الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali BOUNAAMA Khemis Miliana — جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة
Faculté des Sciences et de la Technologie — كلية العلوم والتكنولوجيا

Adresse : Rue Thniet El Had, Khemis Miliana, Ain Defla , Algérie. Tel :(213) 27556844

Intitulé du polycopié

Introduction à la Topologie

Cours et Exercices

Destiné aux étudiants

Niveau : 2ème année Licence

Spécialité : Mathématiques

Auteur

BOUDERBALA Mihoub

Experts du polycopié	Grade	Établissement d'affiliation
KARRAS Meselem	MCA	UDBKM, Khemis miliana
LAIBE Ilias	MCA	ENTP, Garidi 1, Vieux Kouba, Alger

Date de validation du polycopié par l'instance scientifique habilitée CSD et/ou CSF

CSD …………

CSF …………

Année universitaire : 2021/2022

REPUBLIQUE ALGERIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DJILALI BOUNÂÂMA, KHEMIS MILIANA, UDBKM
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

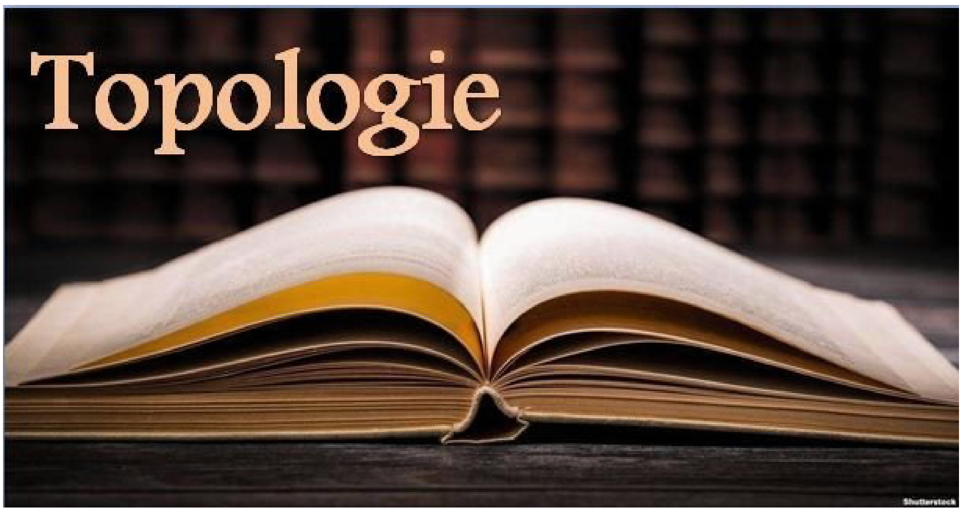
2021-2022

Destiné aux étudiants de la :

2ème année Licence de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Cours et Exercices



Mihoub BOUDERBALA

Département de Mathématiques et Informatique

Préface

Le contenu de ce polycopié est tout à fait conforme au programme d'Introduction à la topologie destiné aux étudiants de deuxième année Licence de Mathématiques que j'ai le privilège de diriger depuis les années universitaires $2016 - 2020$ à l'Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana. Le polycopié se compose de 4 chapitres, chaque chapitre est soutenu par une variété d'exercices, la plupart d'entre eux sont attachés par une solution. À la fin de ces chapitres, j'ai inclus également quelques sujets d'examen des années précédentes pour aider les étudiants à mieux se préparer aux épreuves de la fin du semestre. Dans ce modeste manuscrit, j'ai commencé mon cours en fournissant des concepts généraux sur les espaces topologiques en définissant d'abord les ouverts et fermés en raison de leur importance comme étant des composants de base dans la construction de ce genre d'espaces, ainsi que les sous-espaces topologiques ; ce qui a pour but de transmettre au lecteur une idée simple sur la construction intuitive des espaces topologiques et la manière de traiter leurs ingrédients. Le manuscrit est dans sa version initiale et toute suggestion ou avis des rapporteurs ou des lecteurs est la bienvenue ; Cela m'aidera à améliorer progressivement mon manuscrit au fil du temps.

Table des matières

Introduction

De mon humble expérience dans l'enseignement du contenu de la Topologie au niveau de la deuxième année en Licence j'ai eu un aperçu des difficultés rencontrées par les étudiants notamment dans le choix d'éléments utiles de compréhension. Ce fut une grande motivation pour nous de réaliser ce polycopié. J'espère que ce dernier sera une aide utile et un bon support pour nos étudiants afin d'améliorer leurs résultats aux examens, et à briser tous les obstacles qu'ils rencontrent lors de la préparation de leur deuxième année de licence. Le contenu des chapitres est brièvement décrit ci-dessous :

Le premier chapitre est conçu pour présenter les notions de base d'un espace Topologique comme celles de fermeture, intérieur, frontière, voisinage, adhérence etc. Dans ce chapitre la théorie élémentaire des ensembles (en principe acquise dès la première année) contribue de manière significative à créer la flexibilité nécessaire pour bien appréhender ces nouveaux concepts. Nous pousuivons par introduire les coceptes de la limite et de la continuité. L'intérêt des espaces topologiques séparés s'éclaircira alors : dans ces espaces, la lilimite (d'une suite ou d'une fonction, lorsqu'elle existe) est unique. Dans une autre partie de ce chapitre, nous étudions les propriétés importantes de l'application homéomorphisme, avec un premier exemple non trivial selon lequel « tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ ». Nous étudions aussi les notions de topologie induite et de topologie produit qui correspondent respectivement à celles d'un sous-espace topologique et d'un espace topologique produit. Ensuite nous nous concentrons sur la théorie des espaces métriques en commençant par expliciter leur lien avec les espaces topologiques (i.e., la topologie associée à une distance). Nous réétudions les notions de limite et de continuité (déjà vues au pragraphes précédents) dans le cas des espaces métriques. Nous verrons à ce moment là que ces notions s'obtiennent plus intuitivement sur un espace métrique que sur un espace topologique général. Nous enchaînons avec des notions qui sont propres aux espaces métriques (i.e., qui n'ont pas lieu sur un espace topologique général), dont celles de continuité uniforme, application *lipschitzienne* et isométrie. Nous élargissons aussi la notion de « distance entre deux points d'un espace métrique » en définissant la « distance entre deux parties d'un espace métrique », comme nous définissons par ailleurs la notion de diamètre d'une partie d'un espace métrique. Nous verrons aussi quelques formulations séquentielles (i.e., utilisant des suites) qui caractérisent des propriétés d'une partie d'un espace métrique ou d'une application entre deux espaces métriques. Nous parlons sur des notions de distance induite et distance produit, qui correspondent respectivement à celles d'un sous-espace métrique et d'un espace métrique produit, ainsi que les notions de distances équivalentes et distances topologiquement équivalentes. Nous finissons ce chapitre par le fait qu'un espace métrique est un espace topologique séparé mais que l'inverse n'a pas toujours lieu ; ce qui fait que la catégorie des espaces métriques est une sous-catégorie propre de la catégorie des espaces topologiques.

Dans le deuxième chapitre, nous discutons des espaces compacts où la définition de ces espaces importants utilise en générale la propriété de Borel-Lebesgue qui, intuitivement, est difficile à définir . Lorsque nos travaux portent par exemple sur des espaces métriques, d'autres caractérisations plus compréhensibles de la compacité sont possibles ; Parmi celles-ci, nous donnons la caractérisation de **Bolzano-Weierstrass** qui stipule qu'un espace métrique E est compact si et seulement si toute suite de E possède une sous-suite convergente de E. Il est aussi important de noter que la compacité est une propriété intrinsèque (i.e., une partie compacte d'un espace topologique E reste compacte par rapport à n'importe quel autre sous-espace topologique de E qui la contient. Nous verrons par suite le produit d'espaces métriques compacts et parties compactes de la droite réelle ainsi que les théorèmes fondamentaux liant la compacité à la continuité.

Au troisième chapitre, nous abordons les espaces complets où nous commençons par rappeler la propriété importante d'un espace complet (i.e. toute suite de Cauchy de points de E converge vers un point de E), puis en montrant d'autres concepts qui est le prolongement d'une application uniformément continue et le théorème du point fixe de Banach.

Dans le quatrième chapitre, nous avons traité des espaces connexes. Au début, nous avons eu l'occasion de définir cet espace de plusieurs manières équivalentes, afin de faire en sorte que le lecteur aborde l'idée d'espace connexe d'une manière merveilleuse dès le premier contact. Après cela, nous avons abordé le concept de sous espace connexe et localement connexe, et pour que notre idée soit claire, nous avons traité plusieurs propriétés importantes y compris des exemples. D'une part, tout comme la compacité, nous montrons que la connexité se conserve aussi par continuité, et d'autre part, nous généralisons le théorème des valeurs intermédiaires.

Au cinquème chapitre on va parler d'espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui sont considérés comme une structure mathématique qui développe des propriétés géométriques de distance compatible avec les opérations de l'algèbre linéaire. Développée notamment par David Hilbert et Stefan Banach, cette notion est très importante en analyse et plus particulièrement en analyse fonctionnelle avec l'utilisation d'espaces de Banach (où les vecteurs sont des fonctions).

Nous clôturons ce modeste document avec quelques épreuves d'examen des années précédentes, suivies d'une bibliographie comprenant une variété de références de Topologie Générale.

Chapitre 1

Espaces Topologiques

Dans cette section, on donne la définition d'espace topologique ainsi que l'essentiel du vocabulaire topologique de base.

1.1 Topologie de l'ordre

Définition 1.1 *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Soient a et b au moins deux élements de E. Les intervalles ouverts de E sont les parties de l'une des cinq formes suivantes : E, ϕ, $]a, b[:= \{x \in E \mid a < x < b\}$, $\{x \in E \mid x < b\}$, $\{x \in E \mid a < x\}$.*
Les ouverts de E sont les réunions d'intervalles ouverts.

Remarques :

1. Si $E = \mathbb{R}$, les intervalles du deuxième et du troisième type sont notés $] - \infty; b[$ et $]a; +\infty[$. Mais si $E =$ la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (avec $-\infty < \mathbb{R} < +\infty$), ils sont égaux à $[-\infty; b[$ et $]a; +\infty]$.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.2 *On appelle un **espace topologique** un ensemble E muni d'une partie τ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E qui vérifiant les axiomes suivants :*
(i) . $\phi \in \tau$, $E \in \tau$.
(ii) . *L'intersection de deux éléments de τ est un élément de τ.*
(iii) . *La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de τ est un élément de τ.*

Appellations et remarques :

1. Les axiomes (i) , (ii) et (iii) de la définition précédente s'appellent **les axiomes de Hausdorff** en hommage au mathématicien allemand Felix Hausdorff ($1868 - 1942$) qui a écrit le premier livre de topologie générale en 1914.

2. Un **espace topologique** est un couple (E, τ) où E est un ensemble et τ une topologie sur E.

3. Etant donné (E, τ) un espace topologique, on appelle **ouvert** de E toute partie de E appartenant à τ.

De plus les complémentaires de ouverts de E sont appelés **les fermés** de E. τ est parfois appelée la topologie de E.

4. La propriété (ii) d'une topologie s'étend facilement par récurrence comme ceci :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall U_1, U_2, \cdots, U_n \in \tau : \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$$

Autrement dit : « Toute intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E ou bien τ est **stable** par intersection **finie**».

5. la propriété (iii) d'une topologie s'exprime littérairement en disant que : les **ouverts** sont stables par **réunion quelconque** et par **intersection finie**. Les **fermés** sont stables par intersection quelconque et par réunion finie.

Cependant, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée. Pour s'en convaincre, on retiendra les deux exemples suivants sur $(\mathbb{R}, \tau_u)$:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\} \quad \text{et} \quad \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0, 1] .$$

Examples :

1. **L'espace topologique usuel** : Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si, $\forall x \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ est contenu dans U. Il est bien clair que ceci défini une topologie sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette topologie τ_u appelée **topologie usuelle**.

2. Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\emptyset, \mathbb{R}$ et des intervalles de la forme $]a, b[$, n'est pas une topologie, car la propriété (iii) n'est pas vérifiée.

3. Sur un ensemble E, il existe toujours deux topologies « extrêmes » : la **topologie discrète** $\tau_d = \mathcal{P}(E)$ et la **topologie grossière** $\tau_g = \{\phi, E\}$. Un espace muni de la topologie discrète (respectivement grossière) est dit discret (respectivement grossier).

4. Un ensemble à deux éléments $E = \{a, b\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :

$$\tau_g = \{\phi, E\}\,,\ \tau_1 = \{\phi, \{a\}\,, E\}\,,\ \tau_2 = \{\phi, \{b\}\,, E\}\,,\ \tau_d = \{\phi, \{a\}\,, \{b\}\,, E\}\,.$$

Exercise 1.1 *Soit E un ensemble quelconque. Montrer que la famille formée par l'ensemble vide et les complémentaires des parties finies de E forment une topologie sur E.*

Solution 1.1

• *ϕ étant une partie finie $E = E \setminus \phi$ est un ouvert.*

• *Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties finies de E. Alors,*

$$\bigcup_{i\in I}(E \setminus E_i) = E \setminus \bigcap_{i\in I} E_i \text{ et } \bigcap_{i\in I}(E \setminus E_i) = E \setminus \bigcup_{i\in I} E_i.$$

Comme l'intersection quelconque d'une famille de parties finies est finie et que la réunion d'une famille finie de parties finie est finie notre résultat suit.

Exercise 1.2 *Montrer que l'ensemble τ formé de $\emptyset, \mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.2 (i) $\phi \in \tau$ *(car ϕ est une réunion vide d'intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$) *et* $\mathbb{R} \in \tau$ $\left(\textit{car } \mathbb{R} = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}}]-n, n[\textit{ est bien une réunion d'intervalles ouverts bornés de } \mathbb{R}\right)$.

(ii) *Soient $U, V \in \tau$. On peut écrire (par définition même de τ) : $U = \underset{i\in I}{\cup}]a_i, b_i[$ et $V = \underset{j\in J}{\cup}]c_j, d_j[$ avec les a_i, b_i, c_j, d_j $(i \in I,\ j \in J)$ sont des réels tels que $a_i < b_i$ pour tout $i \in I$ et c_j, d_j pour tout $j \in J$. D'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :*

$$U \cap V = \left(\underset{i\in I}{\cup}]a_i, b_i[\right) \cap \left(\underset{j\in J}{\cup}]c_j, d_j[\right) = \underset{\substack{i\in I\\ j\in J}}{\cup} (]a_i, b_i[\cap]c_j, d_j[)\,.$$

Puisque l'intersection de deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ est ou bien vide ou bien égale à un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ alors cette dernière écriture de $U \cap V$ montre bien que $U \cap V \in \tau$.

(iii) *Soit* $(U_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* τ. *Comme chaque ensemble* U_i $(i \in I)$ *est une réunion d'intervalles ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *alors leur réunion* $\left(\underset{i\in I}{\cup} U_i\right)$ *est une réunion de réunions d'intervalles ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *; c'est bien donc une réunion d'intervalles ouverts bornés de* $\mathbb{R}$. *D'où :* $\left(\underset{i\in I}{\cup} U_i\right) \in \tau$. *Les éléménts de* τ *vérifie bien les trois axiomes de Hausdorff ; elle constitue donc une topologie sur* $\mathbb{R}$. *Cette topologie* τ *s'appelle la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$.

Exercise 1.3 *Quelles conditions doivent vérifier deux parties différentes* A *et* B *de* E *pour que* $\{\phi, A, B, E\}$ *soit (l'ensemble des ouverts) une topologie sur* E?

Solution 1.3 *On pose*

$$\tau = \{\phi, A, B, E\}.$$

Tout d'abord nous avons ϕ *et* E *appartiennent déjà à* τ. *Il nous reste de montré que l'intersection et la réunion des éléments de* τ *est un élément de* τ. *Il est claire que* $\phi \cap A$, $\phi \cap B$, $\phi \cap E$, $A \cap E$, $B \cap E$ *sont dans* τ, *mais pas forcement pour* $A \cap B$ *et* $A \cup B$. *Donc, nous constatons les deux cas suivants :*
Si $A \cap B \neq \phi$ *on obtient que*

$$A \cap B \in \tau \text{ ssi } A \subset B \text{ ou } B \subset A.$$

Si $A \cap B = \phi$, *on obtient que*

$$A \cup B \in \tau \text{ ssi } A = C_E B.$$

Exercise 1.4 *On pose* $E :=]0, +\infty[$ *et pour tout réel positif* α, *on pose* $O_\alpha :=]0, \alpha[$. *On considère* τ *la famille de parties de* E *donnée par* $\tau = \{E, O_\alpha\}$.
1. *Montrer que* τ *constitue une topologie sur* E.
2. *Déterminer les fermés de l'espace topologique* (E, τ).

Solution 1.4
(i) $\phi \in \tau$ (*car* ϕ *est l'intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *obtenir l'orsque* $\alpha = 0$) *et* $E \in \tau$.
(ii) *Soient* α *et* α' *deux réels positifs* α *et* α' *tel que* $O_\alpha =]0, \alpha[$ *et* $O_{\alpha'} =]0, \alpha'[$. *On a,*

$$O_\alpha \cap O_{\alpha'} =]0, \min(\alpha, \alpha')[.$$

Puisque l'intersection de deux intervalles ouverts positifs de $\mathbb{R}$ *est vide ou bien égale à un intervalle ouvert positif de* $\mathbb{R}$, *alors cette dernière écriture de* $O_\alpha \cap O_{\alpha'}$ *montre bien que*

$O_\alpha \cap O_{\alpha'} \in \tau$.
(iii) *Soit* $(O_{\alpha_i})_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* τ *tels que* α_i, $i \in I$ *sont des reéls positifs. On a,*

$$\bigcup_{i\in I} O_{\alpha_i} = \left]0, \max_{i\in I}(\alpha_i)\right[$$

alors la réunion $\left(\bigcup_{i\in I} O_{\alpha_i}\right)$ *est un intervalles ouverts positif de* $\mathbb{R}$. *D'où :* $\left(\bigcup_{i\in I} O_{\alpha_i}\right) \in \tau$.
Les éléménts de τ *vérifie bien les trois axiomes de Hausdorff; elle constitue donc une topologie sur* E.
2. *Les fermés de l'espace topologique* (E, τ) *sont les complémontaires par rapport à* E *aux intervalles* $O_\alpha =]0, \alpha[$ *où* $\alpha \geq 0$ *c-à-d les intervalles de la forme*

$$[\alpha, \ +\infty[\ \ \alpha \geq 0.$$

1.3 Voisinage d'un point ou d'une partie

Définition 1.3 *Une partie* V *d'un espace topologique* E *est un voisinage d'un point* a *de* E *si* V *contient un ouvert contenant* a. *L'ensemble des voisinages de* a *est noté* $\mathcal{V}(a)$. *Plus généralement, on appelle voisinage d'une partie* A *de* E, *toute partie* V *de* E *qui contient un ouvert, lequel contient* A. *On note par* $\mathcal{V}(A)$ *l'ensemble de tous les voisinages d'une partie* A *de* E.
Par le symbolisme mathématique, on a donc pour tout $a \in E$ *et tout* $A \subset E$ *:*

$$\begin{aligned} V &\in \mathcal{V}(a) \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \ a \in O \subset V \\ V &\in \mathcal{V}(A) \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \ A \subset O \subset V. \end{aligned}$$

Exemple 1.1 *Dans l'espace topologique* $\mathbb{R}$, *un voisinage de* a *est une partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle ouvert de la forme* $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, $\epsilon > 0$.

Exemple 1.2 *Dans l'espace topoloqique définit sur l'ensemble* $E = \{a, b, c\}$, *les voisinage de* a *sont :* $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Remarque 1.1 1. *Tout voisinage de* a *contient* a.
2. *Tout surensemble d'un voisinage de* a *est un voisinage de* a.
3. *Toute intersection finie de voisinages de* a *est un voisinage de* a.
4. *Tout ouvert contenant* a *est un voisinage de* a.

Théorème 1.1 *Une partie U de E est un ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Pour tout ouvert U et tout élément a de U, U est un voisinage de a puisqu'il contient un ouvert (U lui-même) contenant a. Réciproquement, soit U une partie de E telle que pour tout $a \in U$, U est un voisinage de a. Il existe alors, pour chaque $a \in U$, un ouvert O_a contenant a et inclus dans U. La réunion O de ces ouverts est un ouvert, et U est égal à cet ouvert : $O \subset U$ car les O_a sont inclus dans U, et $U \subset O$ car $\forall a \in U$, $a \in O_a$ et $O_a \subset O$.

Exercise 1.5 *Montrer que dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ muni de la topologie de l'ordre, les voisinages de $+\infty$ sont les parties contenant $+\infty$ et tous les entiers à partir d'un certain rang.*

1.4 Base d'ouverts, base de voisinages

Définition 1.4 *Soient $(E; \tau)$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base de la topologie** τ (ou une **base d'ouverts** de l'espace) si l'une des trois conditions équivalentes est vérifiée (donc les trois) :*
- *les ouverts de τ sont exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$;*
- *$\mathcal{B} \subset \tau$ et tout ouvert de τ est une réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$;*
- *$\mathcal{B} \subset \tau$ et pour tout $U \subset \tau$ et tout point $x \in U$, U contient un élément de $\mathcal{B}$ contenant x.*

(L'équivalence entre les deux premières propriétés et la troisième se démontre comme le théorème 1.1.)

