\vec{E})$ est engendré par les isométries directes et les homothéties (de rapport positif), donc par les renversements et les homothéties (de rapport positif).*

Passons aux diverses caractérisations des similitudes. La première est facile et a déjà été démontrée (lemme 8.1 du chapitre III) :

Proposition 5.6. *Soient $\sigma \in L(\vec{E})$ et $k > 0$. Alors σ est une similitude de rapport k si et seulement si $(\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) = k^2 (\vec{x}|\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.*

En voici deux autres qui demandent un peu plus d'effort.

Théorème 5.7. *Supposons $n \geq 2$ (pour parler d'angles). Pour $\sigma \in L(\vec{E})$ injective, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *σ est une similitude;*

(ii) *σ conserve les angles non orientés (de vecteurs, de demi-droites, de droites);*

(iii) *σ conserve l'orthogonalité.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : on avait déjà remarqué que les isométries conservent les angles non orientés. Vu le corollaire 5.5, il suffit de le vérifier pour les homothéties, ce qui est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : si σ conserve les angles non orientés, σ conserve les angles droits.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Fixons $\vec{x} \in \vec{E}$ non nul et définissons les formes linéaires

$$\varphi_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{et} \quad \psi_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto (\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) .$$

Comme $\vec{x}$ est non nul, $\varphi_{\vec{x}}$ est non nulle donc $\operatorname{Ker} \varphi_{\vec{x}}$ est un hyperplan, et l'hypothèse (iii) se traduit par $\operatorname{Ker} \varphi_{\vec{x}} \subset \operatorname{Ker} \psi_{\vec{x}}$. Par conséquent (cf. chapitre I, exercice 5, question 5), il existe un réel $\lambda(\vec{x})$ (éventuellement nul si $\psi_{\vec{x}} \equiv 0$) tel que $\psi_{\vec{x}} = \lambda(\vec{x})\varphi_{\vec{x}}$. Soit maintenant un autre vecteur non nul $\vec{y} \in \vec{E}$. D'une part, l'égalité précédente évaluée en $\vec{y}$ donne :

$$(\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) = \lambda(\vec{x}) (\vec{x}|\vec{y}) . \tag{1}$$

D'autre part, on a aussi $\psi_{\vec{y}} = \lambda(\vec{y})\varphi_{\vec{y}}$, et donc en évaluant en $\vec{x}$:

$$(\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) = \lambda(\vec{y}) (\vec{x}|\vec{y}) . \tag{2}$$

1) Si $(\vec{x}|\vec{y}) \neq 0$, alors (1) et (2) impliquent $\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{y})$.

2) Si $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$, posons $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$. Comme $\vec{z}$ n'est pas nul (sinon $\vec{x}$ et $\vec{y} = -\vec{x}$ ne seraient pas orthogonaux) et vérifie $(\vec{x}|\vec{z}) \neq 0$ et $(\vec{y}|\vec{z}) \neq 0$, on peut appliquer successivement le cas 1) aux couples $(\vec{x}, \vec{z})$ et $(\vec{z}, \vec{y})$. On obtient ainsi $\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{z}) = \lambda(\vec{y})$.

En résumé, le réel $\lambda(\vec{x})$ est indépendant de $\vec{x} \in \vec{E}$ non nul, on le notera λ. Comme ce λ convient également pour $\vec{x} = \vec{0}$, on a finalement obtenu :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}, \ (\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) = \lambda (\vec{x}|\vec{y}) ,$$

et en particulier

$$\forall \vec{x} \in \vec{E}, \ \|\sigma(\vec{x})\|^2 = \lambda \|\vec{x}\|^2.$$

Enfin, comme σ est injective, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ alors $\sigma(\vec{x}) \neq \vec{0}$, et donc $0 < \|\sigma(\vec{x})\|^2 = \lambda \|\vec{x}\|^2$. Ceci implique $\lambda > 0$, et ainsi σ est bien une similitude de rapport $k = \sqrt{\lambda}$. ✓

Enfin, terminons avec le cas particulier de la dimension 2. Le résultat suivant nous sera utile, dans ce chapitre et dans le suivant.

Lemme 5.8. *Supposons $\vec{E}$ de dimension 2. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ sont non nuls, il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) s telle que $s(\vec{x}) = \vec{y}$.*

Démonstration. La rotation r d'angle une mesure de $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ envoie $\vec{x}$ sur $\lambda\vec{y}$, pour un certain $\lambda > 0$, si bien que $s = \lambda^{-1}r$ est une similitude directe convenant.

Supposons qu'une autre similitude directe s' convienne également. Alors $s' \circ s^{-1}(\vec{x}) = \vec{x}$. Ainsi, la similitude directe $s' \circ s^{-1}$ est de rapport 1, c'est une isométrie directe en dimension 2, donc une rotation. Or la seule rotation admettant un vecteur fixe non nul est l'identité, d'où $s = s'$.

Si l'on veut le résultat avec une similitude indirecte, il suffit de composer s par la réflexion d'axe $\mathbb{R}\vec{y}$; l'unicité se prouve alors comme précédemment. ✓

Théorème 5.9. *Soit $\vec{E}$ un plan euclidien orienté. Pour $\sigma \in L(\vec{E})$ injective, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *σ est une similitude directe (resp. indirecte) ;*

(ii) *σ conserve (resp. renverse) les angles orientés (de vecteurs, de demi-droites, de droites).*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair qu'une homothétie vectorielle conserve les angles orientés. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème résulte donc du corollaire 5.5 et de ce qu'on sait déjà pour les isométries.

Examinons maintenant la réciproque.

1) Soit $\sigma \in L(\vec{E})$ injective conservant les angles orientés, disons, de vecteurs (la preuve est similaire pour les autres notions d'angles). Pour tous $\vec{x}, \vec{y}$ non nuls, on a donc $\widehat{(\sigma(\vec{x}), \sigma(\vec{y}))} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Soit alors $\vec{x} \neq \vec{0}$.

a) Si $\sigma(\vec{x}) = \vec{x}$, on obtient, pour tout $\vec{y} \neq \vec{0}$, $\widehat{(\vec{x}, \sigma(\vec{y}))} = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$, donc $\widehat{(\sigma(\vec{y}), \vec{y})} = 0\ [2\pi]$ (règle d'échange), si bien que $\sigma(\vec{y}) = \lambda(\vec{y})\vec{y}$ pour un $\lambda(\vec{y}) > 0$. D'après le lemme 4.12 du chapitre II, σ est une homothétie, donc une similitude directe.

b) Si $\sigma(\vec{x}) \neq \vec{x}$, alors il existe une similitude directe s telle que $(s \circ \sigma)(\vec{x}) = \vec{x}$. En effet, on peut appliquer le lemme 5.8, avec $\vec{y} = \sigma(\vec{x})$ (non nul car σ injective).

D'après le cas a), $s \circ \sigma$ est alors une homothétie h, si bien que $\sigma = s^{-1} \circ h$ est encore une similitude directe.

2) Si $\sigma \in L(\vec{E})$ renverse les angles orientés, on la compose par une réflexion (donc une similitude indirecte), et on applique le cas 1) : σ sera la composée d'une similitude directe par une réflexion, donc sera une similitude indirecte.

Le théorème est donc démontré. ✓

6 Exercices

Exercice 1. Soit $u \in L(\vec{E})$, et soit u^* son adjoint.

1) Montrer que u et u^* ont les mêmes valeurs propres.

2) Établir l'identité $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

3) On suppose que u est **normal**, c'est-à-dire que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

a) Citer deux exemples d'endomorphismes normaux, tirés du cours.

b) Montrer : $\forall \vec{x} \in \vec{E}$, $\|u(\vec{x})\| = \|u^*(\vec{x})\|$.

c) En déduire l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$, puis la décomposition $\vec{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 2. Soit $\sigma : \vec{E} \to \vec{E}$ vérifiant $\sigma(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\|\sigma(\vec{x}) - \sigma(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.

1) Montrer que σ conserve le produit scalaire, i.e. que $(\sigma(\vec{x})|\sigma(\vec{y})) = (\vec{x}|\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.

2) Prouver que σ transforme toute base orthonormée de $\vec{E}$ en une base orthonormée de $\vec{E}$.

3) En déduire que σ est linéaire, puis que $\sigma \in O(\vec{E})$.

4) Aurait-on le même résultat si on remplace la condition de conservation de la distance par la condition de conservation de la norme ?

Exercice 3. Soit σ une symétrie de $\vec{E}$. Montrer l'équivalence entre :

(i) σ est une symétrie orthogonale;

(ii) σ est une isométrie.

Exercice 4.

1) Montrer que $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{\pm 1\},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

2) En déduire les descriptions suivantes :

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{\text{matrices diagonalisables de } O(2) \text{ admettant pour valeurs propres } 1 \text{ et } -1\}.$$

3) Démontrer que les groupes $SO(2)$, $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont tous isomorphes.