Remarque 1.2 *τ elle-même est une base de τ, mais on cherche en général à décrire τ par des bases plus économiques, i.e. "petites" . Par exemple : les intervalles ouverts forment une base de la topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.3 *La famille $\left]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right[$ $(r \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}^*)$ constitue une base pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (pour le montrer, utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que l'axiome d'Archimède). Remarquer que cette base est dénombrable ; on dira que l'espace topologique $\mathbb{R}$ est à base dénombrable.*

Définition 1.5 (SFV) *On appelle **système fondamental** de voisinages (ou **base de voisinages**) d'un élément a de E, toute famille $\mathcal{B}(a)$ de voisinages de a telle que :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists W \in \mathcal{B}(a) : \ W \subset V.$$

Exemple 1.4 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille des intervalles de la forme $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base dénombrable de voisinages de a. Cet exemple rappelle que les voisinages - en particulier les éléments d'une base de voisinages - ne sont pas forcément des ouverts. Il est cependant courant de les choisir tels, en utilisant la proposition suivante.*

Proposition 1.1 *Pour tout espace topologique E, un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E est une base d'ouverts si et seulement si, pour tout point a de E, la famille des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent a est une base de voisinages de a.*

Preuve. Pour tout $a \in E$, notons $\mathcal{F}_a = \{W \in \mathcal{B} \mid a \in \mathcal{W}\}$.
($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts et fixons $a \in E$: Pour toute partie V de E, V est un voisinage de a si et seulement s'il contient un ouvert contenant a, c'est à dire une réunion, contenant a, d'éléments de $\mathcal{B}$, autrement dit si V contient un $W \in \mathcal{B}$ contenant a. Les voisinages de a sont donc exactement les parties de E contenant un $W \in \mathcal{F}_a$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a.
($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $a \in E$, $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a. Pour toute partie U de E, U est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire : $\forall a \in U$; $\exists W \in \mathcal{F}_a$; $W \subset U$, ou encore : $\forall a \in U$, U contient un $W \in \mathcal{B}$ qui contient a, autrement dit comme dans la preuve du théorème 1.1 si U est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Les ouverts sont donc exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

Exercise 1.6 *Montrer que L'ensemble $\mathcal{B} = \{[a, b[\,; (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b\} \cup \phi$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.5 *On a pour tout réel a est contenu dans l'élément $[a, a+1[\, \in \mathcal{B}$ et l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{B}$. de plus tout intervalle ouvert $]a, b[$est la réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ (à savoir $]a, b[\, = \cup_{n \geqslant n_0} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[$, avec n_0 assez grand), donc $\mathcal{B}$ est une base.*

1.5 Intérieur et adhérence

1.5.1 Adhérence

Définition 1.6 *Dans un espace topologique E, un point x est dit **adhérent** à une partie A si tout voisinage de x rencontre A; c'est-à-dire si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) : \ V \cap A \neq \phi.$$

*L'ensemble des points adhérents à A est appelé **l'adhérence** de A et noté $\overline{A}$.*

Remarque 1.3 *Tout élément x de A est adhérent àA (puisque tout voisinage de x contient x), donc $A \subset \overline{A}$.*

On peut distinguer deux types de points adhérents :

Définition 1.7 *Un point x adhérent à A est :*
• ***point isolé*** *de A s'il existe un voisinage V de x tel que $A \cap V = \{x\}$, autrement dit si $x \in A$ et $\{x\}$ est ouvert dans A (pour la topologie induite).*
• ***point d'accumulation*** *de Asi tout voisinage de x rencontre $A \setminus \{x\}$ (ce qui ne nécessite pas que x appartienne à A), autrement dit si x est adhérent à $A \setminus \{x\}$.*

Remarques.

1. Il est évident qu'un point ne peut pas être à la fois point isolé et point d'accumulation de A, et que s'il est l'un ou l'autre alors il est adhérent à A. Et ce sont les seuls types possibles de points adhérent, car si un point adhérent x n'est pas isolé alors, pour tout voisinage V de x, $A \cap V \nsubseteq \{x\}$.
2. Un point d'accumulation d'une partie d'un espace topologique est clairement un point adhérent à cette partie. Cependant, l'inverse est (généralement) faux.
3. L'ensemble de tous les points d'accumulation d'une partie A d'un espace topologique s'appelle l'ensemble dérivé de A et se note A'. Cette notion a été introduite par le mathématicien allemand Georg CANTOR $(1845 - 1918)$ qui l'a étudié pour la première fois sur l'ensemble des nombres réels.

Exemple 1.5 1. *Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $\left]0; \sqrt{2}\right[\cup \{3\}$ a 3 come point isolé et $\left[0; \sqrt{2}\right]$ comme ensemble de points d'accumulation.*
2. *L'adhérence de $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ contient tous les $\frac{1}{n}$ comme points isolés et 0 comme point d'accumulation.*

Exemple 1.6 *Si $(E; \tau) =$ ($\mathbb{R}$; topologie usuelle) et $A =]a, b[$, alors $\overline{A} = [a, b]$. En effet, $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ qui contient $]a, b[$ et donc $]a, b[\subset \overline{A} \subset [a, b]$. $\overline{A}$ ne peut donc être égal qu'à $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ Comme seul le dernier de ces intervalle est fermé, on a*

$$\overline{]a, b[} = [a, b].$$

Proposition 1.2 *L'adhérence d'une partie A est* ***le plus petit fermé*** *contenant A. En particulier, A est un fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Preuve. Ce plus petit fermé pour l'inclusion existe : c'est l'intersection de la famille des fermés contenant A (cette famille est bien non vide car E est un tel fermé). Il s'agit donc de montrer que a est adhérent à A si et seulement s'il appartient à tous ces fermés. Or a est adhérent à A si tout ouvert contenant a rencontre A c'est-à-dire, par passage au complémentaire, si tout fermé ne contenant pas a ne contient pas A tout entier, ou encore, par contraposée, si tout fermé contenant A contient a.

Exercise 1.7 *Soit O une partie ouverte de l'espace topologique $(E;\tau)$. Démontrer que pour toute partie A de E on a :*

$$A \cap O = \phi \Longleftrightarrow \overline{A} \cap O = \phi.$$

1.5.2 Intérieur

Définition 1.8 *Pour une partie B d'un espace topologique E, On appelle **intérieur** de B, que l'on note $\overset{\circ}{B}$, le plus grand ouvert de E qui est contenu dans B.*

"Dualement" à l'inclusion $A \subset \overline{A}$, on a l'inclusion (tout aussi immédiate) $\overset{\circ}{B} \subset B$.

Corollaire 1.1 1. *Lintérieur de B, est l'ensemble des points dont B est voisinage.*
2. *L'intérieur de B est la réunion de tous les ouverts contenus (inclus) dans B (elle existe, puisque ϕ est ouvert, mais peut être vide). On a alors*

$$\overset{\circ}{B} = \bigcup_{\substack{O \in \tau \\ O \subset B}} O.$$

3. *Une partie B de E est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{B} = B$.*

Théorème 1.2 *Soit B une partie de E. Un point b de E est à l'intérieur de B (c'est-à-dire appartient à $\overset{\circ}{B}$) si et seulement si B est un voisinage de b.*

Preuve. Soit $b \in E$.
$(\Longrightarrow)$: Supposons que $b \in \overset{\circ}{B}$. Comme (par définition même) $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert et que $\overset{\circ}{B} \subset B$ alors B est un voisinage de b.
$(\Longleftarrow)$: Supposons que B est un voisinage de b. Donc $\exists O \in \tau$ tel que $b \in O \subset B$. Ce qui entraîne que $O \subset \overset{\circ}{B}$. D'où, en particulier, $b \in \overset{\circ}{B}$.

Proposition 1.3 *Soient E un espace topologique et A et B deux parties de E. Alors :*
(i) *Si A et B sont complémentaires alors $\overset{\circ}{B}$ et $\overline{A}$ sont complémentaires.*

(ii) *Si* $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Preuve. 1. Pour la la première propriété (i) on a $x \notin \overset{\circ}{B} \Longleftrightarrow B$ n'est pas un voisinage de $x \Longleftrightarrow B$ ne contient aucun voisinage de $x \Longleftrightarrow$ tout voisinage de x rencontre $A \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$.
2. Montrons par exemple la première égalité du (iii) . L'inclusion $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ provient du (ii) ;d'autre part $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque 1.4 *On notera que, en général, on a seulement les relations* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ *et pas des égalités.*

Exemple 1.7 *Si* $A = [0;1]$ *et* $B = [1;2]$, *alors on a* $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \overset{\circ}{\widehat{[0;2]}} =]0;2[$. *Or* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0;1[\cup]1;2[=]0;2[\setminus \{1\}$. *Inversement, si* $A =]0;1[$ *et* $B =]1;2[$, *alors* $\overline{A \cap B} = \overline{\phi} = \phi$ *(car* ϕ *est fermé). Or* $\overline{A} \cap \overline{B} = [0;1] \cap [1;2] = \{1\}$.

Définition 1.9 *Soit A une partie d'un espace topologique E. la **frontière** d'une partie A, définie par*

$$Fr(A) := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A},$$

est égale à la frontière du complémentaire de A.

Exemple 1.8 *Si* $E = \mathbb{R}$ *est muni de la topologie de l'ordre et si* $A = [0,1[$, *on vérifie que* $\overline{A} = [0;1]$, $\overset{\circ}{A} =]0;1[$ *et* $Fr(A) = \{0,1\}$.

Exercise 1.8 *Soit E un espace topologique, A, B des sous-ensembles de E.*

1. *Montrer que* $\overline{A^{C}} = \left(\overset{\circ}{A}\right)^{C}$ *et que* $\overline{A}^{C} = \left(\overset{\circ}{A^{C}}\right)$.
2. *Montrer que*

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \ A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

3. *Que peut on dire de* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$?
4. *On note* $u(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ *et* $v(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$

(a) Calculer $u(A)$ *et* $v(A)$ *pour* $E = \mathbb{R}$ *(avec la topologie usuelle) et* $A =]0,2]$ *et* $A = \mathbb{Q}$.

(b) Comparer $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $u(A)$ *et* $v(A)$.

Solution 1.6
1. *Rappelons que si* (X_i) *est une famille de parties de* E*, le complémentaire de la réunion des* X_i *est l'intersection des complémentaires des* X_i*. Par définition,* $\left(\overset{\circ}{A}\right)^{\mathcal{C}}$ *est le complémentaire de la réunion de tous les ouverts contenus dans* A*, c'est donc l'intersection de tous les fermés contenant* $A^{\mathcal{C}}$*, c'est-à-dire* $\overline{A^{\mathcal{C}}}$*. La deuxième égalité se déduit de la première en remplaçant* A *par son complémentaire.*
2. *On a clairement* $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$*, donc* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$*, d'où l'inclusion :* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$*.*
Comme on a $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$*, on a aussi* $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ *et* $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$*. Donc* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$*. D'autre part, on a* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$*. Ce dernier ensemble étant fermé, comme réunion de deux fermés, il contient* $\overline{A \cup B}$*. On a donc bien* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*.*
Par passage au complémentaire, et en utilisant la question précédente on obtient

$$A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

L'inclusion $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ *est fausse en général : prenons dans* $\mathbb{R}$, $A = [4, 5[$ *et* $B =]5, 7]$*.* $A \cap B$ *est alors vide, donc son adhérence aussi, mais* $\overline{A} = [4, 5]$ *et* $\overline{B} = [5, 7]$ *d'où* $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$*.*
3. *On a* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ *est un ouvert inclus dans* $A \cup B$*, donc inclus dnas le plus grand ouvert de* $A \cup B$*. Il suit que* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$*. l'inclusion inverse est fausse come on le voit en considérant les complémentaires pour le contre-exemple de la question précédente* 2.
4. *a)* $u\left(]0, 2]\right) = \overset{\circ}{\overline{[0, 2]}} =]0, 2[$ *et* $v\left(]0, 2]\right) = \overline{]0, 2[} = [0, 2]$*. On a* $u\left(\mathbb{Q}\right) = \mathbb{R}$ *et* $v\left(\mathbb{Q}\right) = \emptyset$*.*
b) On a pour tout ensemble $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$*. De plus* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ *et* $\overset{\circ\circ}{X} = \overset{\circ}{X}$*. Il suit que* $\overset{\circ}{A} \subset u\left(A\right) \subset \overline{A}$ *et de m^eme* $\overset{\circ}{A} \subset v\left(A\right) \subset \overline{A}$*. En revanche, on ne peut pas comparer* $u\left(A\right)$ *et* $v\left(A\right)$ *en général car pour* $A = \mathbb{Q}$ *on a* $v\left(A\right)$ *est strictement inclus dans* $u\left(A\right)$ *et pour une boule ouverte dans* $\mathbb{R}^n$*, c'est le contraire.*

Exercise 1.9 *On considère* $\mathbb{R}^2$ *muni de sa topologie usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des sous-ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y + 1\right\} \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\right\} \\ C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\} \qquad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\right\} \cap \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Solution 1.7 *L'ensemble* A *est ouvert. En effet* $A = \left(2p_1 - p_2\right)^{-1}\left(]1, +\infty[\right)$ *où* $p_1\left(x, y\right) = x$ *et* $p_2\left(x, y\right) = y$ *sont les projections canonique des* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *et elles sont continues. Il suit que* A *est la pré-image d'un ouvert par une fonction continue, donc est*

ouvert. Par conséquent $\overset{\circ}{A} = A$. *On a* $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \geq y+1\}$. *En effet ce dernier ensemble est fermé (même raisonement que pour* A *ouvert) et de plus tout point de* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \geq y+1\}$ *est adhérent à* A. *En effet si* $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \geq y+1\}$, *la suite* $\left(x + \frac{1}{n}, y\right)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *est dans* A *et converge vers* (x,y).
Des raisonements analogues montrent que $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$, $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 1\}$, $\overline{C} = C$ *(*C *est fermé)*
et $\overset{\circ}{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}$ *(attention, ici* 0 *est bien un point intérieur à* C*).*
Comme tout disque ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ *contient des points de* $\mathbb{Q}^2$, *on voit que l'adhérence de* D *est* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$. *Et comme tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}^2$ *contient des points à coordonnées irrationnelles, l'intérieur de* D *est l'ensemble vide.*

Exercise 1.10 *Soit* $(E;\tau)$ *un espace topologique et soient* A *et* B *deux parties de* E *telles que* $E = A \cup B$. *Montrer qu'on a :*

$$E = \overset{\circ}{A} \cup \overline{B}.$$

Exercise 1.11 *D'eterminer la frontière des ensembles de* $\mathbb{R}^2$ *suivants :*

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\right\}. \\ A_2 &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \\ A_3 &= \left]-2, 1\right[\times [0,1]. \end{aligned}$$

Solution 1.8 *On vérifie que* $\partial A_1 = \{0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$. *En effet* A_1 *est ouvert son adhérence est la boule fermée centrée à l'origine et de rayon* $\sqrt{2}$, *donc* $\partial A_1 = \overline{A_1} \setminus A_1 = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$.
On a $\partial A_2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2$.
On a $\partial A_3 = \{-2\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1] \cup [-2,1] \times \{0\} \cup [-2,1] \times \{1\}$ *car* $\overline{A_3} = [-2,1] \times [0,1]$.

Exercise 1.12 *Soit* $\tau = \{]-\alpha, \alpha[\mid \alpha \in [0, +\infty]\}$.
1. *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton* $\{a\}$ *puis d'un segment* $[a,b]$.

Exercise 1.13 *Soit* $(E;\tau)$ *un espace topologique et soient* A *et* B *deux parties de* E .
1. *Montrer que* $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ *et montrer qu'il y a égalité si* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont disjoints.*
$-$*Donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où cette inclusion est stricte.*
2. *Montrer que* $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$ *et* $Fr(\overset{\circ}{B}) \subset Fr(B)$.

Exercise 1.14 1. *Montrer que* $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ *(pour deux parties* A *et* B *d'un espace topologique).*
2. *En déduire que* $\cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$ *et montrer qu'il y a égalité lorsque* I *est fini.*
3. *Donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où cette inclusion est stricte.*
4. *Montrer que* $\overline{\cap_{i\in I}A_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i}$ *et donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où l'inclusion* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *est stricte.*
5. *Écrire les résultats correspondants pour les intérieurs.*

1.6 Partie dense

Définition 1.10 *Soit* $(E;\tau)$ *un espace topologique et* D *une partie de* E. D *est dite* ***dense*** *dans* E *ssi* $\overline{D} = E$.

La propriété suivante est une caractérisation trés pratique des parties denses.

Proposition 1.4 D *est* ***dense*** *dans* E *ssi tout ouvert non vide de* E *rencontre* D.

Preuve. $(\Longleftarrow)$:Si D n'est pas dense alors $\overline{D} \neq E$, donc $E \setminus \overline{D}$ est un ouvert non vide de E qui n'intercepte pas D (car $D \subset \overline{D}$).
$(\Longrightarrow)$: Si $O \in \tau$ est un ouvert non vide de E tel que $O \cap D = \phi$, alors D est inclu dans le fermé $(E \setminus O)$, et donc $\overline{D} \subset (E \setminus O) \neq E$.

Théorème 1.3 1. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ $\left(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right)$: *tout intervalle ouvert (non vide) de* $\mathbb{R}$ *contient une infinité de rationnels.*
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ $\left(\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right)$: *tout intervalle ouvert (non vide) de* $\mathbb{R}$ *contient une infinité d'irrationnels.*

Preuve. On commence par remarquer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un intervalle du type $]x, y[\,, x, y \in \mathbb{R}$. On peut donc supposer que $I =]x, y[$ par la suite.
1. tout intervalle contient un rationnel.
On commence par montrer l'affirmation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ x < r < y.$$

Donnons d'aboerd l'idée de la preuve. Trouver un tel rationnel $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. revient à trouver de tels entiers p et q vérifiant $qx < p < qy$. Cela revient à trouver un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que l'intervalle ouvert $]qx, qy[$ contient un entier p. Il suffit pour cela que la longueur $qy - qx = q(y - x)$ de l'intervalle dépasse strictement 1, ce qui équivaut

à $q > \frac{1}{y-x}$. Maintenant posons $p = \lfloor qx \rfloor + 1$. Alors $p - 1 \leqslant qx < p$. On en déduit d'une part $x < \frac{p}{q}$, et d'autre part $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant x$, donc $\frac{p}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < x + y - x = y$. Donc $\frac{p}{q} \in I$. On a montré l'affirmation.
2. tout intervalle contient un irrationnel.
Partant de x, y réels tels que $x < y$, on peut appliquer l'imlication de l'affirmation dans (1) au couple $\left(x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}\right)$. On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $\left]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}\right[$ et par translation $r + \sqrt{2}$ est irrationel, car sinon comme les rationnels sont stables par somme, $\sqrt{2} = -r + r + \sqrt{2}$ serait rationnal, ce qui est faux. On a donc montré que si $x < y$, l'intervalle $I =]x, y[$ contient aussi un irrationnel.

Exercise 1.15 *On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Solution 1.9 *On utilise que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il suit que $\overline{\mathbb{Q}} = R$. Montrons que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. En effet si $p/q \in \mathbb{Q}$, tout intervalle $]a, b[$ contenant p/q est non-dénombrable, donc contient des éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il suti qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ est intérieur à $\mathbb{Q}$ c'est à dire $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. On montre de même que $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$..*

Exercise 1.16 *Montrer qu'une partie d'un espace topologique est d'intérieur non vide si et seulement si elle rencontre toute partie dense.*

Exercise 1.17 *Soit $(E; \tau)$ un espace topologique et soient A et B deux parties de E qui sont toutes les deux denses. On suppose de plus que A est un ouvert de E.
Montrer que $A \cap B$ est dense dans E. (Vous pouvez utiliser la dernière proposition).*

1.7 Espace séparé (ou de Hausdorff)

Définition 1.11 *Un espace topologique $(E; \tau)$ est dit **séparé** ssi pour tout points distincts $(x; y)$ de E, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \phi$.*

Exemple 1.9 1. *Si E est muni de la topologie discrète alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des ouverts disjoints si x et y sont distincts, donc E est séparé.*
2. *Si E est muni de la topologie grossière et E contient au moins deux éléments distincts, alors E n'est pas séparé (pour tout $x \in E$, E est le seul voisinage de x).*
3. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace séparé. Eneffet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$, en posant $r := \frac{|x-y|}{3}$, les deux intervalles ouverts $]x - r, x + r[$ et $]y - r, y + r[$ sont bien disjoints, le premier étant un voisinage de x et le second est un voisinage de y.*

Proposition 1.5 *Si $(E;\tau)$ est un espace topologique séparé alors pour tout $\ell \in E$, on a*

$$\cap_{V\in\mathcal{V}(\ell)} V = \{\ell\}\,.$$

Preuve. Si $V \in \mathcal{V}(\ell)$ alors $\ell \in V$ donc $\ell \in \cap_{V\in\mathcal{V}(\ell)} V$. Réciproquement, si $y \in E \setminus \{\ell\}$ alors il existe $V \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que $y \notin V$ et donc $y \notin \cap_{V\in\mathcal{V}(\ell)} V$. D'où $\cap_{V\in\mathcal{V}(\ell)} V \subset \{\ell\}$.

Exercise 1.18 *On pose $E :=]0,+\infty[$ et pour tout réel positif α, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha,+\infty[$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :*

$$\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

1. *Montrer que τ constitue une topologie sur E.*
2. *Déterminer les fermés de l'espace topologique (E,τ).*
3. *Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants : $A = [4,9[$, $A = [-2,+\infty[$, $A = \{2,3,4\}$, $A = \mathbb{N}$.*
4. *Montrer que (E,τ) n'est pas séparé.*

1.8 Topologie induite, topologie produit

1.8.1 Topologie induite

Soit $(E;\tau)$ un espace topologique et A un partie de E.

Définition 1.12 *La famille τ_A de parties de A, définie par :*

$$\tau_A = \{O \cap A,\ O \in \tau\}\,,$$

*constitue une topologie sur A appelée **topologie induite** sur Apar la topologie de E. Le nouvel espace topologique (A,τ_A) s'appelle un **sous-espace topologique** de E.*

Preuve. Il s'agit de montrer que les axiomes de Hausdorff sont vérifiés pour le couple (A,τ_A). On a
(i) Puisque $\phi, E \in \tau$ (car τ est une topologie sur E) alors $\phi\cap A = \phi \in \tau_A$ et $E\cap A = A \in \tau_A$.
(ii) Soient U_1, U_2 deux parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, les parties U_1, U_2 sont de la forme $U_1 = O_1 \cap A$ et $U_2 = O_2 \cap A$, avec $O_1, O_2 \in \tau$. D'où

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in A,$$

car $O_1 \cap O_2 \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur E.
(iii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $\cup_{i\in I} U_i \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, chaque U_i $(i \in I)$ s'écrit sous la forme : $U_i = O_i \cap A$, avec $O_i \in \tau$. D'où

$$\cup_{i\in I} U_i = \cup_{i\in I} (O_i \cap A) = (\cup_{i\in I} O_i) \cap A \in \tau_A,$$

car $\cup_{i\in I} O_i \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur E.

Proposition 1.6 1. *Soit $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés de E. La famille $(F \cap A)_{F\in\mathcal{F}}$ est appelée la famille des fermés de A pour la topologie induite par celle de E.*
2. *Soit $a \in A$, alors $(V \cap A)_{V\in\mathcal{V}(a)}$ est appelée la famille des voisinages de a dans A pour la topologie induite (où $\mathcal{V}(a)$ est la famille des voisinages de a dans E).*

Preuve. 1. F' est un fermé de A ssi $A \setminus F'$ est un ouvert de A, i.e. ssi il existe $O \in \tau$ tel que $A \setminus F' = A \cap O$. Donc F' est un fermé de A ssi $\exists O \in \tau$ tel que $F' = A \setminus (A \setminus F') = A \setminus (A \cap O) = A \cap (E \setminus O)$, i.e. ssi il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F' = A \cap F$.
2. Si $V \in \mathcal{V}$ alors il existe $O \in \tau$ tel que $a \in O \subset V$. Alors $a \in A \cap O \subset A \cap V$,et donc $A \cap V$ est un voisinage de a dans A. Réciproquement, si V' est un voisinage de a dans A alors il existe un ouvert $A \cap O$ de A (i.e. $O \in \tau$) tel que a $a \in A \cap O \subset V'$. Alors $V = O \cup V'$ vérifie $a \in O \subset V$, donc V est un voisinage de a dans E et on a $V \cap A = (O \cup V') \cap A = (O \cap A) \cup (V' \cap A) = V'$.

Exemple 1.10 *L'intervalle $[0, 1[$ est un ouvert de $[0.2]$ muni de la topologie induite par τ_u(toplogie usuelle), car $[0, 1[=]-1, 1[\cap [0.2]$ et $]-1, 1[\in \tau_u$. Noter que $[0, 1[$ est aussi un fermé de $[-1, 1[$ muni de la topologie induite par τ_u, car $[0, 1[= [0.3] \cap [-1, 1[$ et $[0.3]$ est un fermé de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. En revanche $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

Proposition 1.7 (transitivité de la topologie induite) *Soit (E, τ) un espace topologique et $B \subset A \subset E$ deux parties de E. La topologie induite sur B par celle de E est la même que la topologie induite sur B par la topologie de A induite par celle de E.*

Topologie produit

Soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espaces topologiques.

Définition 1.13 *On appelle ouvert élémentaire de $E_1 \times E_2$ toute partie $w \subset E_1 \times E_2$ de la forme $w = O_1 \times O_2$ où $O_1 \in \tau_1$ et $O_2 \in \tau_2$. La famille formée par les réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée topologie produit.*

Remarque 1.5 *Comme* $E_1 \times E_2$ *et* $\phi = \phi \times \phi$ *sont des ouverts élémentaires et que* $(O_1 \times O_2) \cap (O_1' \times O_2') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2')$, *la famille et bien un topologie sur* $E_1 \times E_2$.

Définition 1.14 *On appelle topologie usuelle sur* $\mathbb{R}^n$ *la topologie obtenue par produit successif de la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.11 *La topologie usuelle sur* $\mathbb{R}^2$ *a pour base d'ouverts les rectangles ouverts .*

Proposition 1.8 *Soit* $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ *alors* $(V_1 \times V_1)_{V_1 \in \mathcal{V}(x_1), V_2 \in \mathcal{V}(x_2)}$ *est un système fondamentale de voisinage de* x *dans* $E_1 \times E_2$. *Plus généralement, si* $\mathcal{B}(x_1)$ *(resp* $\mathcal{B}(x_2)$*) est un système fondamentale de voisinage de* x_1 *(resp de* x_2*) dans* E_1*(resp dans* E_2*), alors* $(V_1 \times V_1)_{V_1 \in \mathcal{V}(x_1), V_2 \in \mathcal{V}(x_2)}$ *est un système fondamentale de voisinage de* x *dans* $E_1 \times E_2$.

Exemple 1.12 *Soit* $\mathbb{R}^2$ *muni de la topologie usuelle et* $x = (x_1, x_2)$.
La famille $(]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ *est un SFV de* x.

Proposition 1.9 *Si* E_1 *et* E_2 *sont séparés alors* $E_1 \times E_2$ *est séparé.*

Exemple 1.13 *La topologie usuelle de* $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ *est éparée.*

Exercise 1.19 *Soient* (E_1, τ_1) *et* (E_2, τ_2) *deux espaces topologiques et* $E = E_1 \times E_2$ *l'espace topologique produit. Montrer que* E *est séparé ssi* E_1 *et* E_2 *sont tous les deux séparés.*

Exercise 1.20 ***Adhérence, intérieur et frontière d'un produit***
Soient E_1 *et* E_2 *deux espaces topologiques,* A *une partie de* E_1, B *une partie de* E_2, *et* C *la partie* $A \times B$ *de l'espace produit* $E = E_1 \times E_2$. *Montrer que*
1. $\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}$,
2. $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$,
3. $Fr(C) = \left(Fr(A) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times Fr(B)\right)$.

1.9 Suites convergentes

Dans toute cette section (E, τ) désigne un espace topologique.

Définition 1.15 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers ℓ (ou tend vers ℓ) lorsque n tend vers $+\infty$, $(n \in \mathbb{N})$ si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.6 1. *Une suite d'un espace topologique peut posséder plusieurs limites. Par exemple, si τ est la topologie grossière sur E alors tout point de E est limite de toute suite d'éléments de E.*
2. *les suites convergentes d'un espace discret sont les suites stationnaires*

Théorème 1.4 *Dans un espace topologique séparé, la limite de toute suite (si elle existe) est unique.*

Preuve. Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique séparé (E, τ) qui possède deux limites différentes ℓ_1 et ℓ_2 $(\ell_1, \ell_2 \in E)$. Comme $\ell_1 \neq \ell_2$ et E est séparé alors il existe $V \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $W \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V \cap W = \phi$. D'autre part, comme ℓ_1 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_1 = n_1(V) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_1 \Rightarrow x_n \in V.$$

De même, comme ℓ_2 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_2 = n_2(W) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_2 \Rightarrow x_n \in W.$$

Il en résulte donc que pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n = \max(n_1, n_2)$, on a $x_n \in V$ et $x_n \in W$; c'est-à-dire $x_n \in V \cap W$. Ce qui est absurde puisque $V \cap W = \phi$.

Définition 1.16 *une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique E est* ***convergente*** *(dans E) s'il existe $\ell \in E$ tel que $x_n \longrightarrow \ell$ lorsque $n \longrightarrow +\infty, n \in \mathbb{N}$; on dit que ℓ est un point limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E.*

Remarque 1.7 *si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subset E$, et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors nécessairement $\ell \in \overline{A}$.*

Définition 1.17 *Si $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$ est une suite d'un espace topologique E, une sous-suite (ou suite extraite) de u est une suite de la forme $u \circ \varphi$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.10 *si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique E converge vers un point limite ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce même point limite ℓ.*

1.9.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.18 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique E. Un élément ℓ de E est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

En particulier, tout point limite d'une suite en est une valeur d'adhérence (réciproque fausse).

Exemple 1.14 *Dans $\mathbb{R}$, 1 est un point isolé de la paire $\{-1, 1\}$, mais est une valeur d'adhérence de la suite $(-1)^n$.*

Exemple 1.15 *Si on a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2(-1)^n$, on peut prendre $E = \{0, 1, 2, -2\}$ et les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 et -2.*

Proposition 1.11 *L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est égal à $\cap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n \mid n \geqslant N\}}$.*

Preuve. ℓ est une valeur d'adhérence de la suite u si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est infini, c'est-à-dire s'il contient des entiers naturels arbitrairement grands, ce qui s'écrit :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \{u_n \mid n \geqslant N\} \cap V \neq \phi$$

ou encore (après interversion des deux $\forall$)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \ell \in \overline{\{u_n \mid n \geqslant N\}}.$$

Proposition 1.12 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique E. S'il en existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (réciproque fausse)*

Exercise 1.21 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Solution 1.10 *Le sens direct est clair. Réciproquement supposons que ℓ soit la seule valeur d'adhérence de (u_n) et que (u_n) ne converge pas vers ℓ. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $p \geq N$ avec $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. On construit alors par récurrence une sous-suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)$ de (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(k)}\right| \geq \ell$. En effet, pour construire $\varphi(0)$, on applique la propriété précédente avec $N = 0$. Supposons $\varphi(0), \cdots, \varphi(n)$ déjà construits. Alors on applique la propriété avec $N = \varphi(n) + 1$ qui nous donne un $p > \varphi(n)$ tel que $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. On pose alors $\varphi(n+1) = p$. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$, suite extraite d'une suite bornée, est elle-même une suite bornée. Elle admet, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite convergente, qui bien sûr ne peut pas converger vers ℓ. Mais cette sous-suite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est encore une suite extraite de (u_n) et donc on a fabriqué pour (u_n) une deuxième valeur d'adhérence : contradiction*!

Exercise 1.22 *Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}.$$

Solution 1.11 *On remarque*

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } u_{2k+1} = 1 + \frac{1}{2k+2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Les réels 1 et -1 sont donc des valeurs d'adhérence de la suite.
Inversement, soit $\left(u_{\varphi(k)}\right)$ une suite extraite de (u_n) et ℓ sa limite. La suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)$ comporte au moins une infinité de termes d'indices pairs de la suite (u_n) ou une infinité de termes d'indices impairs. Dans le premier cas, on peut extraire de $\left(u_{\varphi(k)}\right)$ une suite de limite 1 et donc $\ell = 1$. Dans le second cas, on parvient à $\ell = -1$. La suite (u_n) ne possède donc pas d'autres valeurs d'adhérence que 1 et -1.

Exercise 1.23 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que*

$$u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. *Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi.*
2. *En déduire que (u_n) converge.*

Solution 1.12

1. *Posons*

$$\varepsilon_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $u_{\varphi(k)} \longrightarrow a$ *alors*

$$u_{2\varphi(k)} = 2\varepsilon_{\varphi(k)} - 2u_{\varphi(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2a.$$

Ainsi,

$$a \in \mathrm{Adh}\,(u) \Rightarrow -2a \in \mathrm{Adh}\,(u)\,.$$

2. *Si* (u_n) *possède une valeur d'adhérence* a *autre que* 0 *alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-2)^k a$ *est aussi valeur d'adhérence. Or cela est impossible car* (u_n) *est bornée. Puisque* (u_n) *est bornée et que* 0 *est sa seule valeur d'adhérence possible,*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercise 1.24
1. *Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite* $(-1)^n$? *de la suite* $\cos(n\pi/3)$?
2. *Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.*

Solution 1.13
1. *La suite* $(-1)^n$ *ne prend que les valeurs* 1 *et* -1. *Il est clair que toute suite extraite ne prenant que l'une de ces deux valeurs ne pourra converger que vers* 1 *ou vers* -1. *L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc inclus dans* $\{-1, 1\}$. *D'autre part, en notant* $u_n = (-1)^n$, *on a* $u_{2n} = 1$ *et* $u_{2n+1} = -1$. *Ainsi,* 1 *et* -1 *sont effectivement des valeurs d'adhérence de* (u_n). *Pour la suite* (v_n) *définie par* $v_n = \cos(n\pi/3)$, *le même raisonnement prouve que les valeurs d'adhérence sont* $\cos(0)$, $\cos(\pi/3)$, $\cos(2\pi/3)$, $\cos(\pi)$ *c'est-à-dire* 1, $1/2$, $-1/2$, *et* -1.
2. *Posons* $u_{2n} = 1$ *et* $u_{2n+1} = n$. *Alors* 1 *est valeur d'adhérence, et la suite* (u_n) *est divergente. De plus,* 1 *est l'unique valeur d'adhérence de* (u_n). *En effet, considérons* $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ *une suite extraite de* (u_n). *Si* $\varphi(n)$ *est un entier impair pour une infinité de termes, alors* $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ *est divergente. Sinon,* $\varphi(n)$ *est pair sauf pour un nombre fini d'entiers* n *et* $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ *est stationnaire donc convergente vers* 1.

Exercise 1.25 *Soit* u *une suite réelle telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. *Démontrer que l'ensemble* $\mathrm{Adh}\,(u)$ *des valeurs d'adhérence de* u *est un intervalle.*

Solution 1.14 *Soit* $a < b$ *deux valeurs d'adhérence de* u_n *et* $c \in \left]a, b\right[$. *On va prouver que* c *est aussi une valeur d'adhérence de* u. *Pour cela, fixons* $\varepsilon > 0$. *Il suffit de prouver* *que, pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *il existe* $p \geq N$ *tel que* $u_p \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. *Pour cela, commençons par fixer* $n_0 \geq N$ *tel que, si* $n \geq n_0$, *alors*

$$|u_n - u_{n+1}| \leq \varepsilon.$$

Ce n_0 *étant fixé, on sait qu'il existe* $n_1 \geq n_0$ *tel que* $u_{n_1} \in]-\infty, c[$ *car* a *est valeur d'adhérence de* u. *Ensuite, on sait qu'il existe* $n_2 \geq n_1$ *tel que* $u_{n_2} \in]c, +\infty[$ *car* b *est valeur d'adhérence de* u.
Si $u_{n_1} \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ *alors le problème est réglé. Sinon, on a forcément* $u_{n_1} \leq c-\varepsilon$. *Soit* $p = \min\{n > n_1; u_n \notin]-\infty, c[\}$. *Un tel entier* p *existe car* $u_{n_2} \notin]-\infty, c-\varepsilon[$. *Mais alors, puisque* $p > n_1 \geq n_0$, *on sait que* $u_p - u_{p-1} < \varepsilon$. *Et de plus,* $u_{p-1} \leq c-\varepsilon$. *On en déduit que* $u_p \leq c$ *et comme* $u_p > c-\varepsilon$, *on a bien construit* $p \geq N$ *tel que* $u_p \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. *Donc* c *est bien une valeur d'adhérence de la suite* u.

Exercise 1.26 *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence, dans* $\mathbb{R}$ *puis* $\overline{\mathbb{R}}$ *des suites* u, v *et* w :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = (-2)^n \ \text{ et } u_{2n+1} = \sqrt{2},\ v_n = e^{-n},\ w_{2n} = 1 \text{ et } w_{2n+1} = n.$$

Exercise 1.27 *Soient* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite déterminée par*

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que la suite u *possède une unique valeur d'adhérence* a. *Montrer que la suite* u *converge vers celle-ci.*

1.10 Applications continues

Dans toute cette section (E, τ) et (E', τ') désignent des espaces topologiques.

1.10.1 limites

Définition 1.19 *Soient* E *et* E' *deux espaces topologiques,* A *une partie non vide de* E, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in \overline{A}$ *et* $b \in E'$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a *en restant dans* E *(et on écrit* $\lim_{x \to a} f(x) = b$*) ssi :*

$$\forall W \in \mathcal{V}(b), \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tel que : } f(V \cap A) \subset W.$$

Remarque 1.8 *Dans la définition précédente, on peut remplacer* $\mathcal{V}(b)$ *et* $\mathcal{V}(a)$ *par n'importe quels SFV de* b *et* a.

Définition 1.20 (équivalente à la précédente) *Soit* $f : E \longrightarrow E'$ *une application et soient* $a \in E$ *et* $b \in E'$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a (*et on écrit* $\lim_{x \to a} f(x) = b$)

$$\text{si et seulement si } \forall W \in \mathcal{V}(b) : \; f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Théorème 1.5 *Si* E' *est séparé, la limite, si elle existe, est unique.*

Preuve. Supposons que f admet deux limmites $b \neq b'$ de f en a quand $x \in E$. Comme E' est séparé, il existe des voisinages $W \in \mathcal{V}(b)$ et $W' \in \mathcal{V}(b')$ tels que $W \cap W' = \phi$. Or par hypothèse, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}(a)$ tels que $f(V \cap A) \subset W$ et $f(V' \cap A) \subset W$. On en déduit que $f(V \cap V' \cap A) \subset W \cap W' = \phi$, et donc $V \cap V' \cap A = \phi$. Ceci contredit $a \in \overline{A}$ car $V \cap V'$ est un voisinage de a.

Exemple 1.16 *Si* $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie par* $f(x) = 1/x$, f *n'a pas de limite au point* 0. *Si on considère* f *comme fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$, *alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

1.10.2 Continuité ponctuelle

Définition 1.21 *Soient* E *et* E' *deux espaces topologiques,* $f : E \longrightarrow E'$ *et* $a \in E$. *On dit que* f *est continue en* a *ssi pour tout voisinage* $W \in \mathcal{V}(f(a))$, *il existe* $V \in \mathcal{V}(a)$ *tel que* $f(V) \subset W$, *i.e. ssi* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*On dit que* f *est continue (sur* E*) si elle est continue en tout point de* E.

Exemple 1.17 1. *Toute application constante de* E *dans* E' *est continue en tout point de* E.
2. *Si* E *est discret, toute application de* E *dans* E' *est continue en tout point de* E.
3. *La fonction caractéristique* $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ *est discontinue en tout point de* $\mathbb{R}$.
4. *La fonction* $1_{\mathbb{R}^+}$ *est continue en tout point* $x \in \mathbb{R}^*$ *mais n'est pas continue en* 0.

Proposition 1.13 f *est continue au point* a *si et seulement si l'image réciproque par* f *de tout voisinage de* $f(a)$ *est un voisinage de* a.

Proposition 1.14 *Soient E et E' deux espaces topologiques, f application de E dans E'; les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *l'application f est continue ;*
2. *l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E;*
3. *l'image réciproque par f de tout fermé de E'est un fermé de E;*
4. $\forall A \subset E,\ f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$;
5. $\forall B \subset E',\ \overline{f^{-1}(B)} \subset\ f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

Preuve. ((2) $\iff$ (3)) par passage aux complémentaires et la formule :

$$f^{-1}\left(\complement_{E'}B\right) = \complement_E f^{-1}(B)\ \ (\forall B \subset E').$$

Dans la suite, on utilisera en permanence l'équivalence

$$(f(A) \subset B) \iff \left(A \subset f^{-1}(B)\right).$$

((1) $\iff$ (2)) L'application f est continue si et seulement si, pour tout $a \in E$ et tout ouvert O de E' contenant $f(a)$, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de a, autrement dit si, pour tout ouvert O de E', $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire est ouvert.
((3) $\Rightarrow$ (5)) Si l'image réciproque du fermé $F = \overline{B}$ est fermée alors elle contient non seulement $f^{-1}(B)$ mais son adhérence.
((5) $\Rightarrow$ (4)) Posons $B = f(A)$. Alors, $A \subset f^{-1}(B)$ donc si$f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ contient l'adhérence de $f^{-1}(B)$, il contient celle de A, d'où $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{B}$:
((4) $\Rightarrow$ (3)) Soit F un fermé de E' . Posons $A = f^{-1}(F)$. Comme F est un fermé contenant $f(A)$, il contient aussi son adhérence donc si celle-ci contient $f\left(\overline{A}\right)$ alors $\overline{A} \subset f^{-1}(F)$, c'est-à-dire que l'ensemble $A = f^{-1}(F)$ est fermé.