Exercice 5. On suppose $\vec{E}$ de dimension 2. Soient r une rotation et s une réflexion de $\vec{E}$. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 6. On suppose $\vec{E}$ de dimension 3. Soit $u \in SO(\vec{E})$, de matrice $A \in SO(3)$ dans une base orthonormée directe de $\vec{E}$. On suppose $A \neq I_3$. Montrer que $u = r_{\vec{\Delta},\theta}$, où :

1) $\vec{\Delta}$ est la solution du système $AX = X$;

2) l'angle θ est déterminé par les deux conditions suivantes :

a) $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta$, et

b) $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{i}]$, où $\vec{i}$ est un vecteur dirigeant et orientant $\vec{\Delta}$, et $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{i}$.

Exercice 7. On suppose $\vec{E}$ de dimension 3. Soit $u \in O^-(\vec{E})$, de matrice $A \in O^-(3)$ dans une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Montrer que :

1) si A est symétrique, alors $u = -\mathrm{id}$ ou bien u est une réflexion, d'axe solution du système $AX = X$;

2) sinon, u est une antirotation de droite $\vec{\Delta}$ solution du système $AX = -X$, et d'angle θ déterminé par les deux conditions suivantes :

a) $\operatorname{tr} A = -1 + 2\cos\theta$, et

b) $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{i}]$, où $\vec{i}$ est un vecteur dirigeant et orientant $\vec{\Delta}$, et $\vec{x}$ est n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{i}$.

Exercice 8. En utilisant les deux exercices précédents, reconnaître les endomorphismes donnés par les matrices suivantes dans une base orthonormée directe :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. On suppose $\overrightarrow{E}$ de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, et d'angle $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Exercice 10.

1) Soient $u \in L(\overrightarrow{E})$ et $v \in GL(\overrightarrow{E})$. Montrer que $\mathrm{Inv}(v \circ u \circ v^{-1}) = v(\mathrm{Inv}\, u)$.

2) Soient $u \in Z(O(\overrightarrow{E}))$ et s une symétrie orthogonale d'axe une droite $\overrightarrow{D}$. Prouver que $u(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{D}$. À l'aide du lemme 4.12 du chapitre II, en déduire que $Z(O(\overrightarrow{E})) = \{\pm\, \mathrm{id}\}$.

3) On suppose $n = \dim \overrightarrow{E} \geq 3$. En procédant comme ci-dessus, démontrer que le centre $Z(SO(\overrightarrow{E}))$ vaut $\{\mathrm{id}\}$ si n est impair et $\{\pm\, \mathrm{id}\}$ si n est pair. Que vaut-il pour $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 11. Le théorème de Cartan-Dieudonné dit que, si $u \in O(\overrightarrow{E})$ et si $p = \dim \mathrm{Inv}(u)$, alors u s'écrit comme produit de $n - p$ réflexions. Montrer que ce nombre est minimal, c'est-à-dire que u ne peut s'écrire comme produit de $k < n - p$ réflexions.

Exercice 12. Soit $u \in L(\overrightarrow{E})$. Démontrer que u est une similitude si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u = \lambda\, \mathrm{id}$.

Chapitre VII : Isométries et similitudes affines

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace affine euclidien (orienté) de dimension $n \geq 1$.

1 Isométries affines

1.1 Les groupes $\mathrm{Is}(E)$ et $\mathrm{Is}^+(E)$

Définition 1.1. Une application (ensembliste) $f : E \longrightarrow E$ est une **isométrie** si elle conserve la distance, i.e. si $f(M)f(N) = MN$ pour tous $M, N \in E$.

Exemples 1.2. Nous avons déjà vu que les translations et les symétries orthogonales (donc aussi centrales) sont des isométries, mais pas les projections (non banales) ni les homothéties de rapport différent de ± 1.

Théorème 1.3. *Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Alors f est une isométrie de E si et seulement si f est affine et $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle de $\vec{E}$.*

Démonstration. Soit f une isométrie. Fixons $O \in E$, et définissons $\sigma : \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ par $\sigma(\vec{x}) = \overrightarrow{f(O)f(O+\vec{x})}$. Alors, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, on a $\sigma(\vec{x}) - \sigma(\vec{y}) = \overrightarrow{f(O+\vec{y})f(O+\vec{x})}$, donc aussi

$$\|\sigma(\vec{x}) - \sigma(\vec{y})\| = \|\overrightarrow{(O+\vec{y})(O+\vec{x})}\| = \|(O+\vec{x}) - (O+\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Comme il est clair que $\sigma(\vec{0}) = \vec{0}$, on déduit du théorème 2.12 du chapitre VI que σ est une isométrie vectorielle. Ainsi, f est affine de partie linéaire σ, donc $f \in GA(E)$ et $\vec{f} \in O(\vec{E})$.

Réciproquement, si f est affine de partie linéaire $\vec{f}$ qui conserve la norme, alors pour tous $M, N \in E$:

$$f(M)f(N) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = MN$$

donc f est une isométrie. ✓

En particulier, on en déduit :

Corollaire 1.4. *Une isométrie de E est automatiquement affine et bijective, et l'ensemble* $\mathrm{Is}(E)$ *des isométries de E est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.*

Faisons le lien entre ce groupe et le groupe des isométries vectorielles.

Proposition 1.5.

1) *L'application naturelle* $L : \mathrm{Is}(E) \longrightarrow O(\overrightarrow{E})$, $f \longmapsto \vec{f}$, *est un morphisme de groupes surjectif, appelé* **morphisme canonique** *de* $\mathrm{Is}(E)$ *dans* $O(\overrightarrow{E})$.

2) *Pour tout* $O \in E$, *l'ensemble* $\mathrm{Is}_O(E)$ *des isométries de* E *fixant* O *est un sous-groupe de* $\mathrm{Is}(E)$, *isomorphe au groupe orthogonal* $O(\overrightarrow{E})$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 2.3 du chapitre II.

1) Il est clair que L est un morphisme (c'est la restriction à $\mathrm{Is}(E)$ du morphisme étudié dans la référence citée), montrons qu'il est surjectif. Soit donc $\sigma \in O(\overrightarrow{E})$. Soient $A, B \in E$ choisis arbitrairement, alors on sait qu'il existe une (unique) f affine telle que $f(A) = B$ et $\vec{f} = \sigma$. Comme $\vec{f} \in O(\overrightarrow{E})$, on déduit du théorème 1.3 que $f \in \mathrm{Is}(E)$.

2) Soit $O \in E$. Il est facile de constater que $\mathrm{Is}_O(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$. Considérons la restriction L' de L à $\mathrm{Is}_O(E)$. Comme on l'a vu dans le 1), pour toute $\sigma \in O(\overrightarrow{E})$, il existe une unique f affine telle que $f(O) = O$ et $\vec{f} = \sigma$. Autrement dit, pour toute $\sigma \in O(\overrightarrow{E})$, il existe une unique $f \in \mathrm{Is}_O(E)$ telle que $L'(f) = \sigma$, cqfd. ✓

Corollaire 1.6.

1) *L'ensemble* $\mathrm{Is}^+(E)$ *des isométries directes de* E *est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{Is}(E)$.

2) *L'ensemble* $\mathrm{Is}^-(E)$ *des isométries indirectes de* E *n'est pas un groupe.*

Démonstration. C'est immédiat, puisque $\mathrm{Is}^+(E) = L^{-1}(SO(\overrightarrow{E}))$ et $SO(\overrightarrow{E}) \triangleleft O(\overrightarrow{E})$. ✓

Remarque 1.7. On peut énoncer un résultat analogue à la proposition 1.5 en changeant $\mathrm{Is}(E)$ en $\mathrm{Is}^+(E)$ et $O(\overrightarrow{E})$ en $SO(\overrightarrow{E})$.

Définitions 1.8. Tout élément de $\mathrm{Is}^+(E)$ (resp. de $\mathrm{Is}^-(E)$) s'appelle un **déplacement** (resp. un **antidéplacement**) de E. En particulier, $\mathrm{Is}^+(E)$ est appelé **groupe des déplacements** de E.

De la proposition 2.8 du chapitre VI, on déduit immédiatement la

Proposition 1.9. *Le groupe* $\mathrm{Is}(E)$ *(resp.* $\mathrm{Is}^+(E)$*) agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères orthonormés (resp. sur l'ensemble des repères orthonormés de même sens) de* E.

En dehors des notions affines préservées par toute bijection affine, les isométries préservent un certain nombre de notions euclidiennes. Le résultat suivant est encore une conséquence de ce qui a été vu dans le chapitre VI.

Théorème 1.10.

1) *Toute isométrie affine conserve l'orthogonalité et la perpendicularité des sous-espaces et, plus généralement, conserve les notions d'angles non orientés.*

2) *Dans un plan affine euclidien orienté, tout déplacement conserve les notions d'angles orientés, tout antidéplacement les contrarie.*

1.2 Premiers exemples

Tout d'abord, en considérant le noyau du morphisme L de la proposition 1.5, on obtient :

Proposition 1.11. *Le groupe $T(E)$ des translations est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{Is}(E)$*, et aussi de* $\mathrm{Is}^+(E)$.