Exemple 1.18 1. *Si E est un espace topologique et $E' = \mathbb{R}$, alors si f est continue, on a :*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{x \in E \mid \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ est un fermé de } E, \text{ puisqu'il est égale à } f^{-1}([\alpha, \beta]) \\ I_2 &= \{x \in E \mid f(x) > \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ est un ouvert de } E, \text{ puisqu'il est égale à } f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \\ I_3 &= \{x \in E \mid f(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ est un fermé de } E, \text{ puisqu'il est égale à } f^{-1}(\{\alpha\}) \end{aligned}$$

2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application t_a de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $t_a(x) = x + a$ est continue. En effet, tout ouvert $O \in \tau_u$ s'écrit sous la forme $O = \cup_{i\in I}\,]\alpha_i, \beta_i[$,où, pour tout $i \in I$; $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i < \beta_i$. On a donc*

$$t_a^{-1}(O) = \cup_{i\in I} t_a^{-1}(]\alpha_i, \beta_i[) =]\alpha_i - a, \beta_i - a[.$$

Ainsi, $t_a^{-1}(O) \in \tau_u$ *et* t_a *est continue.*
3. *On rappelle que la fonction caractéristique d'une partie* A *de* E *est notée* 1_A *et que c'est la fonction définie sur* E *qui vaut* 1 *sur* A *et* 0 *sur* $\complement_E A$*. La fonction caractéristique* $1_{\mathbb{R}^+}$ *n'est pas continue : l'image réciproque de l'ouvert* $]1/2, 3/2[$ *est* $\mathbb{R}^+$*, ce n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 1.9 *L'image directe d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé). Par exemple*

$$\sin(]-10, 13[) = [-1, 1].$$

Définition 1.22 *Une application est dite* ***ouverte*** *(resp.* ***fermée****) ssi l'image de tout ouvert (resp. de tout fermé) est ouverte (resp. fermée).*

Exemple 1.19 *Soit* E_1 *et* E_2 *deux espace topologiques et* $E_1 \times E_2$ *muni de la topologie produit (dont les ouverts sont les réunions d'ouverts élémentaires). Soit* $\Pi_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ *définie par* $\Pi_1(x_1, x_2) = x_1$*. Alors pour tout ouvert* O *de* $E_1, \Pi_1^{-1}(O) = O \times E_2$ *qui est un ouvert élémentaire de* $E_1 \times E_2$*. Donc* Π_1 *est continue. Montrons que* Π_1 *est ouverte : Soit* O *un ouvert de* $E_1 \times E_2$*, alors* $O = \cup_{i \in I} \Omega_i$*, où les* Ω_i *sont des ouverts élémentaires, donc* $\Pi_1(O) = \cup_{i \in I} \Pi_1(\Omega_i)$*. Or* $\Omega_i = O_{i1} \times O_{i2}$*, où* O_{i1} *est un ouvert de* E_1*, et* $\Pi_1(\Omega_i) = O_{i1}$*, donc* $\Pi_1(O)$ *est un ouvert comme réunion d'ouverts de* E_1*.* Π_1 *est donc bien ouverte.*

1.10.3 Composition d'applications continues

La proposition suivante est presque évidente, mais essentielle : la composition préserve la continuité.

Proposition 1.15 *Soient* $(E, \tau_E), (E', \tau_{E'})$ *et* $(E'', \tau_{E''})$ *trois espaces topologiques,* f *une application de* E *dans* E' *et* g *une application de* E' *dans* E''*.*
1. *Si* f *et* g *sont continues, la composée* $g \circ f$ *est continue.*
2. *Si* f *est continue en un point* $x \in E$*, et si* g *est continue au point* $f(x) \in E'$*, la composée* $g \circ f$ *est continue au point* x*.*

Preuve. 1. Si O est un ouvert de E'', $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de E, par continuité de f et g.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $V \in \mathcal{V}((g \circ f)(x))$, on a $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Soit $V \in \mathcal{V}(g(f(x)))$ et par continuité de f au point x, $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de x, puisque $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x)$, par continuité de g au point $f(x)$.

1.11 Homéomorphisme

Les homéomorphisme sont les isomorphismes de la structeur toplologique, ils permettent d'identifier deux espaces topologiques a priori distincts.

Définition 1.23 *Soient (E, τ_E) et $(E', \tau_{E'})$ deux espaces topologiques. Un* ***homéomorphisme*** *de E dans E' est une application bijective, continue et dont la réciproque est continue. On dit que deux espaces sont* ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

Remarque 1.10 — *La relation "homéomorphe à" est une relation d'équivalence sur la catégorie de tous les espaces topologiques.*
— *La composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme.*

Exemple 1.20 1. *Une translation sur $\mathbb{R}$ est continue, son inverse est une translation, donc est aussi continue et donc c'est un homéomorphisme. De même, les homothéties de $\mathbb{R}$ sont des homéomorphismes. On en déduit que deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. On verra plus loin que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est aussi homéomorphe à $\mathbb{R}$.*
2. *L'application identité d'un espace (E, τ) dans l'espace (E, τ') est un homéomorphisme si et seulement si $\tau = \tau'$.*
3. *f bijection continue $\not\Rightarrow$ f homéomorphisme. Par exemple, l'application $f : [0,1[\cup \{2\} \longrightarrow [0,1]$, définie par $f\mid_{[0,1[} = \mathrm{Id}_{[0,1[}$ et $f(2) = 1$, est continue bijective mais son inverse n'est pas continue en 1.*

Définition 1.24 *Soit un ensemble A vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. On dit que cette propriété est une* ***notion topologique*** *si l'image de A par un homéomorphisme quelconque vérifie encore cette propriété $\mathcal{P}$.*

Exemple 1.21 *Les propriétés suivantes sont des notions topologiques : être ouvert, fermé ou voisinage d'un point ; être séparé ; être l'adhérence, l'intérieur ou la frontière d'un ensemble.*

1.12 Topologie des espaces métriques

E désigne un ensemble non vide.

Définition 1.25 *Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*
(1) $\forall x \in E : \ d(x,x) = 0$
(2) $\forall x, y \in E : \ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie) (en disant que d est symétrique)*
(3) $\forall x, y, z \in E : \ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*
(4) $\forall x, y \in E : \ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ *(axiome de séparation)*

— Le nombre $d(x,y)$ s'appelle distance des points x et y. Un ensemble E muni d'une distance d s'appelle un espace métrique ; on le notera $(E;d)$.

— Si d satisfait les trois premières propriétés $(1), (2)$ et (3) mais pas forcément la quatrième, on dira que d est une **semi-distance** sur E et dans ce cas le couple $(E;d)$ est appelé

espace semi-métrique.

Exemple 1.22 1. *La **distance usuelle** sur $\mathbb{R}$ est une application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d(x,y) = |x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

2. *La **distance usuelle** sur $\mathbb{C}$ est une application $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$$

3. *La **distance discrète (triviale)** sur un ensemble quelconque E est définie par :*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x = y \\ 1 \ \text{si } x \neq y \end{cases} \quad (\forall x, y \in E).$$

4. *Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **distance euclidienne** de $\mathbb{R}^n$, l'application $d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \quad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$$

*constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$ on l'appelle la **distance de Hölder d'exposant** p de $\mathbb{R}^n$ (pour $p = 2$, on remarque que $d_2 = d_e$). L'inégalité triangulaire pour d_p repose sur*

l'inégalité de convexité suivante :
Inégalité de Minkowski : $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *; soit* p *réel,* $p \geqslant 1, (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{k}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Lorsque p *tend vers l'infini on a*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i - y_i|) \ \ (\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

5. *Soient* A *un ensemble et* E *un espace métrique. Soit* $\mathcal{F}(A; E)$ *l'ensemble des fonctions de* A *dans* E*. Alors*

$$d_u(f, g) = \sup_{x \in A} \{\min(1, d(f(x), g(x)))\}$$

est une distance sur $\mathcal{F}(A; E)$ *appelée la* ***distance de la convergence uniforme*** *sur* A *.*
6. *Soit* $I = [a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $E = \mathcal{C}(I; \mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* I*. Alors* $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ *est une distance sur* E *ainsi que* $d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$.

Proposition 1.16 *Soit* E *un ensemble non vide muni d'une distance* d *et* n *un entier strictement positif.*
1. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ d(x_1, x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.
2. $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \geqslant |d(x, z) - d(y, z)|$ *(deuxième inégalité triangulaire).*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+},\ \lambda d$ *est une distance.*

Preuve. Nous ne prouverons que le deuxième point (Les deux autres sont faciles à vérifier). Cette inégalité est importante, et est presque aussi utile que l'inégalité triangulaire. Soient donc x, y et z dans E. L'inégalité triangulaire nous donne $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, ce qui implique que $d(x, y) \geqslant d(x, z) - d(y, z)$. D'autre part, l'inégalité triangulaire nous donne aussi $d(z, y) \leqslant d(z, x) + d(x, y)$, ce qui implique donc que $d(x, y) \geqslant d(y, z) - d(x, z)$; d'où le résultat.

Exercise 1.28
1. *A quelle condition sur la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie par* $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ *est-elle une distance sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Les applications suivantes définies par :*

$\delta_1(x, y) = |\sin x - \sin y|,\ \delta_2(x, y) = |x^2 - y^2|\ ,\ \delta_3(x, y) = |x^3 - y^3|,\ \delta_4(x, y) = \log(1 + |x + y|)$

sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

3. *Montrer que l'application suivante*

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$$

définie une distance sur $\mathbb{R}$.

Solution 1.15

1. *L'application définie par $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction f est une injective.*

2. *δ_1 n'est pas une distance car la fonction f définie par $f(x)=\sin x$ elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour δ_2 avec $f(x)=x^2$, par contre pour δ_3 car la fonction f définie par $f(x)=x^3$ est une injective sur $\mathbb{R}$.*

3. *On suppose $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$. Il est facile de voir que f est une fonction monotone continue sur $\mathbb{R}$ et cela prouve que d est une distance.*

Exercise 1.29 *Démontrer que l'application $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définie une distance sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.16 *On a clairement $d(x,y)=d(y,x)$ et $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$. La seule difficulté est de démontrer l'inégalité triangulaire. Prenons donc $x,y,z\in\mathbb{R}$. Le point de départ est de remarquer que la fonction $f:[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ définie par*

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

est croissante. En particulier, en utilisant aussi l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$d(x,z)=f\left(|x-z|\right)\leq f\left(|x-y|+|y-z|\right)\ \ (car\ \ |x-z|\leq|x-y|+|y-z|)\,.$$

Mais,

$$\begin{aligned}
f\left(|x-y|+|y-z|\right) &= \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\
&= \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\
&\leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}\\
&\leq d(x,z)+d\left(y,z\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré que

$$d(x,z)\leq d(x,z)+d\left(y,z\right).$$

Exercise 1.30 *Soit (E, d) un espace métrique*

1. *Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$, l'application d^α définie une distance sur E.*
2. *Montrer qu'il existe $\alpha^* = \alpha(d) \in [1, +\infty]$ tel que*

· *si $0 < \alpha < \alpha^*$, alors d^α est une distance sur E*

· *si $\alpha > \alpha^*$, alors d^α n'est pas une distance sur E.*

3. *Déterminer α^* dans le cas où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, puis la distance discrète.*

Solution 1.17

1. *On a $d^\alpha = \phi \circ d$, où $\phi(t) = t^\alpha$. Montrons que, pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+$*

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$$

ou encore

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^\alpha \leq 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha.$$

A cet effet, on pose $f(t) = (1+t)^\alpha - (1 + t^\alpha)$, $t \geq 0$. On a

$$f'(t) = \alpha\left((1+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right).$$

Comme $\alpha - 1 \leq 0$, $t \leq 1 + t$, $(1+t)^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}$; si bien que f est décroissante. Comme $f(0) = 0$, f est positive. Donc on peut conclure que d^α est une distance sur E.

2. *On pose*

$$I = \{\alpha > 0 \mid d^\alpha \text{ est une distance dans } E\}.$$

D'après la première question, on a l'inclusion $]0, 1] \subset I$. Montrons que I est un intervalle. Soit $\alpha \in I$ et $0 < \beta < \alpha$, il s'agit de prouver que $\beta \in I$. Puisque d^α est une distance et puisque $\beta/\alpha < 1$ alors $d^\beta = (d^\alpha)^{\beta/\alpha}$ est aussi une distance sur E. Donc I est bien un intervalle et il suffit de poser $\alpha^* = \sup I$.

3. *Dans le premier cas $\alpha^* = 1$, dans le deuxième cas $\alpha^* = +\infty$.*

Exercise 1.31 *Soit (E, d) un espace métrique et $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application croissante, vérifiant*

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b), \forall a, b \in \mathbb{R}_+.$$

1. *Montrer que $d' = \phi \circ d$ est une distance sur E.*
2. *Montrer que*

$$d_1 = \frac{d}{1+d},\ d_2 = \log(1+d)$$

sont des distances sur E.

Solution 1.18

1. *Posons* $d' = \phi \circ d$*. On a*

- $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow \phi(d(x, y)) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d'(x, y) = \phi(d(x, y)) = \phi(d(y, x)) = d'(y, x)$.
- *Puisque* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *on en déduit facilement que*

$$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z).$$

Ainsi, d' *est une distance sur* E.

2. *On a* $d_1 = \phi_1 \circ d$, *avec* $\phi_1(t) = t/(1 + t)$. *On a pour tous* $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \phi_1(a + b) &= \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \\ &\leq \phi_1(a) + \phi_1(b). \end{aligned}$$

De plus, ϕ_1 *est croissante et injective. Ce la montre alors que* d_1 *est une distance. De même,* $d_2 = \phi_2 \circ d$, *avec* $\phi_2(t) = \log(1 + t)$. *On vérifie facilement que* ϕ_2 *est croissante, injective et que*

$$\phi_2(a + b) \leq \phi_2(a) + \phi_2(b), \; a, b \in \mathbb{R}_+.$$

D'après la première question, d_2 *est aussi une distance sur* E.

1.12.1 Boules, sphère

Définition 1.26 *Soit* (E, d) *un espace métrique. Soit* $x \in E$ *et* $r > 0$. *L'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

s'appelle ***boule ouverte*** *de centre* x *et de rayon* r. *L'ensemble*

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leqslant r\}$$

s'appelle ***boule fermée*** *de centre* x *et de rayon* r. *L'ensemble*

$$S(x, r) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$$

s'appelle ***sphère*** *de centre* x *et de rayon* r.

Exemple 1.23

1. *Soit* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $r > 0$, *on a* $B(x, r) = \{y \in E : |x - r| < r\} =]x - r, x + r[$. *Réciproquement, pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $]a, b[=$

$B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ *(et le centre et le rayon sont uniques). Donc les boules ouvertes de* $\mathbb{R}$ *sont exactement les intervalles ouverts et bornés de* $\mathbb{R}$*. De même l'ensemble des boules fermées coïncide avec les intervalles fermés et bornés de* $\mathbb{R}$*.*

2. *Soit* $\mathbb{R}$*, muni de la distance* $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$*. Les boules ouvertes de* $\overline{\mathbb{R}}$ *sont les ensembles suivants* $]a,b[\,,]a,+\infty[\,,]a,+\infty]\,,]-\infty,a[\,, [-\infty,a[\,, \mathbb{R}$ *et* $\overline{\mathbb{R}}$ *(où* a *et* b *sont des réels). Notez que pour les ensembles* $]a,+\infty]$ *et* $[-\infty,a[$ *il n'y pas unicité du centre et du rayon permettant de les écrire comme des boules ouvertes de* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

3. *Dans l'espace à deux dimensions* $\mathbb{R}^2$*, pour les trois distances qui suivent, les boules de rayon* $r > 0$ *et de centre* $O(0,0)$ *correspondantes ont des formes différentes.*

· *la distance 1 :* $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

· *la distance euclidienne :* $\|x\|_1 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$

· *la distance uniforme :* $\|x\|_\infty = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

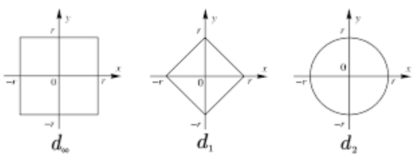


FIGURE 1

1.12.2 Caractérisation des voisinages et des ouverts d'un espace métrique

Définition 1.27 *Soit* (E,d) *un espace métrique. Un ensemble* $O \subset E$ *est dit ouvert si pour tout* $x \in O$*, il existe* $r_x > 0$ *tel que* $B(x,r_x) \subset O$*.*

Proposition 1.17

1. *Une boule ouverte de* E *est toujours un ouvert de* E*.*
2. *Une boule fermée de* E *est toujours un fermé de* E*.*

Preuve. 1. Soit $B(x,r)$ une boule ouverte et $y \in B(x,r)$. Alors $d(x,y) < r$. Soit $r_y > 0$ tel que $r_y < r - d(x,y)$. Alors si $z \in B(y,r_y)$ on a

$$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < r_y + d(y,x) < (r - d(x,y)) + d(y,x) = r.$$

Donc $z \in B(x,r)$. Ainsi $B(y,r_y) \subset B(x,r)$.

2. Soit $y \in E \setminus \overline{B}(x,r)$, alors $d(x,y) > r$. Soit $\delta = d(x,y) - r$ et $z \in B(y,\delta)$ alors, $d(z,y) < \delta$. En utilisant l'inégalité triangulaire et on obtient

$$d(z,x) \geqslant d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - \delta = r.$$

D'où $z \in E \setminus \overline{B}(x,r)$ et $B(y,\delta) \subset E \setminus \overline{B}(x,r)$. Ainsi $E \setminus \overline{B}(x,r)$ est un ouvert.

Proposition 1.18 *Soit (E,d) un espace topologique et soit $x \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un voisinage de x et on note $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$.*

Preuve. Si V est un voisinage de $x \in E$, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Par définition des ouverts des espaces métriques, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Dans le sens inverse si $B(x,r) \subset V$, alors on prend $O = B(x,r)$.

Proposition 1.19 *Si (E,d) est un espace métrique alors on a :*
1. *Tout point $x \in E$ admet une base dénombrable de voisinages*

$$\left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2. $\left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*, x \in E\right\}$ *est une base d'ouverts de (E,d).*

Exercise 1.32 *Soit E un ensemble. On définit d sur $E \times E$ par :*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \ si\ x = y \\ 1 \ si\ x \neq y \end{cases}.$$

1. *Démontrer que d est une distance.*
2. *Déterminer $B(x,r)$ où $x \in E$ et $r > 0$.*
3. *En déduire les ouverts et les fermés de (E,d).*

Solution 1.19
1. *On vérifie simplement les trois axiomes :*
$d(x,y) = d(y,x)$.
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Si $x = z$ alors $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$. Si $x \neq z$ alors on a $x \neq y$ ou $z \neq y$ et donc $d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$.
2. *Si $r > 1$, alors on a pour tout $y \in E$, $d(x,y) < r$. Dans ce cas,*

$$B(x,r) = E.$$

Si $r \in]0,1]$, alors on a $d(x,y) < r \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Dans ce cas,

$$B(x,r) = \{x\}.$$

3. *Tous les parties de E sont ouvertes ! En effet,si $A \subset E$ et $x \in A$, alors $B\left(x,\frac{1}{4}\right) \subset A$. Par passage au complémentaire, toutes les parties de E sont également fermées.*

Exercise 1.33 *Soit* $E =]0, +\infty[$. *Pour* $x, y \in E$, *on note*

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. *Démontere que* d *est une distance sur* E.
2. *Déterminer* $B(1,1)$ *pour cette distance.*
3.*La partie* $A =]0,1]$ *est-elle bornée pour cette distance? fermées?*
4. *Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.*

Solution 1.20
1. d est une distance. En effet, on a :
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = d(x,y) + d(y,z)$.
$d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
L'espace (E,d) *est donc un espace métrique.*
2. *Soit* $x > 0$. *On a* $x \in B(1,1)$ *si et seulement si* $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 1$. *On résout cette inéquation :*

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - 1\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1}{x} - 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x > 2. \end{aligned}$$

On a donc

$$B(1,1) =]2, +\infty[.$$

3. *La partie* A *n'est pas bornée. Fixons en effet* $\alpha > 0$ *et remarquons que, pour* $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in A$. *Mais,*

$$d\left(\alpha, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{\alpha} - n\right| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi, A *n'est contenue dans aucune boule* $B(\alpha, r)$ *et donc* A *n'est pas bornée. Démontrons ensuite que* A *est fermée. Soit* (x_n) *une suite de* A *qui converge, pour la distance* d, *vers* $\ell > 0$. *Ceci signifie que la suite* $(1/x_n)$ *tend vers* $1/\ell$ *pour la notion usuelle de convergence. Par passage à l'inverse, la suite* (x_n) *tend vers* ℓ *et donc, puisque* $x_n \in]0,1]$ *pour tout* n, *c'est aussi le cas de* ℓ. *Comme de plus* $\ell \neq 0$, *on a bien* $\ell \in A$.

4. *Soient* x_0 *un élément fixé de* E *et* $r > 0$. *Déterminons la boule ouverte* $B(x_0, r)$. *On a*

$$\begin{aligned} x \in B(x_0, r) &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < r \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + r. \end{aligned}$$

On veut passer à l'inverse, mais on doit prendre garde à ce que tout soit positif et on doit donc distinguer deux cas. Le premier cas est celui où $r \geq \frac{1}{x_0}$. *L'inégalité de gauche n'apporte pas d'informations puisque l'on sait que* $x > 0$. *On a donc*

$$\begin{aligned} x \in B(x_0, r) &\Leftrightarrow x > \frac{1}{\frac{1}{x_0} + r} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{x_0}{1 + r x_0}. \end{aligned}$$

Si maintenant $r < \frac{1}{x_0}$, *alors*

$$\begin{aligned} x \in B(x_0, r) &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_0} + r} < x < \frac{1}{\frac{1}{x_0} - r} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0}{1 + r x_0} < x < \frac{x_0}{1 - r x_0}. \end{aligned}$$

En résumé, on a prouvé que

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \left] \frac{x_0}{1 + r x_0}, +\infty \right[, & si\ r \geq \frac{1}{x_0} \\ \left] \frac{x_0}{1 + r x_0}, \frac{x_0}{1 - r x_0} \right[, & si\ r < \frac{1}{x_0} \end{cases}.$$

1.12.3 Topologie associée à une distance

Proposition 1.20 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* O *une partie non vide de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1. O *est réunion de boules ouvertes,*
2. *pour tout* $x \in O$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset O$.

Preuve. $(2) \Rightarrow (1)$ Pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset O$, et donc $\cup_{x \in O} B(x, r_x) \subset O$. Comme $x \in B(x, r_x)$ pour tout $x \in O$, on a aussi $O \subset \cup_{x \in O} B(x, r_x)$.
$(1) \Longrightarrow (2)$ Si $O = \cup_{i \in I} B(x_i, r_i)$, alors pour tout $x \in O$, il existe $i \in I$ tel que $x \in B(x_i, r_i)$. Pour $r = r_i - d(x, x_i)$, on a $B(x, r) \subset B(x_i, r_i) \subset O$.

Théorème 1.6 *L'ensemble des parties de* E *vérifiant les propriétés* (1) *ou* (2) *de la proposition précédente, définit une topologie sur* E. *On l'appelle* ***topologie associée à la distance*** d.

Preuve. Soit τ_d= {ensembles des parties de E vérifiant (1) ou (2)} . Il s'agit de montrer que la famille τ_d de parties de E satisfait les trois axiomes de Hausdorff.
i. L'ensemble vide peut être considéré comme une réunion vide de boules ouvertes de E c-à-d $\cup_{i\in\phi}B(x_i,r)=\phi$; d'où $\phi\in\tau_d$. Quant à l'ensemble E, il est la réunion de toutes les boules ouvertes de E; d'où $E\in\tau_d$.
ii. Soit $(O_1,\ldots,O_k)\in\tau_d^k$ et $x\in\cap_{1\leqslant k\leqslant k}O_i$. Il existe $r_i>0$ tel que $B(x,r_i)\subset O_i$. Alors $B(x,\min_{1\leqslant i\leqslant k}(r_i))\subset\cap_{1\leqslant k\leqslant k}O_i$. D'après la proposition précédente on en déduit que $\cap_{1\leqslant k\leqslant k}O_i$ est réunion de boules ouvertes, d'où la stabilité par intersection finie.
iii. Pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de E, appartenant à τ_d, l'ensemble $\cup_{i\in I}O_i$ est une réunion de réunions de boules ouvertes de E; c'est donc une réunion de boules ouvertes de E. D'où $\cup_{i\in I}O_i\in\tau_d$.

Définition 1.28 *Un espace topologique (E,τ) est dit **métrisable** s'il existe une métrique d sur E telle que la topologie associée à d soit égale à τ.*

Exemple 1.24
1. *La topologie associée à la distance triviale est la topologie discrète.*
2. *La topologie associée à la distance usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie usuelles de $\mathbb{R}$. Il existe d'autres distances sur $\mathbb{R}$ dont la topologie associée est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (par exemple $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$).*

1.12.4 Distance d'un point à un ensemble, d'un ensemble à un autre, diamètre

Définition 1.29 *Soient (E,d) un espace métrique. Soit A et B des sous-ensembles non vides de E et x un élément de E;*
*a) on appelle **distance de** A **à** B et on note $d(A,B)$ le réel positif défini par*

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}d(a,b);$$

*b) on appelle **distance de** x **à** A et on note $d(x,A)$ le réel positif défini par*

$$d(x,A)=\inf_{a\in A}d(x,a);$$

*c) on appelle **diamètre de** A et on note $\delta(A)$ l'élément de $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ défini par*

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}d(x,y).$$

On dit que A ***est borné*** *si et seulement si*

$$\delta(A) < +\infty$$

et si et seulement si

$$\forall a \in E, \exists r > 0,\ A \subset B(a, r).$$

Remarque 1.11 1. *Bien faire attention que, malgré son nom, la distance entre ensembles n'est absolument pas une distance!! Par exemple si on prend $A = \{2\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \left\{\frac{1}{n+1} + 2, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ on a $d(A, B) = 0$ tandis que $A \neq B$.*
2. *le diamètre d'une boule $B(a, r)$ est majoré par $2r$.*
3. *On a aussi $d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{y \in B} d(y, A)$.*

Proposition 1.21 *Soient A et B deux parties d'un espace métrique. Alors, on a :*
1. $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \subset \delta(B)$.
2. $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.

Définition 1.30 *Soient Λ un ensemble non vide,(E, d) un espace métrique et $f : \Lambda \longrightarrow E$ une application. On dit que f est bornée si son image $f(\Lambda)$ est une partie bornée de l'espace métrique E.*

1.12.5 Applications lipschitziennes et Applications contractantes

Définition 1.31 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une application $f : E \longrightarrow E'$ entre deux espaces métriques est dite $k-$**lipschitzienne**, pour un certain réel $k \geqslant 0$, si*

$$\forall x, y \in E,\ d'(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

S'il existe de tels k alors le plus petit d'entre eux existe et est appelé la constante de Lipschitz de f (ou rapport de Lipschitz de f).

· *On dit que f est* ***bilipschitzienne*** *si elle est bijective et chacune des deux applications f et f^{-1} est lipschitzienne.*

· *On dit que f est* ***contractante*** *si elle est lipschitzienne de rapport inférieur strictement à 1.*

Définition 1.32 (Isométries) *Soient (E, d) et $(E^{'}, d')$ deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ une application. On dit que f est une* ***isométrie*** *si :*

$$\forall x, y \in E,\ d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

En d'autre termes : une isométrie est une application qui conserve les distances.
— toute application isométrique (c'est-à-dire vérifiant $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$) est $1-$lipschitzienne, donc toute isométrie (c'est-à- dire toute bijection ou surjection isométrique) est un homéomorphisme.

Exemple 1.25 *Si $\mathbb{C}$ est muni de la distance usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la distanced_2, alors l'application $f(x, y) = x + iy$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.*

Proposition 1.22 *L'application distance d'un point à une partie A non vide, définie de E dans $\mathbb{R}$ par*

$$x \longmapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

est $1-$lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

Preuve. Pour x, y fixés de E, soient $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(a) = d(x, a) \text{ et } g(a) = d(x, y) + d(y, a).$$

De $f \leqslant g$ on en déduit que $\inf_{a \in A} f(a) \leqslant \inf_{a \in A} g(a)$, c'est-à-dire $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Même chose en échangeant x et y, autrement dit : $d(x, y)$ majore à la fois la différence $d(x, A) - d(y, A)$ et son opposée. Il majore donc la valeur absolue.

1.12.6 Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes

Définition 1.33 · *Soit E un ensemble, d et d' deux distances sur E. On dit que d et d' sont* ***topologiquement équivalentes*** *si et seulement si les topologies associées à d et d' coïncident (si elles définissent la même topologie ; c'est-à-dire si $\tau_d = \tau_{d'}$).*
· *On dit que deux distances d et d' sont* ***métriquement équivalentes*** *ou* ***équivalentes*** *si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha d'(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \beta d'(x, y)$ pour tout $x, y \in E$.*

Remarque 1.12 *·Des distances d et d' métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*
·La réciproque est fausse : on peut trouver des distances d et d' topologiquement équivalentes qui ne sont pas métriquement équivalentes

Proposition 1.23 *Soit E un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur E. Alors d et d' sont équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est bilipschitzienne. Aussi, d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est un homéomorphisme.*

Preuve. Nous vérifions la première assertion de la proposition. L'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $k > 0$ tel que :

$$d'(x,y) \leqslant kd(x,y).$$

De même, son application inverse $\mathrm{Id}_E^{-1} : (E,d') \longrightarrow (E,d)$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $k' > 0$ tel que :

$$d(x,y) \leqslant k'd'(x,y).$$

On obtient que l'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est bilipschitzienne si et seulement s'il existe $k, k' > 0$ tels que :

$$\frac{1}{k'}d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant kd(x,y).$$

Ce qui équivaut au fait que d et d' sont équivalentes.
Maintenant la seconde assertion de la proposition. L'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E,d') est un ouvert de (E,d) ; ce qui revient simplement à dire (puisque Id_E est l'identité) que $\tau_{d'} \subset \tau_{d'}$. On montre de la même façon que l'application inverse de $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est continue ssi $\tau_d \subset \tau_{d'}$. En regroupons les deux inclusions, on obtient que $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est un homéomorphisme ssi $\tau_d = \tau_{d'}$; c'est-à-dire ssi d et d' sont topologiquement équivalentes.

Exemple 1.26 *Soit (E,d) est un espace métrique, alors*

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

est une distance sur E, bornée et topologiquement équivalente à d.

Exemple 1.27 *Soit p un entier $\geqslant 1$; on définit les trois distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\Bbbk^p$ par :*

$$\forall x, y \in \Bbbk^p : d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i| \ , d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \ , \ d_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i - y_i|$$

alors les distances d_1, d_2 et d_∞ définies sur $\Bbbk^p$ vérifient

$$\forall x, y \in \Bbbk^p, \ d_\infty(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \sqrt{p} d_2(x,y) \leqslant p d_\infty(x,y).$$

Ainsi les distances d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes donc topologiquement équivalentes.
Indication : pour montrer que $d_1(x,y) \leqslant \sqrt{p} d_2(x,y)$, on utilise l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz****, on a*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{p} d_2(x,y).$$

1.12.7 Caractérisations séquentielles

Limite d'une suite

Soit (E, d) un espace métrique. Rappelons que pour tout $x \in E$, la famille $B(\ell, \epsilon)_{\epsilon > 0}$ est un **SFV** de x dans E, on peut réécrire la définition de la limite d'une suite dans un espace métrique.

Proposition 1.24 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon.$$

Preuve. $\Rightarrow$ / Supposons que ℓ est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. D'après la définition d'une suite convergente au dessus, pour tout $\epsilon > 0$ la boule ouverte $B(\ell, \epsilon)$ est une voisinage de ℓ, alors il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\epsilon, \ x_n \in B(\ell, \epsilon)$. C-à-d

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$ / Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\epsilon, \ d(x_n, \ell) < \epsilon$. On suppose que V un voisinage de ℓ $(V \in \mathcal{V}(\ell))$. Alors il existe un ouvert $B(\ell, r)_{r>0} \subset V$. On prend par exemple $\epsilon = r/2$, Par hypothèse, facilement nous pouvons trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N; \ d(x_n, \ell) < \epsilon$. Donc on a trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ x_n \in B(\ell, \epsilon) \subset B(\ell, r)_{r>0} \subset V,$$

ce dernier est vrai pour chaque voisinage de $V \in \mathcal{V}(\ell)$ et prouve que ℓ est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .Comme un espace métrique est séparé, la limite d'une suite est unique quand elle existe.

Points adhérents, parties fermées

Définition 1.34 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est* ***adhérent*** *à A si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \ B(a, \epsilon) \cap A \neq \phi,$$

ou

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, d(x, a) < \epsilon.$$

Exemple 1.28 *Par exemple, pour $A =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, on a 0 et 1 qui sont dans $\overline{A}$. Car pour tout $\epsilon > 0$,les deux boules $B(0, \epsilon) =]-\epsilon, +\epsilon[$, $B(1, \epsilon) =]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ rencontrent A.*

Proposition 1.25 *Soient $(E; d)$ un espace métrique, A un sous-ensemble non vide de E et x un élément de E. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
1. $x \in \overline{A}$;
2. $d(x, A) = 0$;
3. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Preuve. Pour vérifier l'équivalence entre les trois assertions, il suffit de montrer que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.
$(1) \Rightarrow (2)$ Si $x \in \overline{A}$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ rencontre A, i.e il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \frac{1}{n}$, donc $d(x, A) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit $d(x, A) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
$(2) \Rightarrow (3)$ Si $d(x, A) = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ étant un voisinage de x, il intercepte A. Soit $a_n \in A \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A telle que $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$, i.e. une suite de points de A qui tend vers x.
$(3) \Rightarrow (1)$ On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x$; alors par définition on en déduit que $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \Rightarrow d(a_n, x) < \epsilon$, d'où $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \Rightarrow a_n \in B(x, \epsilon)$. En particulier $B(x, \epsilon) \cap A \neq \phi$ pour tout $\epsilon > 0$ et ce la montre que $x \in \overline{A}$.

Remarque 1.13 *Il est possible (et facile) de montrer que les points adhérents à A peuvent être classés en deux types différents :*
1. *On dit que $x \in E$ est un* **point d'accumulation** *de A si pour tout $r > 0$, l'ensemble $B(x, r) \cap A \neq \phi$.*
2. *On dit que $x$est un* **point isolé** *de A s'il existe $r > 0$, tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.*

Proposition 1.26 *Soit $(E;d)$ un espace métrique, A une partie de E. A est **fermée** si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, si (a_n) converge dans E alors (a_n) converge dans A. Autrement dit*

$$A \text{ est un ferme de } E \Longleftrightarrow \left(\forall \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x \in A\right).$$

Preuve. $\Rightarrow$ / Si A est fermé alors $\overline{A} \subset A$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers un point $x \in E$, alors d'après la proposition précédénte $x \in \overline{A}$, donc $x \in A$. $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, alors x est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A donc $d(x, A) = 0$. D'où $x \in A$, i.e. $\overline{A} = A$.

Exercise 1.34 *Soit F une partie fermée d'un espace métrique E. On suppose que $d\left(x, F\right) = 0$. Démontrer que $x \in F$.*

Solution 1.21
Puisque $d\left(x, F\right) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell \in F$ tel que $d\left(x, \ell\right) \leq \varepsilon$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, notons $x_n \in F$ tel que

$$d\left(x, x_n\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Alors (x_n) est une suite d'éléments de F qui converge vers ℓ. Comme F est fermé, on en déduit que $\ell \in F$.

1.12.8 Continuité uniforme

Définition 1.35 *Soient (E, d) et (E', δ) des espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ une application.*
*On dit que f est **continue** en un point x_0 de E si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E : d\left(x, x_0\right) < \eta \Rightarrow \delta\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) < \epsilon.$$

Définition 1.36 *Soient (E, d) et (E', δ) des espaces métriques ; une application f de E dans E'est **uniformément continue** sur E si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in E : d\left(x, x'\right) < \eta \Rightarrow \delta\left(f\left(x\right), f\left(x'\right)\right) < \epsilon.$$

Une application uniformémenr continue sur E est continue en tout point de E; la réciproque est fausse : ainsi les seules fonctions polynomiales réelles uniformément continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions affines.

Exemple 1.29 1. *l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$ *n'est pas uniformément continue malgré sa continuitée usuelle.*
2. *une application* $f : (E, d) \longrightarrow (E', \delta)$ *lipschitzienne sur* E *est uniformément continue sur* E.

Proposition 1.27 *Soient* (E, d), (E', d') *et* (E'', d'') *trois espaces métriques et soient* $f : E \longrightarrow E'$ *et* $g : E' \longrightarrow E''$ *deux applications. Si* f *est uniformément continue sur* E *et* g *est uniformément continue sur* E' *alors* $g \circ f$ *est uniformément continue sur* E.

La démonstration est un exercice facile laissé au soin du lecteur!

Exercise 1.35 *Si* f *est uniformément continue de l'espace métrique* E *dans l'espace métrique* F, *montrer que toute suite de Cauchy de* E *est transformée par* f *en une suite de Cauchy de* F.

Solution 1.22 *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy de* E *et soit* $\varepsilon > 0$. *Puisque* f *est uniformément continue, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tous* $x,\ x_0 \in E$

$$d(x,\ x_0) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), (x_0)) \leq \varepsilon.$$

Et puisque $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $n, p \in \mathbb{N}$

$$n,\ p \geq N \Longrightarrow d(x_n,\ x_p) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x_n), (x_p)) \leq \varepsilon$$

Donc $(f(x_n))_n$ *est une suite de Cauchy de* F.

1.13 Espaces métriques séparables

Définition 1.37 *On dit qu'un espace métrique* (E, d) *est séparé si pour tout couple de points* $x, y \in E$ *distincts,* $x \neq y$, *s'il existe deux réels* r, r' *strictement positifs tels que*

$$B(x, r) \cap B(y, r') = \phi.$$

Proposition 1.28 *Un espace métrique est séparé.*

Preuve. Soit (E, d) un espace métrique. Soit x, y deux points distincts de E. On pose $r = d(x, y) > 0,\ V = B\left(x, \frac{r}{3}\right)$ et $W = B\left(y, \frac{r}{3}\right)$.
Si $z \in V \cap W$, alors on a

$$r = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

ce qui est impossible pour $r > 0$. On a donc $B\left(x, \frac{r}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{3}\right) = \phi$.

Proposition 1.29 *Si (E,d) est un espace topologique séparé toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une limite. Si une telle limite $\ell \in E$ existe, on dit que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ) lorsque n tend vers l'infini.*

Preuve. On raison par l'absurde, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait deux limites distinctes $\ell \neq \ell'$. Comme (E,d) est séparé, il existe $B(\ell,r) \in \mathcal{V}(\ell)$ et $B(\ell',r') \in \mathcal{V}(\ell')$ tels que $B(\ell,r) \cap B(\ell',r') = \phi$. D'aprés la proposition 1.24, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$\forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant n_1 : u_n \in B(\ell,r) \text{ et } \forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant n_2 : u_n \in B(\ell',r').$$

Ce dernier implique que $\forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant \max(n_1,n_2) : u_n \in B(\ell,r) \cap B(\ell',r') = \phi$ d'où la contraduction.

1.13.1 Exercices

Exercise 1.36
Partie 1 : *On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$*

$$d_2(x,y) = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que le demi-plan $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que toute droite de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.*

Partie 2 : *Montrer que $\delta(x,y) = \max(|x_i - yi|)$ définie une distance sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les boules ouvertes de centre $C(1,1)$ et rayon $r \in \mathbb{R}$.*
Partie 3 : *Soit l'application ∂ définie par :*

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Montrer que ∂ une distance sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule ouverte de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon 2.

Exercise 1.37 *On note par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose*

$$d(u,v) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{|u_n - v_n| + 1}$$

1. *Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ est borné.*

Chapitre 2

Espaces compacts

2.1 Espace topologique compact

Définition 2.1 (recouvrement ouvert, sous-recouvrement fini)
· Un recouvrement ouvert d'un espace topologique E est une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $\cup_{i\in I} O_i = E$.
· Un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i\in I}$ est une sous-famille finie $(O_j)_{j\in J}$ fini (J fini $\subset I$) qui est encore un recouvrement (ouvert) de E.

Exemple 2.1 **1**. *La famille des ouverts $]-n,n[$ où n parcourt $\mathbb{Z}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue. Il es est de même pour la famille des ouverts $]n-1,n+1[$ où n parcourt $\mathbb{Z}$.*
2. *La famille des ouverts $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1-\frac{1}{n}\right\}$ où n est un entier naturel non nul est un recouvrement de la boule unité ouverte, centrée en $(0,0)$.*

Définition 2.2 (espace compact, partie compacte)
· Un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et si pour tout recouvrement ouvert de E, il existe un sous-recouvrement fini.
· Une partie A de E est dite compacte si l'espace topologique A (muni de la topologie induite) est compact.

Exemple 2.2 **1**. *Si un ensemble est muni d'une topologie qui ne compte qu'un nombre fini d'ouverts, alors l'espace topologique correspondant est clairement compact. En particulier, tout ensemble muni de la topologie triviale est compact de même que tout ensemble fini (pour n'importe quelle topologie).*

2. *Un ensemble X muni de la topologie discrète est compact si et seulement s'il est fini. En effet, si X est fini, alors il est compact par l'exemple ci-dessus. Réciproquement, si X est infini, alors $U = \{\{x\}, x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Ainsi, X n'est pas compact.*

Remarque 2.1 *La propriété des recouvrements dans la définition de la compacité s'appelle la propriété de* ***Borel-Lebesgue****. Un espace non nécessairement séparé qui la vérifie est dit* ***quasi-compact****.*

Proposition 2.1 *Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.*

Preuve. Soit A une partie compacte d'un espace topologique séparé E ; montrons que A est fermé, c-à-d que $E \setminus A$ est un ouvert autrement dit $E \setminus A$ est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $x \in E \setminus A$. Puisque E est séparé, pour chaque $y \in A$ il existe des voisinages ouverts disjoints U_y et V_y respectivement de y et x. La famille $(U_y)_{y\in A}$ forment un recouvrement d'ouverts pour A, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_y)_{y\in J}$ (car A est compact).

$\underset{y\in J}{\cap} V_y$ est un voisinage ouvert de x car J est fini.