En ce qui concerne les symétries orthogonales particulières, on conserve les définitions du chapitre précédent. On obtient ainsi :

Proposition 1.12. *Une symétrie orthogonale s_F d'axe un sous-espace F est un déplacement si et seulement si* codim F *est paire. En particulier :*

1) *une réflexion est toujours un antidéplacement;*

2) *un renversement est toujours un déplacement (rappel : en dimension* 3*, les renversements sont appelés demi-tours);*

3) *une symétrie centrale est un déplacement si et seulement si n est pair.*

Rappel 1.13. Dans un plan affine euclidien orienté E, soient $A \in E$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La **rotation de centre A et d'angle θ** est l'application $r_{A,\theta}$ définie par :

- $r_{A,\theta}(A) = A$;
- si $M \neq A$, $r_{A,\theta}(M)$ est l'unique point M' tel que $AM = AM'$ et $\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})} = \theta\ [2\pi]$.

Proposition 1.14.

1) *Toute rotation $r_{A,\theta}$ est un déplacement, de partie linéaire la rotation vectorielle r_θ.*

2) $r_{A,\theta} = \mathrm{id}$ *si et seulement si $\theta = 0\ [2\pi]$;*

3) $r_{A,\theta} = s_A$ *si et seulement si $\theta = \pi\ [2\pi]$;*

4) *si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, alors A est l'unique point fixe de $r_{A,\theta}$;*

5) $r_{A,\theta} \circ r_{A,\theta'} = r_{A,\theta+\theta'}$*; en particulier, l'ensemble des rotations de centre A* **fixé** *est un groupe pour la composition, isomorphe au groupe des angles orientés de vecteurs.*

Démonstration.

1) Nous savons déjà que $r_{A,\theta}$ est un déplacement, en tant que composée de deux réflexions (cf. proposition 3.9 du chapitre V), donc de deux antidéplacements (cf. proposition 1.12). Mais la preuve qui suit le redémontre au passage.

Soient donc $M, N \in E$ et M', N' leurs images par la rotation $r_{A,\theta}$. L'application vectorielle qui à $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ associe $\vec{u}' = \overrightarrow{AM'}$ est caractérisée par les conditions $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \theta\ [2\pi]$, c'est donc la rotation vectorielle r_θ définie au chapitre précédent. On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'} = r_\theta(\overrightarrow{AN}) - r_\theta(\overrightarrow{AM}) = r_\theta(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = r_\theta(\overrightarrow{MN}),$$

ce qui prouve que $r_{A,\theta}$ est affine, de partie linéaire r_θ ; c'est donc bien un déplacement du plan E.

2) On a : $\theta = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow r_\theta = \mathrm{id} \Leftrightarrow r_{A,\theta} = \mathrm{id}$, la dernière équivalence résultant du fait que les deux applications affines considérées ont même partie linéaire et coïncident en un point (A).

3) Preuve similaire.

4) Si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, alors r_θ n'admet pas la valeur propre 1 (proposition 3.8 du chapitre VI). Par conséquent, $\mathrm{Inv}(r_\theta) = \mathrm{Ker}(r_\theta - \mathrm{id}) = \{\vec{0}\}$ et $r_{A,\theta}$ admet un et un seul point fixe, qui ne peut être que A.

5) L'identité voulue résulte encore de l'égalité des parties linéaires et de la coïncidence en A. ✓

On déduit immédiatement du premier point de la proposition précédente une conséquence géométrique essentielle.

Corollaire 1.15. *Soit r une rotation d'angle θ. Soient M, N deux points de E, Δ une droite de E, $M' = r(M)$, $N' = r(N)$ et $\Delta' = r(\Delta)$. Alors*

$$\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})} = \theta\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \widehat{(\Delta, \Delta')} = \theta\ [\pi].$$

Définissons maintenant les rotations affines en dimension 3. Rappelons (cf. chapitre IV) que le choix d'une orientation sur E ne détermine pas une orientation sur ses sous-espaces, mais que si F est un sous-espace lui-même orienté, alors tout supplémentaire de F dans E possède automatiquement une orientation induite.

Définition 1.16. Dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3, soient Δ une droite orientée et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation d'axe Δ et d'angle θ** l'application $r_{\Delta,\theta} : E \to E$, qui à tout point M associe le point M' défini comme suit : soit P_M le plan $M + \vec{\Delta}^{\perp}$, et soit A l'unique point d'intersection de P_M et de Δ (ces deux sous-espaces sont en effet supplémentaires). Alors M' est par définition l'image de M par la rotation $r_{A,\theta}$ dans le plan orienté P_M.

Proposition 1.17. *On conserve les notations de la définition.*

1) *Toute rotation $r_{\Delta,\theta}$ est un déplacement, de partie linéaire $r_{\vec{\Delta},\theta}$ (rotation vectorielle définie au chapitre précédent).*

2) $r_{\Delta,\theta} = \mathrm{id}$ *si et seulement si* $\theta = 0\ [2\pi]$.

3) $r_{\Delta,\theta} = s_{\Delta}$ *si et seulement si* $\theta = \pi\ [2\pi]$.

4) *Si* $\theta \neq 0\ [2\pi]$, *alors* $\mathrm{Inv}(r_{\Delta,\theta}) = \Delta$.

5) *L'ensemble des rotations d'axe Δ fixé est un groupe pour la composition, isomorphe au groupe des angles orientés de vecteurs.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 1.14. ✓

Définition 1.18. Dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3, soient Δ une droite orientée, $A \in \Delta$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0\ [\pi]$. On appelle **antirotation de centre A, de droite Δ et d'angle θ** la composée $s_P \circ r_{\Delta,\theta}$, où P est le plan $A + \vec{\Delta}^{\perp}$.

Proposition 1.19. *On conserve les notations de la définition.*

1) *Toute antirotation $s_P \circ r_{\Delta,\theta}$ est un antidéplacement, de partie linéaire l'antirotation vectorielle $s_{\vec{\Delta}^{\perp}} \circ r_{\vec{\Delta},\theta}$.*

2) $\mathrm{Inv}(s_P \circ r_{\Delta,\theta}) = \{A\}$;

3) $s_P \circ r_{\Delta,\theta} = r_{\Delta,\theta} \circ s_P$ *(commutativité de l'écriture).*

Démonstration. 1) découle de la proposition 1.17. Pour 2), il suffit de constater que $A \in \mathrm{Inv}(s_P \circ r_{\Delta,\theta})$ et de se rappeler que $\mathrm{Inv}(s_{\vec{\Delta}^{\perp}} \circ r_{\vec{\Delta},\theta}) = \{\vec{0}\}$. Pour 3), on constate que les deux membres de l'égalité ont même partie linéaire (propriété des antirotations vectorielles) et coïncident en A. ✓

Enfin, il sera bon d'avoir à l'esprit les deux résultats suivants (déjà prouvés dans le chapitre V).

Proposition 1.20. *(Ici, E est de dimension quelconque.)*

1) *Si F, F' sont deux sous-espaces strictement parallèles de E, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{F}^{\perp} = \vec{F'}^{\perp}$ tel que $F' = t_{\vec{u}}(F)$, et alors $s_{F'} \circ s_F = t_{2\vec{u}}$.*

2) *Réciproquement, toute translation $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux symétries orthogonales d'axes strictement parallèles (par exemple, comme composée de*

deux réflexions ou de deux renversements) : on choisit un sous-espace F tel que $\vec{u} \in \overrightarrow{F}^{\perp}$ et on pose $F' = t_{\vec{u}/2}(F)$.

Proposition 1.21. *Supposons E orienté de dimension 2.*

1) *Si Δ, Δ' sont deux droites sécantes en A, avec $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \theta\ [\pi]$, alors $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = r_{A,2\theta}$.*

2) *Réciproquement, toute rotation peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux réflexions, dont les axes sont définis comme en 1).*

Remarque 1.22. En réalité, ce dernier résultat reste valable en dimension 3, mais il faut d'abord définir la notion d'angle orienté de deux plans.

2 Décomposition canonique des isométries et classification en petite dimension

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment classifier les isométries affines en dimension ≤ 3 à partir de la classification des isométries vectorielles du chapitre précédent. Il faut cependant noter que d'autres méthodes sont possibles, par exemple en raisonnant sur l'ensemble des points fixes ou en utilisant le théorème de Cartan-Dieudonné affine (cf. paragraphe suivant). Nous étudierons ces autres approches dans les Exercices.

Théorème 2.1. *Toute $f \in \mathrm{Is}(E)$ admet une* **décomposition canonique**, *c'est-à-dire, il existe un unique couple $(t, g) \in T(E) \times \mathrm{Is}(E)$ tel que :*

(i) *$f = t \circ g = g \circ t$ (et donc $\vec{f} = \vec{g}$);*

(ii) *$\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$;*

(iii) *$t = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g}) = \mathrm{Inv}(\vec{f})$.*

Démonstration. D'après le théorème 6.6 du chapitre II, il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. D'après la formule du rang, cela revient à prouver qu'ils sont en somme directe. En fait, nous allons montrer un peu mieux : ils sont orthogonaux.

En effet, soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id})$, i.e. $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x})$, et soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id})$, i.e. $\vec{y} = \vec{f}(\vec{z}) - \vec{z}$ pour un $\vec{z} \in \overrightarrow{E}$. Alors

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{f}(\vec{z})) - (\vec{x}|\vec{z}) = (\vec{f}(\vec{x})|\vec{f}(\vec{z})) - (\vec{x}|\vec{z}) = 0,$$

puisque $\vec{f}$ préserve le produit scalaire. Cqfd. ✓

Définitions 2.2. Si f admet pour décomposition canonique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ avec $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$, $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g}) = \mathrm{Inv}(\vec{f})$ **et** $t_{\vec{u}} \neq \mathrm{id}$, on dit que f est la **glissée de g par $t_{\vec{u}}$**. En particulier,

1) si g est une réflexion, on dit que f est une **réflexion glissée**;

2) en dimension 3, si g est un demi-tour (renversement), on dit que f est un **demi-tour glissé**;

3) en dimension 3, si g est une rotation, on dit que f est un **vissage**.

Le résultat précédent est fondamental, car il permet de classifier les isométries affines (il permettra aussi plus loin de trouver les générateurs des groupes d'isométries). Nous allons expliquer ce point, en commençant par une remarque.

Lemme 2.3. *Soit $f = t \circ g = g \circ t$ la décomposition canonique de l'isométrie f. Alors* codim $\mathrm{Inv}(g)$ *est pair si et seulement si f est un déplacement.*

Démonstration. En effet, on a

$$\operatorname{codim} \mathrm{Inv}(g) = \operatorname{codim} \mathrm{Inv}(\vec{g}) = \operatorname{codim} \mathrm{Inv}(\vec{f}).$$

Or nous savons (corollaire 3.15 du chapitre VI) que la condition « codim $\mathrm{Inv}(\vec{f})$ est paire » équivaut à $\vec{f} \in SO(\overrightarrow{E})$. ✓

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de classification des isométries en petite dimension.

Théorème 2.4.

1) *Supposons* $\dim E = 1$. *Alors :*

a) *les déplacements de E sont les translations;*

b) *les antidéplacements de E sont les symétries centrales.*

2) *Supposons* $\dim E = 2$. *Alors :*

a) *les déplacements de E sont les translations, les symétries centrales et les rotations;*

b) *les antidéplacements de E sont les réflexions et les réflexions glissées.*

3) *Supposons* $\dim E = 3$. *Alors :*

a) *les déplacements de E sont les translations, les demi-tours, les demi-tours glissés, les rotations et les vissages;*

b) *les antidéplacements de E sont les symétries centrales, les réflexions, les réflexions glissées et les antirotations.*

Pour plus d'informations, notamment pour une classification en fonctions des points fixes de f, on consultera le tableau distribué en polycopié.

Démonstration. L'idée générale de la preuve est la suivante : soit $f \in \mathrm{Is}(E)$, dont on écrit la décomposition canonique $f = t_{\vec{u}} \circ g$.

- On commence par déterminer les g possibles, sachant que
  - $\vec{g}$ est une isométrie vectorielle (donc connue par la classification du chapitre précédent),
  - $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$,
  - on connaît la parité de la dimension de $\mathrm{Inv}(g)$ par le lemme 2.3.
- Ensuite, on utilise le fait que $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g})$ pour en déduire les possibilités pour f.

1) Supposons d'abord $\dim E = 1$.

a) Si $f \in \mathrm{Is}^+(E)$, alors $\vec{g} \in SO(\overrightarrow{E})$, donc $\vec{g} = \mathrm{id}$. Par conséquent g est une translation, mais comme elle possède au moins un point fixe, $g = \mathrm{id}$. On en déduit que f est une translation.

b) Si $f \in \mathrm{Is}^-(E)$, alors $\vec{g} \in O^-(\overrightarrow{E})$, donc $\vec{g} = -\mathrm{id}$. Ainsi, g est une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale. Mais $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g}) = \{\vec{0}\}$, donc $t_{\vec{u}} = \mathrm{id}$ et $f = g$.

2) Supposons maintenant $\dim E = 2$.

a) Si $f \in \mathrm{Is}^+(E)$, alors $\vec{g} \in SO(\overrightarrow{E})$, donc $\vec{g}$ est une rotation plane r_θ. Examinons plusieurs cas :

- si $\theta = 0\ [2\pi]$, alors $\vec{g} = \mathrm{id}$, donc $g = \mathrm{id}$ et f est une translation, comme en 1).
- si $\theta = \pi\ [2\pi]$, alors $\vec{g} = -\mathrm{id}$, donc $f = g$ est une symétrie centrale, comme en 1) également.
- si $\theta \neq 0\ [\pi]$, alors $\vec{g} \neq \pm\mathrm{id}$. Comme $\mathrm{Inv}(g)$ est de dimension 0 ou 2 par le lemme 2.3, et qu'il ne peut être de dimension 2 (sinon $g = \mathrm{id}$, donc $\theta = 0\ [2\pi]$), c'est un singleton $\{A\}$. Par conséquent g est la rotation $r_{A,\theta}$. Enfin, comme $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g}) = \{\vec{0}\}$, on obtient finalement $f = g$.

b) Si $f \in \mathrm{Is}^-(E)$, alors $\vec{g} \in O^-(\overrightarrow{E})$, donc $\vec{g}$ est une réflexion $s_{\vec{\Delta}}$. Comme $\dim \mathrm{Inv}(g) = 1$ par le lemme 2.3, on voit que g est une réflexion s_Δ, où Δ est une droite de direction $\overrightarrow{\Delta}$. On en conclut que f est une réflexion ou une réflexion glissée.

Le cas de la dimension 3 est similaire et sera traité en exercice. ✓

3 Génération du groupe des isométries et du groupe des déplacements

Comme dans le cas vectoriel, on va exhiber un système de générateurs des groupes $\mathrm{Is}(E)$ et $\mathrm{Is}^+(E)$. On se replace ici en dimension $n \geq 1$ quelconque.

Théorème 3.1 (Cartan-Dieudonné). *Le groupe* $\mathrm{Is}(E)$ *est engendré par les réflexions. Plus précisément, soit* $f \in \mathrm{Is}(E)$*, et soit* $p = \dim \mathrm{Inv}(\vec{f})$*.*

1) *Si* $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$*, alors* f *s'écrit comme produit de* $n - p \leq n$ *réflexions.*
2) *Si* $\mathrm{Inv}(f) = \varnothing$*, alors* f *s'écrit comme produit de* $n - p + 2 \leq n + 1$ *réflexions.*

Démonstration. Si $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$, il existe $A \in E$ tel que $f(A) = A$. Le résultat découle donc de l'isomorphisme $\mathrm{Is}_A(E) \simeq O(\vec{E})$ (proposition 1.5) et de la version vectorielle du théorème de Cartan-Dieudonné (théorème 4.1 du chapitre VI).

Supposons donc $\mathrm{Inv}(f) = \varnothing$, et soit $f = t \circ g$ la décomposition canonique de f. Comme $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$, g s'écrit comme composée de $n - p$ réflexions d'après le premier cas. D'autre part, t s'écrit comme composée de deux réflexions d'après la proposition 1.20, d'où l'assertion voulue. Observons de plus que $p \geq 1$ (sinon $\mathrm{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, donc $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$ d'après le corollaire 6.3 du chapitre II), ce qui explique l'inégalité $n - p + 2 \leq n + 1$ dans l'énoncé du théorème. ✓

Remarque 3.2. Comme dans le cas vectoriel, on peut démontrer que les valeurs $n-p$ et $n-p+2$ sont optimales (i.e. minimales).

Théorème 3.3. *Supposons* $n \geq 3$*. Le groupe* $\mathrm{Is}^+(E)$ *est engendré par les renversements. Plus précisément, soit* $f \in \mathrm{Is}^+(E)$ *et soit* $p = \dim \mathrm{Inv}(\vec{f})$ *(rappel : $n - p$ est pair). Alors :*

1) *si* $p = n$*, i.e. si* f *est une translation,* f *s'écrit comme produit de deux renversements;*
2) *sinon,* f *s'écrit comme produit de* $n - p \leq n$ *renversements.*

Démonstration. La première assertion résulte encore de la proposition 1.20. Examinons donc l'autre cas.

Si $\mathrm{Inv}(f) \neq \varnothing$, le résultat découle comme dans le théorème précédent de son analogue vectoriel (théorème 4.4 du chapitre VI) et de la proposition 1.5.

Supposons donc $\mathrm{Inv}(f) = \varnothing$, et soit $f = t_{\vec{u}} \circ g$ la décomposition canonique de f. Comme $\mathrm{Inv}(g) \neq \varnothing$, d'après le premier cas il existe $n - p$ renversements $r_1, \ldots, r_{n-p}$ tels que

$$g = r_1 \circ \cdots \circ r_{n-p}.$$

D'autre part, on sait que $\vec{u} \in \mathrm{Inv}(\vec{g})$ est non nul (sinon $f = g$ a des points fixes). Si l'on note $F_1 = \mathrm{Inv}(r_1)$, d'après la proposition 4.6 du chapitre VI, on peut donc supposer que F_1 est tel que $\vec{u} \in \vec{F}_1^{\perp}$. Posons alors $F_1' = t_{\vec{u}/2}(F_1)$ et notons r_1' le renversement d'axe F_1'. Par la proposition 1.20, on obtient

$$t_{\vec{u}} = r_1' \circ r_1.$$

Mais alors

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = r_1' \circ r_1 \circ r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n-p} = r_1' \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n-p}$$

est une décomposition de f en produit de $n - p$ renversements, cqfd. ✓

Remarque 3.4. Le théorème est faux en dimension ≤ 2. En effet, en dimension 1, $\mathrm{Is}^+(E) = T(E)$ ne peut être engendré par les renversements, qui ne sont même pas définis ! Par ailleurs, en dimension 2 un renversement n'est autre qu'une symétrie centrale, de partie linéaire $-\mathrm{id}$. Donc les renversements engendrent dans $\mathrm{Is}^+(E)$ un sous-groupe formé des f telles que $\vec{f} = \pm\,\mathrm{id}$, donc constitué des translations et des symétries centrales. Ce sous-groupe n'est pas $\mathrm{Is}^+(E)$ tout entier, puisqu'il manque les rotations.