$\left(\underset{y\in J}{\cap} V_y\right) \cap \left(\underset{y\in J}{\cup} U_y\right) = \phi$ et $A \subset \underset{y\in J}{\cup} U_y$ on en déduit que $\underset{y\in J}{\cap} V_y \subset E \setminus A$. Par conséquent $E \setminus A$ est un voisinage de x. Nous avons établi que $E \setminus A$ est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert, et par conséquent A est fermé.

Proposition 2.2 *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

Preuve. Soient E un espace compact et A une partie fermée de E; montrons que A est un compact. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E dont la réunion contient A.

Alors, A étant fermé, $(E \setminus A) \cup \left(\underset{i\in I}{\cup} O_i\right)$ est un recouvrement de E par des ouverts. Puisque E est compact, il existe donc un sous-recouvrement fini de E, autrement dit il existe alors une partie finie J de I telle que $E = (E \setminus A) \cup \left(\underset{i\in J}{\cup} O_i\right)$, si bien que $A \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$.

Exercise 2.1 *Montrer que dans un espace séparé :*

1. *toute union finie de parties compactes est compacte.*
2. *toute intersection d'une famille non vide de parties compactes est compacte.*

Solution 2.1 *Soit E un espace topologique.*
1. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties compactes de E et A leur réunion. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E dont la réunion contient A. Alors, pour tout $1 \leq k \leq n$, $A_k \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$, donc il existe une partie finie $J_k \subset I$ telle que $A_k \subset \underset{i\in J_k}{\cup} O_i$. L'ensemble $J = \underset{1\leq k\leq n}{\cup} J_k$ est alors fini, et $A \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i$, ce qui prouve que A est compact.*
2. *Supposons E un espace topologique séparé. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ une famille non vide de parties compactes de E, $F = \underset{1\leq k\leq n}{\cap} F_k$. Dans E, tous les F_k $(1 \leq k \leq n)$ sont fermés (comme parties compactes d'un espace séparé) donc F est fermé.*
tel que $F \subset F_k$ $(1 \leq k \leq n)$. C'est donc un compact, comme partie fermée d'un compact.

2.2 Espace métrique compact

Définition 2.3
*- Un espace métrique (E, d) est appelé **précompact** s'il vérifie la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des ensembles de diamètre inférieure à ε.*
*- Un espace **séquentiellement compact** est un espace topologique dans lequel toute suite possède au moins une sous-suite convergente.*

Théorème 2.1 (Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique E est compact si et seulement si toute suite dans E admet une sous-suite convergente.*

Remarque 2.2 *Tout espace métrique compact est séquentiellement compact. La réciproque, moins évidente, est aussi vraie.*

Pour démontrer le théorème précédent, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 *Si un espace métrique E est séquentiellement compact alors il est précompact, c'est-à-dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, E est un réunion d'une famille finie de boules de rayon ε.*

Preuve. Par contraposition : si, pour un certain $\varepsilon > 0$, aucune union finie de boules ouvertes de rayon ε ne remplit E, alors on peut construire par récurrence une suite (x_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \notin \underset{k<n}{\cup} B(x_k, \varepsilon).$$

Une telle suite vérifie :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

donc elle n'admet pas de sous-suite de Cauchy donc, ni de sous-suite convergente, ce qui prouve que E n'est pas séquentiellement compact.

Lemme 2.2 *Si un espace métrique E est séquentiellement compact alors, pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E, il existe un réel $r > 0$ (appelé **nombre de Lebesgue** du recouvrement) tel que toute boule ouverte de rayon r soit incluse dans au moins l'un des O_i où $i \in I$.*

Preuve. Par l'absurde : On suppose $\forall\, r > 0,\ \exists\, x \in E,\ \forall\, i \in I\ B(x,r) \nsubseteq O_i$ en particulier $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in E,\ \forall\, i \in I\ B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \nsubseteq O_i$.
E est séquentiellement compact donc (x_n) admet une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que sa limite, notée x appartient à O_{i_0}. Cet ouvert contient alors une boule ouverte de centre x, et de rayon $r > 0$. Pour n assez grand, $d\left(x_{\varphi(n)}, x\right) + \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. On a alors $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset O_{i_0}$, ce qui est absurde.
Preuve du Théorème. Il reste à démontrer que tout espace métrique séquentiellement compact est compact.
Soient E un espace métrique séquentiellement compact et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Soit (d'après le lemme 2.2) $r > 0$ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement : $\forall\, x \in E,\ \exists\, i_{(x)} \in I;\ B(x,r) \nsubseteq O_{i_{(x)}}$.
D'après le lemme 2.1, il existe une partie finie F de E telle que $E = \underset{x\in F}{\cup} B(x,r)$. On en déduit que la sous-famille finie $\left(O_{i_{(x)}}\right)_{x\in F}$ recouvre E.

Exercise 2.2 *Montrer que dans un espace métrique compact (E,d), toute suite (x_n) qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence a, converge vers a.*

Solution 2.2 *Supposons que a ne soit pas la limite de (x_n), alors il existerait un nombre $r > 0$ et une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ extraite de (x_n) dont les points appartiendraient à $E \setminus B(a,r)$. Par hypothèse cette suite extraite a une valeur d'adhérence b, et comme $E \setminus B(a,r)$ est fermé, b appartient à $E \setminus B(a,r)$. La suite (x_n) aurait donc deux valeurs d'adhérences distinctes, ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Exercise 2.3 *Soit (E,d) un espace métrique. Soit (x_n) une suite convergente de points de E et ℓ sa limite. Soit F l'ensemble $F = \{\ell\} \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{x_n\}$ obtenu en réunissant tous les x_n et leur limite ℓ. On munit F de la topologie induite par celle de E, montrer que F est compact.*

Solution 2.3 *Soit donc un indice* i_0 *tel que* $\ell \in O_{i_0}$. *Puisque* ℓ *est limite de la suite* (x_n) *il existe un entier* n_0 *tel que* $n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in O_{i_0}$. *Soient maintenant :*
i_1 *un indice tel que* $x_0 \in O_{i_1}$
i_2 *un indice tel que* $x_1 \in O_{i_2}$
....
i_{n_0} *un indice tel que* $x_{n_0-1} \in O_{i_{n_0}}$
Posons $I = \{i_0, i_1, i_2 \cdots, i_{n_0}\}$, *alors* $\cup_{i\in I} O_i$ *est un recouvrement fini de* F *extrait de* $\cup_{i\in J} O_i$.

Exercise 2.4 *Soit* (E, d) *un espace métrique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*
1. E *est compact*
2. *Toute suite décroissante d'ensembles fermés non vides a une intersection non vide.*

Solution 2.4 1.1) $\Rightarrow$ 2) *Soit* (F_n) *une suite décroissante de fermés, et soit donc une suite* (x_n) *avec* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_n$ *si* E *est compact cette suite possède une valeur d'adhérence* ℓ. *Tous les* x_n *sont dans* F_0 *qui est fermé, donc* ℓ *est dans* $\overline{F_0}$, *mais* ℓ *est aussi une valeur d'adhérence de la suite* (x_{n+1}) *pour la même raison donc* $\ell \in F_1$. *En définitive* ℓ *est dans tous les* F_n *et l'intersection de cette suite est non vide.*
2. 2) $\Rightarrow$ 1) *Soit* (x_n) *une suite quelconque de points de* E. *Posons* $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ *et* $F_n = \overline{E_n}$. *Les* F_n *forment une suite décroissnte de fermés de* E, *leur intersection contient donc un point* ℓ. *Il est clair que* ℓ *est une valeur d'adhérence de la suite* (x_n).

Exercise 2.5 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* A *une partie compacte et bornée de* E. *Montrer qu'il existe* a *et* $b \in A$ *tels que* $d(a, b) = \delta(A)$ *(diamètre de* A*).*

Solution 2.5 *Soient donc* (x_n) *et* (y_n) *deux suites de points de* A *telles que* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \delta(A)$. *Extrayons de* (x_n) *une suite convergente* $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, *la limite* ℓ *d'une telle suite est forcément un point de* A *puisque* A *étant compact est fermé dans* E. *Extrayons de* $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ *une suite convergente* $\left(y_{\phi(\varphi(n))}\right)$, *la limite* ℓ' *d'une telle suite est forcément un point de* A *puisque* A *étant compact est fermé dans* E. *Considérons maintenant les deux suites* $u_n = x_{\phi(\varphi(n))}$ *et* $v_n = y_{\phi(\varphi(n))}$, *la première tend vers* ℓ, *la seconde tend vers* ℓ' *et on a* $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \delta(A)$. *Or on a* $d(u_n, v_n) \leq d(\ell, \ell') + d(u_n, \ell) + d(\ell', v_n)$. *faisant tendre* n *vers* ∞ *on obtient* $\delta(A) \leq d(\ell, \ell')$. *Il en résulte que* $d(\ell, \ell') = \delta(A)$.

2.3 Produit d'espaces métriques compacts

2.3.1 Produit d'espaces métriques

Considérons une famille finie d'espaces métriques $\{(E_i, d_i)\}_{1 \le i \le n}$. Le but de ce paragraphe est de définir une distance sur le produit cartésien $\prod_{1 \le i \le n} E_i = E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ qui soit compatible avec les distances d_i.

Proposition 2.3 *Soit $\{(E_i, d_i)\}_{1 \le i \le n}$ une famille d'espaces métrique. Soit $E = E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$. Les formules suivantes définissent des métriques sur E :*

$$\begin{aligned} \delta_1(x,y) &= \sum_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i), \\ \delta_2(x,y) &= \left(\sum_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}, \\ \delta_\infty(x,y) &= \max_{1 \le i \le n} \left(d_i(x_i, y_i) \right), \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des éléments de E.

Il est aussi possible de définir une métrique produit dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques.

Proposition 2.4 *Soit $\{(E_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'espaces métrique. Alors la formule suivante :*

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(1, \ d_i(x_i, y_i))}{2^i}$$

définit une distance sur $E = \prod_{i \in \mathbb{N}^*} E_i$.

2.3.2 Produit d'espaces compacts

Théorème 2.2 (Tychonoff) *Un **produit fini** d'espaces compacts non vides est compact si et seulement si chaque espace facteur est compact..*

Preuve. Soient (E_1, d_1) et (E_1, d_1) sont deux espaces metriques compacts. Soit $(x_n, y_n)_{n \ge 0}$ une suite d'eléments de $E_1 \times E_2$. La compacite de (E_1, d_1) permet d'extraire de la suite $(x_n)_{n \ge 0}$, une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \ge 0}$ qui converge vers x. La compacite de (E_2, d_2) permet d'extraire de la suite $(y_n)_{n \ge 0}$, une sous suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n \ge 0}$ qui converge vers y. En particulier, (x, y) est une valeur d'adherence de la suite $(x_n, y_n)_{n \ge 0}$.

Théorème 2.3 *Soit* $\{(E_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ *une famille* ***dénombrable*** *d'espaces métrique non vides.* $E = \prod_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$ *est muni de la topologie produit* $\left(\text{associée à la distance } d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(1,\ d_i(x_i,y_i))}{2^i}\right)$. *L'espace* E *est compact si et seulement si chaque espace facteur* E_i *l'est.*

2.4 Parties compactes de la droite réelle

Définition 2.4 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. *A est un compact de* $\mathbb{R}$ *si de tout recouverment de A par des intervalles ouverts, on peut extraire un sous recouverment fini de A, plus précisément si pour toute famille* $\mathcal{F} = (I_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *vérifiant :*

· $\forall\lambda \in \Omega$, I_λ *est un intervalle ouvert et* $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Omega} I_\lambda$.

· *Il existe* $\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *tel que* $\Lambda \subset \Omega$ *et* $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Théorème 2.4 (Borel Lebesgue) *Soit A une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle. les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est compact,*
2. *A est fermé et borné.*

Preuve. Un intervalle fermé et borné est de la forme $[a,b]$ où $a \leq b$. Le cas $a = b$ est trivial (partie finie). Supposons $a < b$ et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a,b]$. On note F la partie de $[a,b]$ définie par :

$$x \in F \Longrightarrow \exists J_x \subset I,\ \text{finie};\ [a,x] \subset \bigcup_{j\in J_x} O_j.$$

Montrons que $F = [a,b]$.
Il est clair que $F \neq \phi$ puisque $a \in F$. Soit α la borne supérieure de F. Nécessairement $\alpha \in [a,b]$. Il existe alors un ouvert de la famille du départ, O_{i_0}, tel que $\alpha \in O_{i_0}$ et plus précisemment, un intervalle $]\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}[$ tel que $\alpha \in]\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}[$. Comme α est la borne supérieure de F, il s'ensuit deux conséquences. D'une part, $\alpha \in F$ puisqu'il existe $x_\alpha \in F \cap]\alpha_{i_0}, \alpha]$ et $J_{x_\alpha} \subset I$ tels que

$$[a,\alpha] \subset O_{i_0} \cup \left(\bigcup_{j\in J_{x_\alpha}} O_j\right).$$

D'autre part, si $\alpha \neq b$, alors $\alpha < b$ et dans ce cas, il existe $y_{i_0} \in F \cap]\alpha, \beta_{i_0}]$ tel que

$$[a, y_{i_0}] \subset \left(\bigcup_{j\in J_{x_\alpha}} O_j\right),$$

ce qui contredirait la qualité de borne supérieure α de F.

Exemple 2.3 *On suppose que* $\mathbb{R}$ *est muni de la distance usuelle.*
1. $A = [0,1]$ *est un compact couvert par la famille d'ouverts* $\Re = \left\{ \left]x - \frac{1}{5}, x + \frac{1}{5}\right[, 0 < x < 1 \right\}$, *pour extraire une famille finie, il suffit de prendre* $x_k = \frac{k}{10}$ *où* $0 \leq k \leq 9$ *alors* $[0,1] \subseteq \bigcup_{k=0}^{k=9} \left] \frac{k}{10} - \frac{1}{5}, \frac{k}{10} + \frac{1}{5} \right[$.
2. $B = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ *est couvert par la famille d'ouverts* $\Re = \left\{ \left]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right[, n \geq 1 \right\}$. *Comme chaque intervalle contient un seul entier et que les intervalles sont deux à deux disjoints, on ne peut extraire une famille finie de* $\Re$ *qui recouvre* B. *Ainsi* B *n'est pas compact. Autre exemple, comme* $\{n\}$ *est un overt de* B *pour la distance induite, alors* $B = \bigcup_{n \geq 1} \{n\}$ *est un recouvrement d'ouverts de* B *et on ne peut extraire un recouvrement fini.*
3. $\bigcup_{n \geq 1} \left[1, 2 - \frac{1}{n}\right] = [1, 2[$ *on a une réunion infinie de compacts qui n'est pas un compacts.*

Théorème 2.5 (Heine-Borel généralisésur $\mathbb{R}^n$**)** *Soit* F *un fermé borné de* $E = \mathbb{R}^n$ *muni de l'une des distances usuelles, alors* F *est un compact.*

Preuve. S'inspirer du cas précédent.

2.5 Applications continues sur un compact

Théorème 2.6 *Si* $f: X \longrightarrow Y$ *est une application continue avec* X *compact, alors* $f(X)$ *est compact.*

Preuve. Soient K un compact de (X, d), (Y, δ) un espace métrique et $f: X \longrightarrow Y$ une application continue de X dans Y. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$ (pour la métrique induite sur $f(K)$). On a donc

$$f(K) = \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Rappelons que si A et B désignent deux ensembles quelconques de Y alors

$$f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Alors

$$K \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i).$$

Mais f étant continue, chaque $f^{-1}(O_i) \cap K$ est un ouvert de K (pour la métrique induite de X sur K). Comme K est compact, on peut extraire de la famille $(f^{-1}(O_i) \cap K)_{i \in I}$ un recouvrement fini de $\left(f^{-1}(O_i) \cap K\right)_{i\in J}$ (où J est une sous partie finie de I). On a alors, comme

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i\in J}\left(f^{-1}(O_i) \cap K\right)\right) \subset \bigcup_{i\in J} f\left(\left(f^{-1}(O_i) \cap K\right)\right) \subset \bigcup_{i\in J} f\left(f^{-1}(O_i)\right) \subset \bigcup_{i\in J} O_i.$$

Et donc, du recouvrement initial de $f(K)$, on a extrait un recouvrement fini, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.

Proposition 2.5 *Si $f: X \longrightarrow Y$ est une application continue bijective avec X compact et Y séparé, alors f est un homéomorphisme.*

Preuve. On doit vérifier que $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ est continue. Par la proposition 1.14, il suffit de montrer que pour tout $F \subset X$ fermé, $f(F) \subset Y$ est fermé. Comme F est fermé dans X compact, F est compact par la proposition 2.2. Comme f est continue, $f(F)$ est compact par le théorème *prcédent.* Puisque $f(F)$ est compact dans Y séparé, $f(F) \subset Y$ est fermé.

Exercise 2.6 *On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$. Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Et soit K un compact de E. Montrer que $f(K)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et f atteind ses bornes sur K.*

Solution 2.6 *Comme f est continue et que K est compact,alors $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Mais comme tout compact d'un espace métrique est un sous ensemble borné de cet espace métrique, on en déduit que $f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Mais tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieur (et une borne inférieur). Notons a sa borne sup. On peut alors écrire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in K;\ a - \varepsilon < f(x) \leq a$. En remplaçant ε par $\frac{1}{n}$ et ce pout tout n dans $\mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telle que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = a$. Mais la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étant incluse dans un compact, possède une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et si nous notons x sa limite, x est élément de K. Par continuité de f, on a $a = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x)$ et donc f atteind bien son maximum en un point de K. On pourrait procéder de même avec la borne inférieure.*

Exercise 2.7 *On considère deux espaces métriques (E, d) et (E', δ). On suppose aussi que E est compact. Soit $f: E \longrightarrow E'$ une application continue de E dans E'. Montrer que f est uniformément continue.*

Solution 2.7 *Soit f comme dans l'énoncé d'exercice. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur E (mais seulement continue). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \sigma > 0,\ \exists (x, y) \in E \times E;\ d(x, y) < \sigma$ et $\delta(f(x), f(y)) > \varepsilon$. En particulier, en remplaçant σ par $\frac{1}{n}$, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Comme E est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent des sous suites convergentes $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E. Soient x et y les limites respectives de ces deux sous suites. Par construction des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut affirmer que $x = y$. De plus , comme f est continue et que l'application $\delta : E' \times E' \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'application $g : E' \times E' \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \delta(f(x), f(y))$ est continue sur $E' \times E'$ muni de la topologie produit et on peut écrire :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \delta\left(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\phi(n)})\right) = \delta(f(x), f(y)) = \delta(f(x), f(x)) = 0 > \varepsilon$$

ce qui est en contradiction avec notre choix de ε. Donc, f est bien uniformément continue.

Exercise 2.8 *Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b,\ a \in A$ et $b \in B\}$.*

1. *Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.*
2. *Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.*

Solution 2.8 1. *Pour montrer que $A + B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A + B$ qui converge, converge vers un élément de $A + B$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. CommeA est compact on peut extraire une sous-suite $\left(a_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.*
2. *Soit $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab \geq 1$ et $a \geq 0\}$, soit $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \leq 0$ et $a \geq 0\}$. Alors $A + B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$ qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).*

2.6 Espaces localement compacts

Définition 2.5 *Un espace topologique E est dit localement compact si et seulement s'il est séparé et tout point de E admet un voisinage compact. Autrement dit, en notant τ l'ensemble des ouverts de E :*

$$\forall x \in E,\ \exists C \subset E,\ \exists O \subset \tau \text{ tel que } \{x\} \subset O \subset C \text{ avec } C \text{ compact.}$$

Cette définition implique immédiatement la caractérisation suivante (parfois prise comme définition) : un espace topologique E est localement compact si et seulement si tout point de E admet une base de voisinages compacts.

Propriétés :

La première propriété des espaces localement compacts, la plus évidente, est que si un espace E est compact alors il est localement compact. On verra avec les exemples que la réciproque est fausse ; la compacité locale est donc une notion strictement plus faible que la compacité (c'est-à-dire moins restrictive).

Comme la plupart des propriétés topologiques, la compacité locale est conservée par homéomorphisme : si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est un *homéomorphisme*[1] entre deux espaces topologiques et si E_1 est localement compact, alors E_2 l'est aussi.

Un sous-espace F d'un espace localement compact E est lui-même localement compact si et seulement s'il peut s'écrire comme la différence de deux fermés de E : $F = F_1 \setminus F_2$.

En particulier tous les ouverts et les fermés d'un espace localement compact E sont localement compacts :

- Si F est fermé, on écrit $F = F \setminus \phi$.
- Si O est un ouvert, on écrit $O = E \setminus (E \setminus O)$ où E et $E \setminus O$ sont fermés.

Théorème 2.7 (Théorème de Baire)
Un espace ***localement compact*** *est un* ***espace de Baire***[2].

Preuve. Soit $(O_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans E localement compact. Soit U un ouvert quelconque (non vide) ; nous voulons montrer que :

$$U \cap \left(\bigcap_{i\geq 1} O_i \right) \neq \phi.$$

Comme E est localement compact, on a cet ouvert est relativement compact (ie d'adhérence compacte). Puisque O_1 est dense, il rencontre U . Soit $x_1 \in O_1 \cap U$, ce dernier ensemble intersection de deux ouverts, est ouvert. Il existe donc un voisinage compact $C_1 \subset O_1 \cap U$ de x_1 (puisque il existe un système fondamental de voisinages compacts). Une fois V_1 choisi, $O_2 \cap \overset{\circ}{C}_1$ est un ouvert non vide. Il existe donc un compact $C_2 \subset O_2 \cap \overset{\circ}{C}_1 \neq \phi$.