4 Similitudes affines

Définition 4.1. Une application (ensembliste) $f : E \longrightarrow E$ est une **similitude** s'il existe $k > 0$ (nécessairement unique) tel que $f(M)f(N) = kMN$ pour tous $M, N \in E$.
Ce réel k sera appelé le **rapport** de la similitude f.

Exemples 4.2. Une isométrie est une similitude de rapport 1. Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $k = |\lambda|$.

Bien entendu, cette notion est la version analogue de la notion vectorielle :

Théorème 4.3. *f est une similitude de rapport k si et seulement si $f \in GA(E)$ et $\vec{f}$ est une similitude vectorielle de rapport k.*

Démonstration. Soit f une similitude de rapport $k > 0$. Soient $A \in E$, $h = h_{A,k^{-1}}$ et $g = h \circ f$. On a, pour tout $M \in E$: $g(M) = h(f(M)) = A + k^{-1}\overrightarrow{Af(M)}$. D'où, pour tous $M, N \in E$,

$$g(M)g(N) = \|k^{-1}\overrightarrow{Af(N)} - k^{-1}\overrightarrow{Af(M)}\| = k^{-1}\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = MN.$$

Ainsi, g est une isométrie, i.e. $g \in GA(E)$ et $\vec{g} \in O(\vec{E})$ d'après le théorème 1.3, donc $f = h^{-1} \circ g \in GA(E)$ et $\vec{f} = k^{-1}\vec{g}$ est une similitude vectorielle.

La réciproque est claire. ✓

En raisonnant comme pour le cas des isométries, on obtient :

Corollaire 4.4.

1) *L'ensemble* Sim(E) *des similitudes de E est un sous-groupe de $GA(E)$.*
2) *L'ensemble* Sim$^+(E)$ *des similitudes directes de E est un sous-groupe distingué de* Sim(E).
3) *L'ensemble* Sim$^-(E)$ *des similitudes indirectes de E n'est pas un groupe.*

Proposition 4.5. *Soit f une similitude qui n'est pas une isométrie, c'est-à-dire une similitude de rapport $k \neq 1$. Alors f possède un unique point fixe, qu'on appellera le* **centre de f**.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $\|\vec{f}(\vec{x})\| = k\|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$. Donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, i.e. Inv$(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, et on sait que cela implique l'existence d'un unique point fixe A.

Autre méthode : quitte à remplacer f par f^{-1}, on peut supposer $0 < k < 1$, de sorte que f est contractante. On conclut alors grâce au théorème du point fixe. ✓

Définition 4.6. On appelle **similitude à centre** toute similitude qui possède un et un seul point fixe, c'est-à-dire

- toute similitude qui n'est pas une isométrie (cf. proposition 4.5);
- toute isométrie qui possède un et un seul point fixe, comme par exemple les symétries centrales, les rotations en dimension 2, les antirotations en dimension 3...

Théorème 4.7 (Décomposition canonique d'une similitude à centre). *Si f est une similitude de centre A et de rapport k, alors il existe une unique $g \in$ Is$_A(E)$ telle que $f = h_{A,k} \circ g = g \circ h_{A,k}$.*

Démonstration. Notons $h = h_{A,k}$. Alors $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie fixant A, et c'est évidemment la seule telle que $f = h \circ g$. D'autre part, $h \circ g$ et $g \circ h$ coïncident en A et ont même partie linéaire $k\vec{g}$, d'où le résultat. ✓

Malgré le vocabulaire, on prendra garde à ne pas confondre cette décomposition canonique de la *similitude* f avec la décomposition canonique de l'*endomorphisme affine* f, au sens général donné dans le théorème 6.6 du chapitre II et employé de nouveau dans l'étude des isométries (cette décomposition-là donnerait une trivialité ici, puisqu'il y a un point fixe).

Corollaire 4.8.

1) *Le groupe* Sim(E) *est engendré par les isométries et les homothéties (de rapport positif), donc par les réflexions et les homothéties (de rapport positif).*

2) *Si* $n \geq 3$, *le groupe* $\mathrm{Sim}^+(E)$ *est engendré par les déplacements et les homothéties (de rapport positif), donc par les renversements et les homothéties (de rapport positif).*

Démonstration. Cela provient du théorème 4.7 et des résultats du paragraphe précédent. ✓

Les caractérisations suivantes des similitudes affines découlent de leur analogue vectoriel (théorème 5.7 du chapitre VI).

Théorème 4.9. *Supposons* $n \geq 2$ *(pour parler d'angles). Pour* $f \in A(E)$ *injective, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est une similitude;*

(ii) f *conserve les angles non orientés (de vecteurs, de demi-droites, de droites);*

(iii) f *conserve l'orthogonalité, au sens où :* $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{f(A)f(B)}|\overrightarrow{f(C)f(D)}) = 0.$

Remarque 4.10. On a en fait une caractérisation plus forte des similitudes. En effet, en utilisant notamment le théorème fondamental de la géométrie affine (cf. chapitre II, théorème 2.4), on peut démontrer que si f est une bijection (*non supposée affine a priori*) de E, on a les équivalences :

(i) f est une similitude affine;

(ii) f conserve l'orthogonalité;

(iii) f conserve les angles non orientés;

(iv) f envoie toute sphère sur une sphère.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons examiner en détail le cas de la dimension 2**.**

Théorème 4.11. *Soit* E *un plan affine euclidien orienté.*

1) *Le groupe* $\mathrm{Sim}^+(E)$ *est constitué :*

(i) *des translations,*

(ii) *des rotations (y compris les symétries centrales),*

(iii) *des homothéties (de rapport positif ou négatif),*

(iv) *et des composées commutatives* $h_{A,\lambda} \circ r_{A,\theta} = r_{A,\theta} \circ h_{A,\lambda}$ *d'une homothétie de centre* A *et de rapport* $\lambda > 0$ *avec une rotation de même centre* A.

2) *L'ensemble* $\mathrm{Sim}^-(E)$ *est constitué :*

(i) *des réflexions,*

(ii) *des réflexions glissées,*

(iii) *et des composées commutatives* $h_{A,\lambda} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h_{A,\lambda}$ *d'une homothétie de centre* A *et de rapport* $\lambda > 0$ *avec une réflexion d'axe* Δ *contenant* A.

Démonstration. Soit f une similitude du plan. Si f est une isométrie, alors on sait déjà (théorème 2.4) que f est une translation, une rotation, une réflexion ou une réflexion glissée. Supposons donc que f n'est pas une isométrie, c'est-à-dire qu'elle est de rapport $k \neq 1$. D'après la proposition 4.5 elle possède un centre A et le théorème 4.7 nous dit qu'elle s'écrit alors comme composée commutative $f = h_{A,k} \circ g = g \circ h_{A,k}$ pour une unique $g \in \mathrm{Is}_A(E)$. Or on a clairement

$$\mathrm{Is}_A^+ = \{r_{A,\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathrm{Is}_A^- = \{s_\Delta,\ \Delta \ni A\}$$

d'où le résultat. ✓

Définitions 4.12. Soit f une similitude plane à centre. D'après le théorème 4.11 elle peut être de deux types :

1) Si f s'écrit sous la forme $f = h_{A,\lambda} \circ r_{A,\theta} = r_{A,\theta} \circ h_{A,\lambda}$, avec $A \in E$, $\lambda > 0, \theta \in \mathbb{R}$, on dira que f est la **similitude directe de centre A, de rapport λ et d'angle θ**.

2) Si f s'écrit sous la forme $f = h_{A,\lambda} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h_{A,\lambda}$, avec $A \in \Delta$ et $\lambda > 0$, on dira que f est la **similitude indirecte de centre A, de rapport λ et de droite Δ**.

Remarque 4.13. On remarquera qu'en dimension 2, toute homothétie, même de rapport négatif, est une similitude directe. En fait, si $\lambda < 0$, l'homothétie $h_{A,\lambda}$ est la similitude directe de centre A, de rapport $-\lambda > 0$ et d'angle π (au sens de la définition précédente), c'est-à-dire la composée $h_{A,-\lambda} \circ s_A$.

Voici une caractérisation essentielle des similitudes planes.

Théorème 4.14. *Soit E un plan euclidien orienté.*

1) *Les similitudes directes conservent les angles orientés (de vecteurs, de demi-droites ou de droites), et ce sont les seules applications affines injectives possédant cette propriété.*

2) *Les similitudes indirectes contrarient les angles orientés de vecteurs (de vecteurs, de demi-droites ou de droites), et ce sont les seules applications affines injectives possédant cette propriété.*

Démonstration. Cela résulte de l'analogue vectoriel (théorème 5.9 du chapitre VI). ✓

Proposition 4.15. *Soit E un plan euclidien orienté. Étant donnés quatre points $A \neq B$ et $A' \neq B'$ de E, il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) f envoyant A sur A' et B sur B'.*

Démonstration. Le lemme 5.8 du chapitre VI détermine l'unique similitude vectorielle directe (resp. indirecte) σ telle que $\sigma(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$. Les conditions $f(A) = A'$ et $\vec{f} = \sigma$ déterminent alors complètement l'unique similitude directe (resp. indirecte) f qui convient. ✓

5 Utilisation des nombres complexes en géométrie plane

Dans ce paragraphe, nous rappelons d'abord comment le corps des nombres complexes peut être considéré comme un modèle de plan euclidien, puis nous montrons l'intérêt particulier qui en résulte pour exprimer facilement les isométries et les similitudes du plan. Ceci permet souvent de transformer des problèmes géométriques en des problèmes algébriques plus simples à résoudre.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est naturellement muni d'une structure euclidienne donnée par

$$(z|z') = \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z').$$

C'est précisément le produit scalaire pour lequel la norme associée $\|z\|$ correspond au module complexe usuel $|z|$, et $(1, i)$ est une base orthonormée, dite **base canonique de $\mathbb{C}$**.

En le munissant de sa structure affine canonique, on peut donc aussi considérer $\mathbb{C}$ comme plan affine euclidien sur $\mathbb{R}$. On l'oriente alors de sorte que le repère orthonormé $(0; 1, i)$ soit direct, on l'appellera également **repère canonique du plan $\mathbb{C}$**.

Proposition 5.1. *Soit E un plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$. L'application*

$$\varphi_{\mathcal{R}} : M = (x, y)_{\mathcal{R}} \mapsto x + \mathrm{i}y$$

est un isomorphisme affine et une isométrie de E sur $\mathbb{C}$, de partie linéaire

$$\sigma_{\mathcal{B}} : \vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}} \mapsto x + \mathrm{i}y.$$

Ce résultat met simplement en évidence le fait que tous les plans euclidiens sont isomorphes à $\mathbb{C}$, et même isométriques, via le choix d'un repère.

Démonstration. D'abord, il est clair que $\varphi_{\mathcal{R}}$ est une bijection. Ensuite, soient $A, B \in E$, de coordonnées cartésiennes (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans $\mathcal{R}$. Notons $z_A = \varphi_{\mathcal{R}}(A)$ et $z_B = \varphi_{\mathcal{R}}(B)$. Puisque la structure affine de $\mathbb{C}$ est celle, canonique, de l'espace vectoriel sous-jacent (cf. proposition 1.5 du chapitre I), on a

$$\overrightarrow{z_A z_B} = z_B - z_A = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = (x_B - x_A) + \mathrm{i}(y_B - y_A) = \sigma_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}),$$

donc $\varphi_{\mathcal{R}}$ est bien affine de partie linéaire $\sigma_{\mathcal{B}}$. De plus,

$$\|\overrightarrow{z_A z_B}\| = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \|\overrightarrow{AB}\|$$

donc c'est bien une isométrie. ✓

Définitions 5.2.

1) Pour tout $M \in E$, le nombre $\varphi_{\mathcal{R}}(M)$ s'appelle **l'affixe** de M dans $\mathcal{R}$.

2) Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, le nombre $\sigma_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ s'appelle **l'affixe** de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$.

3) On appelle **plan complexe** tout plan affine euclidien identifié à $\mathbb{C}$ via le choix d'une « application affixe » $\varphi_{\mathcal{R}}$.

Les identifications suivantes sont essentielles.

Proposition 5.3. *Soit E un plan affine euclidien orienté muni muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.*

1) *Pour tous $A, B \in E$ d'affixes respectives a, b dans $\mathcal{R}$, on a $AB = |b - a|$.*

2) *Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ d'affixes respectives u, v dans $\mathcal{B}$, on a $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arg(v) - \arg(u)\ [2\pi]$. (On note ici $\arg(v)$ l'un des réels θ, tous congrus modulo 2π, tels que $v = |v|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.)*

Démonstration. Les deux assertions résultent du fait que l'application affixe $\varphi_{\mathcal{R}}$ est une isométrie affine de E dans $\mathbb{C}$. Pour 1) c'est évident (voir preuve de la proposition 5.1). Pour 2), le fait que la partie linéaire $\sigma_{\mathcal{B}}$ de $\varphi_{\mathcal{R}}$ est une isométrie linéaire dit que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(u, v)}$ (ici, u, v sont considérés comme des vecteurs de $\mathbb{C}$), reste donc à voir que $\widehat{(u, v)} = \arg(v) - \arg(u)\ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles, il suffit même de prouver que $\widehat{(1, v)} = \arg(v)\ [2\pi]$.

Notons donc α l'une des mesures de $\widehat{(1, v)}$. Par définition,

$$(1|v) = \|1\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha = |v|\cos\alpha.$$

Mais un calcul immédiat montre que $(1|v) = \mathrm{Re}(v)$, si bien que

$$\mathrm{Re}(v) = |v|\cos\alpha.$$

D'autre part, la base $(1, \mathrm{i})$ étant orthogonale directe, on a

$$\widehat{(\mathrm{i}, v)} = \widehat{(\mathrm{i}, 1)} + \widehat{(1, v)} = \alpha - \frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

donc aussi

$$(\mathrm{i}|v) = \|\mathrm{i}\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = |v|\sin\alpha.$$

Or $(\mathrm{i}|v) = \mathrm{Im}(v)$, donc $\mathrm{Im}(v) = |v|\sin\alpha$ et en fin de compte

$$v = |v|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),$$

ce qui prouve que α est un argument de v, cqfd. ✓

L'identification entre un plan E et $\mathbb{C}$ implique aussi des liens au niveau des applications affines :

Définition 5.4. Soit E un plan affine euclidien orienté muni muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$. Si $f : E \longrightarrow E$ est une application, on appelle **forme complexe de f dans $\mathcal{R}$** la composée $\tilde{f} = \varphi_{\mathcal{R}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{R}}^{-1}$, qui est donc une application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Autrement dit, toute application de E dans E possède une application « jumelle » de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, sa forme complexe, qui est unique si on fixe le repère $\mathcal{R}$. Du fait que $\tilde{f}$ est une *conjuguée* de f par une bijection affine isométrique, certaines propriétés de l'une se transfèrent automatiquement à l'autre, notamment f est une application affine (resp. une bijection, une isométrie, une similitude) si et seulement si $\tilde{f}$ est une application affine (resp. une bijection, une isométrie, une similitude).

Or, justement : l'un des aspects remarquables du plan euclidien $\mathbb{C}$ est que les applications affines se décrivent très facilement, en particulier les isométries et similitudes, et c'est ce que nous voyons maintenant.

Proposition 5.5. *L'ensemble des endomorphismes affines du plan affine réel $\mathbb{C}$ s'écrit*

$$A(\mathbb{C}) = A_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\bar{z} + c;\ \ a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

et ceux qui sont bijectifs sont caractérisés par la condition $|a| \neq |b|$.

Attention ! L'ensemble des endomorphismes affines de la **droite complexe** $\mathbb{C}$ est

$$A_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b;\ \ a, b \in \mathbb{C}\}.$$

(Voir exercice 13 du chapitre I.)

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, notons $f(z) = x'+\mathrm{i}y'$, et plaçons-nous dans le repère canonique $(0; 1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$: dans ce repère, $z = x + \mathrm{i}y$ (resp. $f(z) = x' + \mathrm{i}y'$) admet pour couple de coordonnées (x, y) (resp. (x', y')).

D'après le théorème 3.7 du chapitre I, on sait que f est affine si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

D'autre part, il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b\bar{z} + c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\exists a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \forall z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad f(z) = (a_1+\mathrm{i}a_2)(x+\mathrm{i}y)+(b_1+\mathrm{i}b_2)(x+\mathrm{i}y)+c_1+\mathrm{i}c_2,$$

ce qui, après développement, s'écrit

$$\exists a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Il est alors facile de constater que les conditions (1) et (2) sont bien équivalentes. De plus, si f est affine, alors f est bijective si et seulement si la matrice de (2) est inversible, ce qui donne le résultat. ✓

Les isométries et similitudes du plan des nombres complexes $\mathbb{C}$ étant des applications affines, elle vont donc s'écrire sous la forme $z \mapsto az + b\bar{z} + c$. Nous précisons cela dans les deux résultats suivants.

Théorème 5.6. *Les déplacements (resp. antidéplacements) de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications $z \mapsto az + b$ (resp. $z \mapsto a\bar{z} + b$), avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$.*
Plus précisément :

1) a) *f est la translation t_u si et seulement si $f(z) = z + u$;*

b) *f est la rotation $r_{a,\theta}$ si et seulement si $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a) + a$.*

c) *Réciproquement, si $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors f est la translation de vecteur b si $\theta = 0\ [2\pi]$, ou bien la rotation d'angle θ et de centre $b/(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ sinon.*

2) a) *f est la réflexion d'axe Δ passant par a et d'angle polaire α si et seulement si $f(z) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{(z - a)} + a$.*

b) *f est la réflexion glissée $t_u \circ s_\Delta$, avec Δ comme ci-dessus, si et seulement si $f(z) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{(z - a)} + a + u$.*

c) *Réciproquement, si $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bar{z} + b$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors f est la réflexion d'axe Δ passant par le point $b/2$ et d'angle polaire $\theta/2$ si $b + \bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0$, ou bien la réflexion glissée $t_u \circ s_\Delta$, avec Δ comme précédemment et $u = \frac{1}{2}(b + \bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ sinon.*

Démonstration.