[1] C'est une bijection continue de l'un dans l'autre, dont la réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

[2] Un espace topologique est dit de Baire (du nom du mathématicien René Baire) si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

En itérant cette construction, on obtient une suite de compacts

$$\begin{aligned} \cdots &\subset C_i \subset \cdots \subset C_2 \subset C_1 \subset C_0 = \overline{U}, \\ \text{avec } \forall i &\in \mathbb{N}^*, \ \mathring{C}_i \neq \phi \text{ et } C_i \subset O_i \cap \mathring{C}_{i-1}. \end{aligned}$$

Or, $\left(\bigcap_{i\geq 0} C_i\right) \subset \bigcap_{i\geq 1} (O_i \cap C_{i-1}) \subset U \cap \left(\bigcap_{i\geq 1} O_i\right)$ et l'intersection des C_i est non vide.

En effet, les C_i sont des parties compactes de $C_0 = \overline{U}$; si leur intersection était vide, il en serait de même pour une certaine suite finie extraite (propriété de Borel-Lebesgue). Or, les C_i sont une suite décroissante d'ouverts non vides donc cela est impossible. Finalement, $U \cap \left(\bigcap_{i\geq 1} O_i\right) \neq \phi$, d'où le résultat.

Exemple 2.4
1. *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$*, l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$*, ou les espaces produit* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$*, sont les premiers exemples d'espace localement compacts. D'après le théorème cité plus haut tous leurs ouverts ou leurs fermés le sont aussi. En particulier l'intervalle* $]0,1[$ *ou le disque ouvert* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *du plan complexe sont des exemples typiques d'espaces localement compacts mais pas compacts.*
2. *L'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$*, ou les espaces vectoriels de dimension infinie rencontrés en analyse fonctionnelle ne sont pas localement compacts.*
3. *Le " demi-plan ouvert plus un point " :* $\Gamma = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ *c'est-à-dire les points du plan d'abscisse strictement positive plus l'origine n'est pas localement compacts (dans ce cas c'est justement l'origine qui pose problème, car elle n'a aucun voisinage compact).*

Exercise 2.9 *Soit* (E,d) *un espace localement compact et* Ω *un ouvert de* E*. Montrer que* Ω *est localement compact.*

Solution 2.9 *Soit* α *un point de* Ω *et* K *un voisinage compact de* α*. Soit* F *est un fermé de* K *qui est compact donc* F *est compact. Pour chaque* x *de* F *soit* V_x *un voisinage ouvert de* x *et* W_x *un voisinage ouvert de* α *tels que* $V_x \cap W_x = \phi$ *(on utilise ici l'hypothèse de séparation de* E*).* F *est recouvert par les* V_x*. On peut donc trouver* $x_1, \ldots, x_n$ *tels que* $F \subseteq V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$*, posant alors* $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$ *on a bien construit des ouverts séparant* α *et* F*. Soit alors* H *un voisinage compact de* α *alors* $H' = H \cap (E - V)$ *est un fermé de* H*, donc un compact et* $H' \subseteq V$*.*

Chapitre 3

Espaces complets

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1 *Dans un espace métrique* (E, d), *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0; \; d(x_p, x_q) \leq \varepsilon,$$

ce qui revient à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \; (p \geq n \Longrightarrow \; d(x_{n_0}, x_q) \leq \varepsilon),$$

ou plus concrètement, si

$$\lim_{p,q \longrightarrow +\infty} d(x_p, x_q) = 0.$$

Remarque 3.1
1. *Si* d_1 *et* d_2 *sont deux distances Lispchitz-équivalentes sur un espace* E, *on vérifie qu'une suite dans* E *est de Cauchy pour la distance* d_1 *si, et seulement si, elle est de Cauchy pour la distance* d_2.
2. *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue, est de Cauchy.*

Proposition 3.1 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x dans un espace métrique (E, d). Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \left(n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Alors, par inégalité triangulaire

$$\forall n, m \geq n_0,\ d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Proposition 3.2 *Une suite de Cauchy est bornée.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \left(n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{4}\right)$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{4}\right)$$

,ce qui montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in B\left(x_{n_0}, \frac{1}{4}\right) \text{ (boule ouverte de centre } x_{n_0},\ \text{et rayon } \frac{1}{4}),$$

d'où suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 3.3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de E. Toute valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une sous-suite $\left(x_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Donc, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1,\ d\left(x_{\phi(n)}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors,

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1),\ d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{\phi(n)}\right) + d\left(x_{\phi(n)}, x\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite converge vers sa valeur d'adhérence.

3.2 Complétude

Définition 3.2 *Un espace métrique (E, d) est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy de points de E converge vers un point de E.*

Remarque 3.2
1. *La complétude est une propriété qui dépend de la distance et pas seulement de la topologie sur l'ensemble E.*
2. *Si d_1 et d_2 sont des distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble E, on vérifie que (E, d_1) est complet si, et seulement si, (E, d_2) l'est.*

Proposition 3.4 *Si un sous-espace (F, d) d'un espace métrique (E, d) est complet, F est fermé dans E.*

Preuve. Supposons que (F, d) est complet. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F qui converge dans (E, d), alors c'est une suite de Cauchy dans (F, d). Elle converge donc dans F et par conséquent F est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (F, d). C'est une suite de Cauchy dans (E, d) donc elle converge dans (E, d). Si F est fermé, elle converge également dans (F, d). Donc (F, d) est complet.

Proposition 3.5 *Le produit de deux espaces métriques complets (E_i, d_i) $i = 1, 2$ muni de la distance somme ou de la distance produit est un espace métrique complet.*

Preuve. Si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E_1 \times E_2,\ d_p)$, alors les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans (E_i, d_i) $i = 1, 2$. Elles convergent donc vers une limite notée x et y. On vérifie que la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x, y), aussi bien pour la distance somme que pour la distance produit.

Proposition 3.6 *Un espace métrique* ***compact*** *est complet.*

Preuve. Cela résulte d'exercice 2.2 et de la définition d'un espace compact.

Exercise 3.1 *Montrer que la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la distance usuelle est un espace métrique complet.*

Proposition 3.7 ***Solution 3.1*** *La solution est fondée sur l'un des deux résultats suivants équivalents :*
· *Toute suite décroissante d'intervalles emboîtés de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide.*

· *Toute suite bornée de points de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure. On raisonne alors ainsi. Une suite de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels est nécessairement bornée donc contenue dans un intervalle* $[\alpha,\beta]$. *On peut évidemment négliger le cas où* $\alpha=\beta$, *la suite étant alors constante donc évidemment convergente. On construit alors une suite d'intervalles emboîtés de la façon suivante.* $I_0=[\alpha,\beta]$ *parmi les deux intervalles* $[\alpha,(\alpha+\beta)/2]$, $[(\alpha+\beta)/2,\beta]$ *l'un au moins contient des* x_n *pour une infinité de valeurs de* n. *On appelle* I_1 *cet intervalle* $\subseteq I_0$. *Puis par récurrence on construit de la même façon* I_{n+1} *à partir de* I_n, *de sorte qu'on forme une suite décroissante d'intervalles* I_n *chacun étant de longueur* $|b-a|/2^n$. *L'intersection de tous les* I_n *est non vide et évidemment réduite à un seul point, on peut la voir comme la borne supérieure de la suite formée par les extrémités gauches des* I_n *ou bien la borne inférieure des extrémités droites des* I_n. *L'unique point* a *appartenant à tous les* I_n *est, par construction, une valeur d'adhérence de la suite* x_n, *c'est donc sa limite.*

Deuxième solution : *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$. *La suite* $(x_n)_n$ *est bornée : en effet, il existe un* m *tel que, pour* n *et* p *supérieurs à* m *on ait*

$$|x_n-x_p|<1.$$

On en déduit que, pour tout n *on a*

$$|x_n|<M=1+\max_{j\geq m+1}(|x_j|)<+\infty$$

et puisque $[-M,M]$ *est compact, la suite de Cauchy* $(x_n)_n$ *a au moins une valeur d'adhérence, donc est convergente.*

Corollaire 3.1 *Pour tout entier* n, *l'espace* $\mathbb{R}^n$ *est complet.*

Exercise 3.2 *Soit* $E=]0,+\infty[$. *Pour* $x,y\in E$, *on note*

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|.$$

1. *Montrer que* d *est une distance sur* E.
2. *L'espace métrique* (E,d) *est-il complet?*

Solution 3.2 1. *d est une distance sur E. En effet, on a*

$$\begin{aligned}
\cdot\forall x,y &\in E \quad d(x,y)=d(y,x).\\
\cdot\ \forall x,y,z &\in E \quad d(x,z)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right|\leq\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right|=d(x,y)+d(y,z).\\
\cdot\ d(x,y) &= 0\Leftrightarrow x=y.
\end{aligned}$$

L'espace (E,d) est donc un espace métrique.
2. *L'espace métrique (E,d) n'est pas complet. Prenons en effet la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = n$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. En effet*

$$\forall n,p \in \mathbb{N}^* : \ d\left(x_n, x_{p+n}\right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+p} \leq \frac{2}{n}.$$

Cette suite est donc une suite de Cauchy. Elle ne peut converger, car si sa limite était ℓ, on aurait :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d\left(x_n,\ell\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{\ell}\right| = 0,$$

ce qui entraîne $\frac{1}{\ell} = 0$ ce qui est logiquement impossible.

Exercise 3.3 *L'espace $(\mathbb{R},d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?*
1. $d(x,y) = \left|x^3 - y^3\right|$.
2. $d(x,y) = \left|e^x - e^y\right|$.
3. $d(x,y) = \log\left(1 + |x-y|\right)$.

Solution 3.3 1. *Soit (x_n) une suite de Cauchy pour d. Donc*

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall p,q \geq n_0 \ \ d(x_p,x_q) = \left|x_p^3 - x_q^3\right| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite (x_n^3) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle $|.|$. Comme $(\mathbb{R},|.|)$ est complet alors (x_n^3) converge pour la valeur absolue, notons α la limite, nous avons $|x_n^3 - \alpha|$ qui tend vers 0. Donc pour $x = \alpha^{1/3}$ nous avons $d\left(x_n,x\right) = \left|x_n^3 - x^3\right| = \left|x_n^3 - \alpha\right|$ qui tend vers 0, donc un converge vers x pour la distance d. Donc $\mathbb{R}$ est complet pour d.
2. *Soit (x_n) la suite définie par $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $d\left(x_p,x_q\right) = \left|e^{-p} - e^{-q}\right|$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit n_0 tel que $e^{-n_0} < \varepsilon/2$, alors pour $p,q > n_0$ on a $d\left(x_p,x_q\right) = \left|e^{-p} - e^{-q}\right| \leq e^{-p} + e^{-q} \leq 2e^{-n_0} < \varepsilon$. Donc (x_n) est de Cauchy. Supposons que (x_n) converge, notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $d\left(x_n,\ell\right) = \left|e^{-n} - e^{\ell}\right|$ tend vers 0 d'une part et vers e^{ℓ} d'autre part. Donc $e^{\ell} = 0$ ce qui est absurde pour $\ell \in \mathbb{R}$.*
3. *La fonction $\ln(1+x)$ est continue et ne s'annule qu'en $x = 0$. Donc pour $\ln(1+x)$ suffisamment petit nous avons x suffisamment petit et donc (par la relation $\ln(1+x) = x + o(x)$) nous avons $\frac{1}{2}x \leq \ln(1+x) \leq 2x$. Donc pour (x_n) une suite de Cauchy pour la distance d, la première inégalité à droite prouve que (x_n) est une suite de Cauchy pour $|.|$. Donc elle converge pour $|.|$. La deuxième inégalité à gauche montre que (x_n) converge pour d. Donc l'espace (E,d) est complet.*

Exercise 3.4 *Soit* $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ *un ensemble dénombrable. On pose, pour tout* n *et* m *dans* $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} d(x_n, x_n) = 0 \\ d(x_n, x_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \ n \neq m. \end{cases}$$

1. *Vérifier que* d *est une distance sur* E.
2. *Montrer que* (E, d) *est complet.*

Solution 3.4 1. *Il est facile de voir que* d *est une distance sur* E.
2. *Montrons que* (E, d) *est complet. Soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* E*, il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall m \geq n \geq N, \quad d(x_n, x_m) < 1$$

si bien que $x_n = x_m$ *pour* $m \geq n \geq N$.*(car si* $x_n \neq x_m$ *forcement* $n \neq m$ *et donc* $d(x_n, x_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > 1$*)*
Ainsi, la suite $(x_n)_n$ *est donc stationnaire et par suite convergente dans* E.

Exercise 3.5 *On considère l'espace des fonctions continues* $E = \mathcal{C}([a, b])$. *Soit* $h \in E$ *une fonction qui ne s'annule pas sur* $[a, b]$. *Posons*

$$d_h(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |h(t)(f(t) - g(t))|.$$

L'espace (E, d_h) *est-il complet ?*

Solution 3.5 *Pour montrons que* (E, d_h) *est complet on considère* $(f_n)_n$ *une suite de Cauchy pour la distance* d_h. *Alors pour chaque* $t \in [a, b]$, $(f_n(t))_n$ *est une suite de Cauchy pour* $(\mathbb{R}, |.|)$. *Comme* $\mathbb{R}$ *est complet alors cette suite converge, notons* $f(t)$ *sa limite. Il faut montrer d'abord que* $(f_n)_n$ *converge vers une fonction* f *pour la distance considérée et deuxièmement on démontre que* $f \in E$.
Comme (f_n) *est une suite de Cauchy on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n > 0 \ tq \ \forall p > 0, \ d_h(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon.$$

Donc

$$\sup_{t \in [a,b]} |h(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \varepsilon.$$

On fait tendre p *vers* $+\infty$ *et on obtient :*

$$\sup_{t \in [a,b]} |h(t)(f_n(t) - f(t))| < \varepsilon.$$

Donc (f_n) *converge vers* f *pour la distance* d_h.
Maintenant comme h *est une fonction non nulle sur le compact* $[a, b]$, *donc il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $h(t) > \lambda$ *pour tout* $t \in [a, b]$. *On en déduit que*

$$\sup_{t\in[a,b]} |(f_n(t) - f(t))| \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{t\in[a,b]} |h(t)\,(f_n(t) - f(t))| = d_h\,(f_n, f)$$

Comme $d_h\,(f_n, f)$ *tend vers* 0 *alors* f_n *converge vers* f *pour* d_∞. *Donc* f *est continue c-à-d* $f \in \mathcal{C}\,([a, b])$. *D'où* (E, d_h) *est complet.*

3.3 Prolongement d'une application uniformément continue

Théorème 3.1 *Soient* E *et* F *deux espaces métriques, avec* F *complet. Soient* Ω *une partie dense de* E *et* f *une application uniformément continue de* Ω *dans* F. *Il existe alors une unique application continue* $\widetilde{f}$ *de* E *dans* F *prolongeant* f.

Preuve. La démonstration du théorème repose sur deux étapes : L'**existence** ensuite l'**unicité** de l'appliction.
1. **L'existence :** Soit $\alpha \in E$, comme Ω est dense dans E il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de points de Ω qui converge vers α. Si $\widetilde{f}$ est une fonction continue sur E qui prolonge f, on doit avoir :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f\,(\alpha_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \widetilde{f}\,(\alpha_n)\,.$$

Pour prouver l'existence de $\widetilde{f}$ on doit montrer que toute suite $(\alpha_n)_n$ de Ω qui converge vers un point α de E a une image par f qui converge dans F et que cette limite ne dépend que de α.
En effet si la suite $(\alpha_n)_n$ de Ω converge vers $\alpha \in E$ alors c'est une suite de Cauchy de Ω. Elle est donc transformée par l'application uniformément continue f en une suite de Cauchy de l'espace complet F, donc en une suite convergente.
Si nous supposons maintenat que $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ sont deux suites de Ω convergeant vers α, alors la suite $(\gamma_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} \gamma_{2n} = \alpha_n \\ \gamma_{2n+1} = \beta_n \end{cases}$$

converge aussi vers α. On considère que β est la limite de la suite $(f\,(\gamma_n))_n$ on a,

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f\,(\alpha_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} f\,(\gamma_{2n}) = \beta \\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f\,(\beta_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} f\left(\gamma_{2n+1}\right) = \beta \end{aligned}$$

ce qui donne que les deux suites $(f(\alpha_n))_n$ et $(f(\beta_n))_n$ ont la même limite qu'on notera $\widetilde{f}(\alpha)$.

Pour prouver la continuité de $\widetilde{f}$ on va montrer qu'élle est uniformément continue. Puisque f est une application uniformément continue de Ω dans F, on a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que pour tous } x, y \in \Omega :\ d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Soient alors $\alpha, \alpha' \in E$ tels que $d(\alpha, \alpha') \leq \delta$. Il existe $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites de points de Ω convergeant respectivement vers α et α'. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d(\alpha_n, \beta_n) \leq d(\alpha_n, \alpha) + d(\alpha, \alpha') + d(\alpha', \beta_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} d(\alpha, \alpha') \leq \delta.$$

On a pour n assez grand :

$$d(\alpha_n, \beta_n) \leq \delta$$

ce qui implique

$$d(f(\alpha_n), f(\beta_n)) \leq \varepsilon$$

et donc par continuité de d et lorsque n tend vers $+\infty$:

$$d\left(\widetilde{f}(\alpha), \widetilde{f}(\alpha')\right) \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que $\widetilde{f}$ est uniformément continue.

2. L'unicité : Si $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ sont deux prolongements continus de f à E l'application

$$\widetilde{t} = \widetilde{f_1} \times \widetilde{f_2} : E \underset{x \longmapsto \left(\widetilde{f_1}(x), \widetilde{f_2}(x)\right)}{\longrightarrow} F \times F$$

est continue. L'ensemble A des points de E où $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ coïncident est l'image réciproque de la diagonale de $F \times F$, donc est fermé, et contient Ω puisque les restrictions de $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ à Ω sont égales à f. On en déduit que $A = E$ puisque Ω est dense dans E (et A est un fermé). Ainsi $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$, ce qui prouve l'unicité d'un éventuel prolongement.

Exercise 3.6 *Soit $n \longrightarrow \varphi(n)$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble (dénombrable) des nombres rationnels de l'intervalle $E = [0,1]$. Définissons une fonction f sur E espace métrique avec la métrique usuelle héritée de celle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{\varphi(n) < x} \frac{1}{2^n}$, la somme (infinie) étant étendue seulement aux indices n tels que $\varphi(n) < x$. Montrer que la restriction de f à l'ensemble Ω de tous les nombres irrationnels de E est continue, mais qu'elle ne peut être prolongée en une fonction continue sur E.*

Solution 3.6 *Soient x_1 et x_2 deux éléments de Ω, on suppose que $x_1 < x_2$. La fonction f étant croissante on a*

$$|f(x_2) - f(x_1)| = f(x_2) - f(x_1) = \sum_{\varphi(n)\in]x_1,x_2[} \frac{1}{2^n}.$$

Tout revient donc à montrer que si x_2 est suffisamment proche de x_1 le membre de droite de cette égalité est aussi petit qu'on veut. On remarque que la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ est une suite convergente, donc de Cauchy. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|s_n - s_{n_0}| = s_n - s_{n_0} = \sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Considérons maintenant les rationnels $\varphi(0)$, $\varphi(1), \ldots, \varphi(n_0)$, ils sont en nombre fini $(n_0 + 1)$. On peut choisir x_2 suffisamment voisin de x_1 pour que l'intervalle $]x_1, x_2[$ ne contienne aucun d'eux. Dans ces conditions on a forcément $\sum_{\varphi(n)\in]x_1,x_2[} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ce qui assure la continuité de f sur Ω.
Maintenant si b est un rationnel de E, alors $b = \varphi(m)$ pour un certain entier m. Et si x et x' sont des éléments de Ω vérifiant $x < b < x'$, on a toujours $f(x') \geq f(x) + \frac{1}{2^m}$, ce qui prouve que l'oscillation[1] de f en b relativement à Ω n'est pas nulle et que f ne peut être prolongée de façon continue au point b.

3.4 Points fixes des contractions

3.4.1 Applications contractantes

Définition 3.3 *Soit f une application d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d).*
*On dit que f est **contractante** s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in E$, on ait :*

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

autrement dit, si f est $k-$lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.

Remarque 3.3 1. *Une application contractante est automatiquement continue.*
2. *L'application f est aussi dite $k-$contractante.*

[1]. Si la fonction f est à valeurs réelles, l'oscillation de f noté $\omega_f(a)$ en un point $a \in D_f$ est la différence entre limites supérieure et inférieure de f en a c-à-d $\omega_f(a) = \limsup_{\mathcal{V}(a)} f - \liminf_{\mathcal{V}(a)} f$.
· L'oscillation de f en un point a de son domaine est nulle si et seulement si f est continue en a.

3.4.2 Théorème du point fixe pour une application contractante

Théorème 3.2 (théorème de point fixe de Banach)
Soit (E, d) un espace métrique non vide, complet et soit f une application contractante de E dans E. Alors, f possède un unique point fixe dans E (i.e. il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$).