1) a) C'est évident.

b) Soient $a, z, z' \in \mathbb{C}$. Grâce à la proposition 5.3, l'équation $z' = r_{a,\theta}(z)$ se traduit successivement par

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{az'} = r_\theta(\overrightarrow{az}) &\Leftrightarrow \begin{cases} az' = az \\ (\widehat{\overrightarrow{az}, \overrightarrow{az'}}) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - a| = |z - a| \\ \arg(z' - a) - \arg(z - a) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a).
\end{aligned}$$

c) Soit $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bar{z} + b$. Si $\theta = 0\ [2\pi]$, il est clair que f est une translation. Sinon, on voit que f admet pour unique point fixe le point $a = b/(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Alors

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b \Leftrightarrow z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \Leftrightarrow z' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a),$$

donc f est la rotation $r_{a,\theta}$ d'après le point précédent.

2) a) Tout d'abord, il est clair que la réflexion $s_\mathbb{R}$ d'axe la droite réelle $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ s'écrit $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. Maintenant, soit Δ une droite passant par a et d'angle polaire α. Le changement de repère $\psi = r_{0,-\alpha} \circ t_{-a}$ amène Δ sur $\mathbb{R}$, par conséquent s_Δ sera la conjuguée $\psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi$, autrement dit la composée :

$$z \underset{t_{-a}}{\mapsto} z - a \underset{r_{0,-\alpha}}{\mapsto} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}(z - a) \underset{\sigma}{\mapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\overline{(z - a)} \underset{r_{0,\alpha}}{\mapsto} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{(z - a)} \underset{t_a}{\mapsto} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{(z - a)} + a,$$

cqfd.

b) C'est évident vu le point précédent.

c) Soit $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bar{z} + b$. On veut montrer que f est une réflexion ou une réflexion glissée, donc s'écrit $f = t \circ g = g \circ t$ avec t translation et g réflexion (forme canonique). L'astuce consiste à trouver t en calculant f^2, puisque

$$f^2 = (t \circ g) \circ (g \circ t) = t \circ (g \circ g) \circ t = t^2.$$

Or ici on voit que $f^2(z) = z + (e^{i\theta}\bar{b} + b)$, d'où l'idée de poser

$$t(z) = z + \frac{1}{2}(e^{i\theta}\bar{b} + b)$$

et

$$g = t^{-1} \circ f.$$

Comme

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{2}(e^{i\theta}\bar{b} + b) = e^{i\theta}\bar{z} + b - \frac{1}{2}e^{i\theta}\bar{b} - \frac{b}{2} = e^{i\theta}\overline{\left(z - \frac{b}{2}\right)} + \frac{b}{2}$$

on voit avec le calcul précédent que g est une réflexion d'axe Δ d'angle polaire $\theta/2$ et passant par le point $b/2$.

Le théorème est donc démontré. ✓

Passons aux similitudes générales.

Théorème 5.7. *Les similitudes directes (resp. indirectes) de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications de la forme $z \mapsto az + b$ (resp. $z \mapsto a\bar{z} + b$), avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*
Plus précisément :

1) *f est l'homothétie $h_{a,k}$ si et seulement si $f(z) = k(z - a) + a$.*

2) a) *f est la similitude directe de centre a, d'angle θ, de rapport k, si et seulement si $f(z) = ke^{i\theta}(z - a) + a$.*

b) *Réciproquement, si $f(z) = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, alors f est une translation si $a = 1$, ou bien la similitude directe de rapport $|a|$, de centre $b/(1 - a)$ et d'angle* $\arg(a)$ *sinon.*

3) a) *f est la similitude indirecte de centre a, de droite Δ d'angle polaire α, de rapport k, si et seulement si $f(z) = ke^{2i\alpha}\overline{(z - a)} + a$.*

b) *Réciproquement, si $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, alors f est une réflexion ou une réflexion glissée si $|a| = 1$, ou bien la similitude indirecte de rapport $|a|$, de centre $\omega = (a\bar{b} + b)/(1 - |a|^2)$, de droite Δ passant par ω et d'angle polaire $\frac{1}{2}$* $\arg(a)$ *sinon.*

Démonstration.

1) C'est immédiat.

2) a) Comme $f = h_{a,k} \circ r_{a,\theta}$, cela résulte de 1) et du théorème précédent.

b) Supposons que $f(z) = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Il est clair que f est une translation si $a = 1$. Sinon, on voit facilement que f admet un unique point fixe $\omega = b/(1 - a)$. Mais alors

$$f(z) = az + (1 - a)\omega = a(z - \omega) + \omega = |a|e^{i\arg(a)}(z - \omega) + \omega.$$

D'après le point précédent, f est donc la similitude directe de rapport $|a|$, de centre ω et d'angle $\arg(a)$.

3) a) Comme $f = h_{a,k} \circ s_\Delta$, cela résulte facilement du 1) et du théorème précédent.

b) Réciproquement, soit $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Si $|a| = 1$, alors f est une réflexion ou une réflexion glissée par le théorème précédent. Sinon, on observe que

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Rightarrow a\bar{z} + b = z \quad \text{et} \quad \bar{a}z + \bar{b} = \bar{z} \\ &\Rightarrow a(\bar{a}z + \bar{b}) + b = z \\ &\Rightarrow (1 - |a|^2)z = a\bar{b} + b, \end{aligned}$$

de sorte que f admet pour unique point fixe $\omega = (a\bar{b}+b)/(1-|a|^2)$. Posons alors $h = h_{\Omega,|a|}$. On a

$$\begin{aligned} h^{-1}\circ f(z) &= |a|^{-1}(a\bar{z}+b-\omega)+\omega \\ &= |a|^{-1}\left(a\bar{z}+\frac{b-b|a|^2-a\bar{b}-b}{1-|a|^2}\right)+\omega \\ &= \frac{a}{|a|}\left(\bar{z}-\frac{\bar{a}b+\bar{b}}{1-|a|^2}\right)+\omega \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(a)}\overline{(z-\omega)}+\omega. \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, $h^{-1}\circ f$ est donc la réflexion s_Δ d'axe d'angle polaire $\alpha = \arg(a)/2$ et passant par ω, et $f = h_{\omega,|a|}\circ s_\Delta$ est bien la similitude indirecte recherchée.

Cqfd. ✓

Faisons maintenant un bilan de ce que nous avons vu dans ce paragraphe.

- Soit E un plan affine euclidien orienté. Le choix d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ permet d'identifier tout point de E (resp. tout vecteur de $\overrightarrow{E}$) à un nombre complexe (son affixe), et cette correspondance est affine, bijective et isométrique.
- En particulier certaines notions géométriques se traduisent de manière remarquable via l'identification : distances et angles notamment.
- Autre avantage : toute application affine (resp. toute isométrie, toute similitude) de E dans E possède une application « jumelle » de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui est une application affine (resp. une isométrie, une similitude), sa forme complexe, et cette forme complexe possède une expression particulièrement simple.

Dans la pratique, par abus de notation, on identifiera souvent E avec $\mathbb{C}$, les points de E (resp. les vecteurs de $\overrightarrow{E}$) à leurs affixes dans $\mathbb{C}$, et les applications affines f avec leur forme complexe $\tilde{f}$. Mais il faudra toujours garder à l'esprit quelle est la correspondance sous-jacente.

6 Exercices

Exercice 1. Soient f une isométrie, $A \notin \mathrm{Inv}(f)$, $A' = f(A)$ (donc $A' \neq A$), et H l'hyperplan médiateur de $[AA']$. Montrer que la composée $g = s_H \circ f$ est une isométrie telle que $\mathrm{Inv}(g) \supset \mathrm{Inv}(f)\cup\{A\}$.

N.B. Nous appellerons ce résultat le **lemme d'adjonction de points fixes**.

Exercice 2. Dans un plan euclidien E, soient D une droite et A, B deux points distincts situés dans le même demi-plan ouvert délimité par D. Montrer qu'il existe un unique point M de D pour lequel la quantité $MA+MB$ est minimale.

Exercice 3. Soit ABC un triangle direct d'un plan euclidien orienté. On construit le point A' (resp. B', C') de sorte que $A'CB$ (resp. $B'AC$, $C'BA$) soit un triangle équilatéral direct. On note $\mathcal{C}_A$ (resp. $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$) le cercle circonscrit à $A'BC$ (resp. $B'CA$, $C'AB$).

1) Montrer que $(\widehat{(AA'),(CC')}) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$. En particulier, les droites (AA') et (CC') sont sécantes en un point noté T.

2) Montrer que $(\widehat{(A'B),(A'A)}) = (\widehat{(CB),(CC')})$. En déduire que $T \in \mathcal{C}_A$.

3) Montrer de même que (AA') et (BB') sont sécantes en un point T' appartenant aussi à $\mathcal{C}_A$. En déduire que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en T, qui est également l'unique point commun de $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$.

N.B. Le point T est appelé **point de Torricelli** (ou encore **point de Fermat**) du triangle ABC.

Exercice 4. On suppose que E est un plan. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) il existe une isométrie f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$;

(ii) $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$;

(iii) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $b = b'$, $c = c'$;

(iv) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $c = c'$.

Indication : démontrer (i) $\Leftrightarrow$ (ii), (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), puis (ii) $\Leftrightarrow$ (iv).
N.B. Ce résultat est connu sous le nom de **cas d'égalité des triangles**.

Exercice 5. Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la classification des isométries planes. Démontrer les assertions suivantes.

1) Une isométrie plane est une réflexion si et seulement si son ensemble de points fixes est une droite.

2) Une isométrie plane est une rotation si et seulement si elle possède un unique point fixe. [Utiliser le lemme d'adjonction de points fixes et ce qui précède.]

3) Une isométrie plane est une rotation non triviale si et seulement si sa partie linéaire est une rotation vectorielle d'angle non nul.

4) Le produit $t_{\vec{u}} \circ r_{A,\theta}$ (resp. $r_{A,\theta} \circ t_{\vec{u}}$) d'une rotation non triviale par une translation est une rotation. Déterminer alors géométriquement son centre. [Décomposer astucieusement t et r en produit de deux réflexions.]

5) Le produit $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ (resp. $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$) d'une réflexion par une translation est une réflexion si $\vec{u} \in \vec{\Delta}^\perp$ et une réflexion glissée sinon. [Écrire $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ dans la somme directe $\vec{E} = \vec{\Delta} \oplus \vec{\Delta}^\perp$, et décomposer astucieusement $t_{\vec{y}}$ en produit de deux réflexions.]

6) Le produit $s_\Delta \circ r_{A,\theta}$ (resp. $r_{A,\theta} \circ s_\Delta$) d'une rotation non triviale par une réflexion est une réflexion si $A \in \Delta$ et une réflexion glissée sinon. [Utiliser le résultat précédent.]

Exercice 6. Dans le cours, on a obtenu une classification des isométries planes à partir de la classification vectorielle. Nous allons voir ici deux autres preuves de ce théorème, basées notamment sur les résultats de l'exercice précédent.

1) Soit f une isométrie du plan. Déterminer la nature de f en examinant successivement chacun des cas suivants :

a) f possède trois points fixes non alignés ;

b) f possède deux points fixes distincts ;

c) f possède un seul point fixe ;

d) f ne possède aucun point fixe (on ne supposera pas connu le théorème de décomposition canonique pour traiter cette question).

2) Classifier les isométries planes en utilisant cette fois le théorème de Cartan-Dieudonné.

Exercice 7. On suppose E de dimension 3. Obtenir la classification des isométries affines de E en utilisant la décomposition canonique des isométries et la classification des isométries vectorielles.

Exercice 8. On suppose E de dimension 3, et on considère deux plans P_1, P_2 sécants selon une droite Δ.

1) Soit P un plan orthogonal (donc perpendiculaire) à Δ. Vérifier que P et P_1 (resp. P et P_2) sont sécants selon une droite D_1 (resp. D_2), puis que les droites D_1 et D_2 sont sécantes en le point d'intersection A de P avec Δ.

2) On oriente la droite Δ. Comme E est lui-même supposé orienté, cela induit une orientation sur le plan P. On définit alors l'angle orienté $(\widehat{P_1, P_2})$ entre les plans P_1 et P_2 comme étant l'angle orienté $(\widehat{D_1, D_2})$ (c'est donc un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$). Expliquer pourquoi cette définition ne dépend pas du choix du plan P orthogonal à Δ (ni donc du couple (D_1, D_2) défini grâce à P).

3) On note s_1 et s_2 les réflexions d'axes respectifs P_1 et P_2. Démontrer que la composée $s_2 \circ s_1$ n'est autre que la rotation d'axe Δ et d'angle 2θ, où θ est une mesure de $(\widehat{P_1, P_2})$.

4) Réciproquement, prouver que toute rotation $r_{\Delta,\theta}$ se décompose en produit de deux réflexions $s_2 \circ s_1$, l'axe de l'une des réflexions pouvant être choisi arbitrairement parmi les plans passant par Δ (on a donc une infinité de décompositions).

Exercice 9. Soit E un espace affine euclidien, et soit X une partie non vide de E. On note $\mathrm{Is}(X)$ l'ensemble des isométries f de E vérifiant $f(X) = X$.

1) Montrer que $\mathrm{Is}(X)$ est un groupe. Ce résultat est-il toujours vrai si on remplace la condition $f(X) = X$ par la condition plus faible $f(X) \subset X$?

2) On note $\mathrm{Is}^{\pm}(X) = \mathrm{Is}(X) \cap \mathrm{Is}^{\pm}(E)$. Montrer que si $\mathrm{Is}^{-}(X) \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Is}^{+}(X)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Is}(X)$.

Exercice 10. On se place dans un plan euclidien orienté. On fixe deux points O et A_1, on se donne un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$ et, pour $k \in [\![2, n]\!]$, on définit le point $A_k = r^{k-1}(A_1)$. L'ensemble $P_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$ s'appelle le **polygone régulier (direct)** de sommets $A_1, \ldots, A_n$ et de centre O.

1) Déterminer les polygones réguliers à trois sommets, à quatre sommets.

2) Déterminer l'image de P_n par, respectivement, une homothétie, une translation, une réflexion, une rotation.

3) On considère le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, où $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}/\|\overrightarrow{OA_1}\|$. Déterminer les affixes des sommets de P_n (on identifie le plan à $\mathbb{C}$) et en déduire que O est leur isobarycentre.

4) Soit $G = \mathrm{Is}(P_n)$.

a) Montrer que les éléments de G possèdent tous un point fixe commun.

b) Montrer que G est constitué de $2n$ éléments que l'on décrira explicitement, qu'il contient un sous-groupe K d'ordre n cyclique et distingué, et qu'il n'est pas abélien (sauf si $n = 2$).

N.B. Le groupe G est appelé **groupe diédral d'ordre $2n$**.

Exercice 11. On suppose que E est un plan. Soient $A \neq B$ et $A' \neq B'$ quatre points de E. On sait (voir cours) qu'il existe une unique similitude directe f transformant A en A' et B en B'. On veut ici préciser ses éléments caractéristiques.

1) Déterminer le rapport de f.

2) On suppose que $(AB) \parallel (A'B')$. Montrer que f est une homothétie ou une translation. Préciser ses éléments caractéristiques dans les deux cas.

3) On suppose (AB) et $(A'B')$ sécantes en I. On supposera également $I \notin \{A, A', B, B'\}$ (sinon le raisonnement qui suit doit être adapté).

a) Montrer que f possède un centre O et un angle θ, et déterminer θ.

b) Montrer que O est l'un des points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ circonscrits respectivement à IAA' et IBB'.

c) Déterminer finalement le point O, selon que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents ou non.

Exercice 12. On suppose que E est un plan. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) il existe une similitude f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$;

(ii) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

(iii) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$;

N.B. Ce résultat est connu sous le nom de **cas de similitude des triangles**.

Exercice 13. On suppose que E est un plan, identifié à $\mathbb{C}$.

1) Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c.

a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

b) En déduire l'équivalence des conditions suivantes :

(i) ABC est un triangle équilatéral;

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;

(iii) $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$.

2) Soit ABC un triangle direct. On construit les trois triangles équilatéraux directs $A'CB$, $B'AC$ et $C'BA$. Montrer que les centres de gravité respectifs G, H, K de ces trois triangles forment un triangle équilatéral direct.

Exercice 14. Démontrer que tout polygone régulier à n sommets dans $\mathbb{C}$ est semblable au polygone régulier formé par les racines n-ièmes de l'unité (et donc que tous les polygones réguliers à n sommets sont semblables entre eux).

Bibliographie

Même si ce cours correspond certainement à une vision personnelle de l'enseignement, je dois avouer que la lecture des ouvrages suivants m'a parfois bien inspiré.

J.-M. ARNAUDIÈS ET H. FRAYSSE, Cours de Mathématiques, tome 4 (Algèbre bilinéaire et Géométrie), Dunod.

D. GUININ, F. AUBONNET ET B. JOPPIN, Précis de Mathématiques, Géométrie, Bréal.

B. GOSTIAUX, Cours de Mathématiques Spéciales, tome 4 (Géométrie affine et métrique) & tome 5 (Arcs et nappes), PUF.

Y. LADEGAILLERIE, Géométrie pour le CAPES de Mathématiques (*alias* Géométrie : affine, projective, euclidienne et anallagmatique), Ellipses.

J. LELONG-FERRAND, Les fondements de la Géométrie, PUF.

P. MAZET, Algèbre et Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation, Ellipses.

J.-M. MONIER, Cours de Mathématiques, tome 7 (Géométrie), Dunod.

P. TAUVEL, Cours de Géométrie, Agrégation de Mathématiques, Dunod.

C. TISSERON, Géométries affines, projective, euclidienne, Hermann.

... ainsi que les notes de cours (non publiées) de collègues enseignants : L. BÉRARD-BERGERY (univ. Nancy-I), G. CAUCHON (univ. Reims) et A.-L. MORTAJINE (univ. Nancy-I).