Preuve. Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \longrightarrow E$ une application $k-$contractante. Soit $x_0 \in E$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme x_0 et la formule récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'une suite de Cauchy de E. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}),$$

nous continuons par récurrence et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

On en déduit par application réitérée de l'inégalité triangulaire que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$tel que $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \ldots + d(x_m, x_{m-1}) \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &= k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ce dernier membre tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, donc on a bien une suite de Cauchy. Comme E est complet, cette suite de Cauchy converge vers une limite x. De plus de $x_{n+1} = f(x_n)$, on déduit en passant à la limite et en utilisant la continuité de f (car c'est une application contractante) que $x = f(x)$, ce qui montre l'existence.
Pour démontrer l'unicité du point fixe, nous considérons que f a deux points fixes x et x'. On a alors

$$0 \leq d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq kd(x, x').$$

Et puisque $0 \leq k < 1$, , on a nécessairement $d(x, x') = 0$, , i.e x, x'.

Exercise 3.7 *Soit $E =]0, +\infty[$. Pour x et y dans E, on pose*

$$\delta(x, y) = |\log x - \log y|.$$

1. *Vérifier que δ est une distance sur E.*
2. *Soit d la distance usuelle sur E. Montrer que d et δ sont deux distances topologiquement*

équivalentes, c'est-à-dire U *est un ouvert de* (E, d) *si et seulement si* U *est un ouvert de* (E, δ).

3. *Montrer que* (E, d) *n'est pas complet.*

4. *La suite* $(1/n)_{n\geq 1}$, *est-elle convergente dans l'espace métrique* (E, δ)? *Est-elle une suite de Cauchy dans* (E, δ)?

5. *Montrer que l'espace métrique* (E, δ) *est complet.*

6. *Soit* $f: E \longrightarrow E$ *telle qu'il existe* $k \in [0, 1[$ *vérifiant, pour tout* $x \in E$

$$x\,|f'(x)| \leq kf(x).$$

Montrer que f *admet un unique point fixe dans* E.

Solution 3.7 1. *a) pour tout* $x \in E \quad \delta(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

b) pour tous $x, y \in E \quad \delta(x, y) = \delta(y, x)$.

c) pour tous $x, y, z \in E$

$$\begin{aligned}\delta(x, z) &= |\log x - \log z| = |\log x - \log y + \log y - \log z| \\ &\leq |\log x - \log y| + |\log y - \log z| \\ &\leq \delta(x, y) + \delta(y, z).\end{aligned}$$

2. *Cela revient à montrer que l'application identité de* (E, d) *dans* (E, δ) *est un homéomorphisme. Soit* $\varepsilon > 0$, *la continuité de la fonction* **`logarithme`** *en un point* $x_0 \in E$ *montre qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |\log x - \log x_0| < \varepsilon$$

autrement dit

$$d(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow \delta(x, x_0) < \varepsilon.$$

Inversement, $\varepsilon > 0$ *étant donné, la continuité de la fonction* **`exponentielle`** *en un point* $y_0 \in E$ *montre qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$|y - y_0| < \alpha \Longrightarrow |e^y - e^{y_0}| < \varepsilon,$$

donc pour $y = \log x$ *et* $y_0 = \log x_0$, *on obtient*

$$(|\log x - \log x_0| < \alpha \Longrightarrow |x - x_0| < \varepsilon) \Longleftrightarrow (\delta(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow d(x, x_0) < \varepsilon).$$

Ainsi, l'application identité est un homéomorphisme de (E,d) *dans* (E,δ).
3. *La suite* $(1/n)_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy dans* (E,d) *mais ne converge pas dans* (E,d). *En effet*

$$\forall n,p\in\mathbb{N}^{*}:\ d\left(x_{n},x_{p+n}\right)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n+p}\leq\frac{2}{n}.$$

Cette suite est donc une suite de Cauchy. Elle ne peut converger, car si sa limite était ℓ, *on aurait :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}d\left(x_{n},\ell\right)=0\Longleftrightarrow\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{n}-\ell\right|=0,$$

ce qui entraîne $\ell=0$, *mais* $\ell\notin\,]0,\ +\infty[$. *Ainsi,* (E,d) *n'est pas complet.*
4. *Supposons que la suite* $(1/n)_{n\geq 1}$ *converge dans* (E,δ). *Il existerait* $\ell\in E$ *tel que*

$$\left|\log\left(\frac{1}{n}\right)-\log\ell\right|=\left|\log n+\log\ell\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Ce qui est impossible. La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ *diverge donc dans* (E,δ).
Supposons que $(1/n)_{n\geq 1}$ *soit une suite de Cauchy dans* (E,δ), *il vient*

$$\left|\log\left(\frac{1}{n}\right)-\log\left(\frac{1}{m}\right)\right|=\left|\log n-\log m\right|\underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Cela veut dire que la suite $(\log n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *et donc converge, ce qui est absurde.*
5. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy de* (E,δ). *On a*

$$\left|\log x_{n}-\log x_{m}\right|\underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Cela montre que la suite $(\log x_n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$. *Comme* $(\mathbb{R},d)$ *est un espace complet, la suite* $(\log x_n)_{n\geq 1}$ *converge dans* $\mathbb{R}$. *Soit* ℓ *sa limie, alors*

$$\left(\left|\log x_{n}-\ell\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\right)\Leftrightarrow\left(\left|\log x_{n}-\log e^{\ell}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\right)$$

c'est-à-dire $(x_n)_n$ *converge vers* e^{ℓ} *dans* (E,δ).
6. On a pour $0<x<y$,

$$\begin{array}{rcl}\delta\left(f(x),f(y)\right)&=&\left|\log f(x)-\log f(y)\right|\\&=&\left|\displaystyle\int_{x}^{y}\frac{f'(t)}{f(t)}dt\right|\\&\leq&\displaystyle\int_{x}^{y}\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|dt\\&\leq&\displaystyle\int_{x}^{y}\frac{k}{t}dt\\&\leq&k\left|\log x-\log y\right|=k\delta\left(x,y\right).\end{array}$$

si bien que f est une application **`contractante`** *de E dans E. Elle admet donc un unique point fixe dans E.*

Chapitre 4

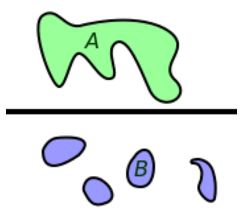
Espaces connexes

4.1 Connexité

Définition 4.1 *Soit E un espace topologique. On dira que l'espace topologique E est* ***connexe*** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*
1. *Il n'existe pas de partitions de E en deux ouverts disjoints non vides.*
2. *Il n'existe pas de partitions de E en deux fermés disjoints non vides.*
3. *Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de E sont : E et ϕ.*
4. *Toute fonction continue de E dans $\{0,\ 1\}$ est constante.*

Définition 4.2 *On dira qu'un sous ensemble Ω de E est un* ***sous espace connexe*** *de E (ou un connexe de E) si Ω est connexe pour la topologie induite de celle de E : autrement dit, Ω est dite* ***connexe*** *ssi elle vérifie une des proprités équivalentes précédentes.*

Exemple 4.1
1. *Dans le schéma suivant, A représente un espace connexe et B un espace non connexe.*



2. *Sur la droite réelle, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, car $]-\infty, 0[$ est à la fois un ouvert et un fermé pour $\mathbb{R}^*$.*

3. *Un singleton forme une partie connexe dans* $\mathbb{R}$ *mais ni* $\mathbb{N}$, *ni* $\mathbb{Z}$, *n'est connexe dans* $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{Q}$ *n'est pas une partie connexe de* $\mathbb{R}$. *En effet, si* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *alors* $F_1 = \{q \in \mathbb{Q},\ q \leq r\}$ *et* $F_1 = \{q \in \mathbb{Q},\ q \geq r\}$ *sont deux fermés (pour la topologie induite), non vides, et qui partitionnent* $\mathbb{Q}$.
5. *Un espace **topologique grossier** est connexe.*
6. *Un espace **topologique discret** n'est connexe que s'il est réduit à un seul élément.*

Proposition 4.1 *Si* A *est un ensemble connexe dans un espace topologique* (E, τ), *alors tout ensemble* B *tel que* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ *est connexe.*

Preuve. Supposons que $B = O_1 \cup O_2$ tels que $O_1 \cap O_2 = \phi$ et O_1, O_2 sont deux ouverts de la topologie induite définie sur B. Alors il existe deux ouverts $U_1,\ U_2$ de τ tels que $O_1 = B \cap U_1$ et $O_2 = B \cap U_2$. On a

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A = A \cap ((B \cap U_1) \cup (B \cap U_2)),$$

il vient

$$\begin{aligned} A &= A \cap [B \cap (U_1 \cup U_2)] \\ &= (A \cap B) \cap (U_1 \cup U_2) \\ &= A \cap (U_1 \cup U_2) \\ &= (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2). \end{aligned}$$

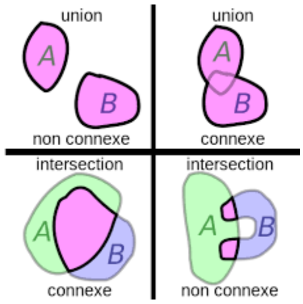
Nous constatons que $A \cap U_1$ et $A \cap U_2$ sont des ouverts de la topologie induite définie sur A et

$$\begin{aligned} (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) &= A \cap (U_1 \cap U_2) \\ &\subseteq B \cap (U_1 \cap U_2) \\ &= (B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) \\ &= O_1 \cap O_2 \\ &= \phi. \end{aligned}$$

Comme A est connexe on en déduit que $A \cap U_1 = \phi$ ou $A \cap U_2 = \phi$.
Si $A \cap U_1 = \phi$, il vient aussi que $\overline{A} \cap U_1 = \phi$ et comme $B \subseteq \overline{A}$ on obtient $B \cap U_1 = \phi$ c-à-d $O_1 = \phi$.
Si $A \cap U_2 = \phi$, il vient aussi que $\overline{A} \cap U_2 = \phi$ et comme $B \subseteq \overline{A}$ on obtient $B \cap U_2 = \phi$ c-à-d $O_2 = \phi$.
Donc $O_1 = \phi$ ou $O_2 = \phi$, d'où B est connexe.

Proposition 4.2 *Si A et B sont deux parties connexes d'un espace topologique E, en général l'union et l'intersection de A et B ne sont pas connexes.*

Voici une image représentant les différents cas possibles :



Proposition 4.3 *Dans un espace topologique (E, τ), soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles connexes ayant une intersection non vide ; alors $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Preuve. Soit $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ et supposons que $A = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont des ensembles ouverts non vides dans A tels que $O_1 \cap O_2 = \phi$. Supposons par exemple que $x \in O_1$; par hypothèse il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $O_2 \cap A_{i_0} \neq \phi$, alors comme $O_1 \cap A_{i_0} \neq \phi$, $O_1 \cap A_{i_0}$ et $O_2 \cap A_{i_0}$ sont ouverts dans A_{i_0} et tels que $(O_1 \cap A_{i_0}) \cup (O_2 \cap A_{i_0}) = A_{i_0}$ on trouve que $(O_1 \cap A_{i_0}) \cap (O_2 \cap A_{i_0}) = \phi$, ce qui est contradictoire avec le fait que A_{i_0} est connexe.

Proposition 4.4 (Application continue sur un connexe) *Soit f une application continue de (E, τ) dans (E', τ'). Pour tout sous-ensemble connexe A de E, $f(A)$ est connexe dans E'.*

Preuve. Supposons $f(A) = U \cup V$, où U et V sont des sous-ensembles non vides de $f(A)$, ouverts dans $f(A)$ et tels que $U \cap V = \phi$. Alors d'après cette propriété "l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E", $A \cap f^{-1}(U)$ et $A \cap f^{-1}(V)$ seraient des ensembles non vides, ouverts dans A de plus $A = (A \cap f^{-1}(U)) \cup (A \cap f^{-1}(V))$ et $(A \cap f^{-1}(U)) \cap (A \cap f^{-1}(V)) = \phi$, ce qui est contradictoire avec le fait que A est connexe.

4.2 Espaces localement connexes

Définition 4.3 *Un espace topologique est dit **localement connexe** lorsque chacun de ses points admet une base de voisinages connexes.*

Définition 4.4 *Soient (E,τ) un espace topologique et x un élément E. On appelle* ***composante connexe*** *de x la réunion des sous ensembles connexes de E contenant x.*

Exemple 4.2 *Soit $X = [0,1[\cup [2,3[\subset \mathbb{R}$. Ses composantes connexes sont les deux intervalles $[0,1[$ et $[2,3[$. Elles sont fermées dans X, mais aussi ouvertes :*

$$[0,1[=]-1,1[\cap X, \quad [2,3[= \left]\frac{2}{3},3\right[\cap X.$$

Proposition 4.5 *Soit x un élément de E.*
· *La composante connexe de x est le plus grand connexe de E contenant x.*
· *La composante connexe de x est une partie fermée de E.*

Preuve. La première partie de la proposition est évidente, par définition de la composante connexe d'un point. La seconde partie s'en déduit aussitôt car, rappelons le, si un ensemble est connexe il en est de même de son adhérence qui de plus est fermée . Donc si U est le plus grand connexe de E contenant x, il est nécessairement égale à son adhérence qui est aussi connexe et qui contient aussi x.

Remarque 4.1 1. *La connexité locale n'est pas préservée par image continue.*
2. *Un espace topologique est localement connexe si et seulement si, pour tout ouvert U, les composantes connexes de U, sont ouvertes.*

Exemple 4.3 1. *Les exemples les plus classiques d'espace topologique localement connexes sont $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \ \mathbb{R}^n$.*
2. *Un exemple d'espace connexe qui n'est pas localement connexe : dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle on considère la partie $A = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$. Alors A est connexe mais n'est pas localement connexe. En particulier, tout point de A possède dans A un voisinage connexe (à savoir A lui-même) mais ne possède pas forcément de base de voisinages connexes.*

Proposition 4.6 (Parties connexes de $\mathbb{R}$) *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En particulier $\mathbb{R}$ est connexe et* ***localement connexe****.*

Preuve. Si A est une partie connexe de $\mathbb{R}$ alors A est un intervalle, puisque tout réel a strictement compris entre deux éléments de A appartient lui aussi à A : sinon, $]-\infty, a[\cap A$ et $]a, +\infty[\cap A$ formeraient une partition de A en deux ouverts de A non vides et disjoints. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors A est connexe, puisque toute application continue de A dans $\mathbb{R}$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 est constante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. $\mathbb{R}$ est localement compact parce que les intervalles de centre x forment un système fondamental de voisinages de x.

Théorème 4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Si une application f est définie et continue sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ (où a et b sont des réels quelconques pouvant être égales à respectivement $-\infty$ et $+\infty$) , et si de plus α et β sont des éléments de $]a,b[$ tel que $\alpha < \beta$ alors pour tout $C \in \left]f(\alpha), f(\beta)\right[$, il existe $c \in]\alpha,\beta[$ tel que $f(c) = C$.*

Preuve. L'image d'un connexe par une application continue est connexe. Or, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les sous ensembles connexes de $\mathbb{R}$. On en déduit donc que l'image de $]\alpha,\beta[$ par f est un intervalle de $\mathbb{R}$. Tout élément de ce dernier possèdant un antécédent dans $]\alpha,\beta[$, D'où le théorème est démontré.

Exercise 4.1 *Soit (E,d) un espace métrique. Établir l'équivalence entre les conditions suivantes :*
1. *Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de (E,d) sont ϕ et E.*
2. *E n'est pas réunion de deux ouverts non vides et disjoints de E.*
3. *E n'est pas réunion de deux fermés non vides et disjoints de E.*
4. *Il n'existe pas de surjection continue définie sur E à valeurs dans le sous-espace $\{0,1\}$ de $\mathbb{R}$.*

Solution 4.1
$1 \Rightarrow 2$: *Supposons 2 non vérifiée, et soient O_1, O_2 deux ouverts non vides et disjoints de E tels que $E = O_1 \cup O_2$. Il est alors clair que $O_1 = E \setminus O_2$ est une partie à la fois ouverte et fermée de E, distincte de ϕ et E. Par suite, 1 n'est pas vérifiée.*
$2 \Rightarrow 3$: *Supposons 3 non vérifiée, et soient F_1, F_2 deux fermés non vides et disjoints de E tels que $E = F_1 \cup F_2$. Alors $F_1 = E \setminus F_2$, $F_2 = E \setminus F_1$, donc F_1, F_2 sont également ouverts, et 2 n'est pas vérifiée.*
$3 \Rightarrow 4$: *Supposons 4 non vérifiée, et soit $f : E \longrightarrow \{0,\ 1\}$ une surjection continue. On a alors $E = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ avec $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ disjoints par définition, fermés par continuité de f, et non vides par surjectivité de f. Par suite, 3 n'est pas vérifiée.*
$4 \Rightarrow 1$: *Supposons 1 non vérifiée, et soit A une partie de E, distincte de ϕ et E, à la fois ouverte et fermée. Par passage au complémentaire, $E \setminus A$ est également distincte de ϕ et E, et fermée. On définit alors une surjection $f : E \longrightarrow \{0,\ 1\}$ en posant $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$. Et comme $f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(E) = E$, $f^{-1}(\{0\}) = E \setminus A$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, l'image réciproque de tout fermé de $\{0,\ 1\}$ par f est un fermé de E, ce qui prouve que f est continue. En somme, 4 n'est pas vérifiée.*

Exercise 4.2 *L'ensemble $E = \{a,b,c\}$ est-il connexe pour les topologies : $\tau_1 = \{\phi, \{b\}, \{b,c\}, E\}$ et $\tau_2 = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$?*
Déterminer les composantes connexes de E pour ces topologies.

Solution 4.2 *Pour la topologie* τ_1 *il est clair que le seul recouvrement de* E *par deux ouverts correspond au couple* (ϕ, E) . *Nous sommes donc dans le cas d'un ensemble connexe ayant une seule composante connexe* E. *Pour la topologie* τ_2 *on a un recouvrement par les ouverts* $\{a, c\}$ *et* $\{b\}$ *qui sont tous deux non vides. L'espace n'est donc pas connexe. La topologie induite sur* $\{a, c\}$ *par* τ_2 *est* $\{\phi, \{c\}, \{a, c\}\}$ *cet ensemble est donc connexe. La composante connexe de* a *notée* $C(a)$ *contient donc* c, *mais pas* b *car alors* E *serait connexe. Il en résulte que* $C(a) = C(c) = \{a, c\}$ *et donc* $C(b) = \{b\}$.

Exercise 4.3 *Déterminer les parties connexes de*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\right\} \text{ et } B = \left\{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq z'\right\}.$$

Solution 4.3 1. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *il y a deux composantes connexes*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\right\} \text{ et } \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\right\}.$$

2. *Dans* $\mathbb{C}^2$ *il n'y en a qu'une seule*

$$\left\{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq z'\right\}.$$

Exercise 4.4 *Soit* A *et* B *des parties de l'espace toplologique* E. *On suppose* B *connexe et que* $B \cap A$ *et* $B \cap C_E A$ *sont non vides. Montrer que* B *coupe la frontière de* A.

Solution 4.4 *Notons la frontière* $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. *Nous avons la partition* $E = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A) \cup \left(E \setminus \overline{A}\right)$. *Si* $B \cap Fr(A) = \phi$ *alors* $B \subset \overset{\circ}{A} \cup \left(E \setminus \overline{A}\right)$.
De plus, par hypothèses, $B \cap A \neq \phi$ *et* $B \cap Fr(A) = \phi$ *or* $\overset{\circ}{A} = A \setminus Fr(A)$ *donc* $B \cap \overset{\circ}{A} \neq \phi$.
Comme $Fr(A) = Fr(E \setminus A)$ *on a* $B \cap Fr(E \setminus A) = \phi$. *Par hypothèse* $B \cap (E \setminus A) \neq \phi$ *donc* $B \cap \left(E \setminus \overline{A}\right) = (B \cap (E \setminus A)) \setminus (B \cap Fr(E \setminus A)) \neq \phi$.
Nous avons montrer que B *est inclus dans l'union de deux ouverts disjoints* $\overset{\circ}{A}$ *et* $E \setminus \overline{A}$, *d'intersection non vide avec* B, *donc* B *n'est pas connexe. Par contraposition, si* B *est connexe alors* B *ne rencontre pas la frontière de* A.

Exercise 4.5 *Soient* $X = [0, 1]$ *et* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & si \;\; x - y \in \mathbb{Q} \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

1. *Montrer que* d *définit une distance sur* X.

2. *Vérifier que* X *est borné (pour la distance* d *) et déterminer son diamètre.*
3. *Déterminer le diamètre de l'intervalle* $\left[\frac{1}{2020}, \frac{1}{2021}\right]$.
4. *On pose* $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *(les irrationnels de* $[0,1]$ *).*
a) *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* A *qui converge vers* $x \in X$. *Montrer que* x *est irrationnel.*
b) *En déduire que* A *est fermé.*
5. *On pose* $B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ *(les rationnels de* $[0,1]$ *).*
a) *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* B *qui converge vers* $x \in X$. *Montrer que* x *est rationnel.*
b) *En déduire que* B *est fermé.*
6. *En déduire, de ce qui précède, que* (X,d) *n'est pas* ***connexe.***
7. *Soit* $f : (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$ *d´efinie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in X \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & sinon. \end{cases}$$

Montrer que f *est continue.*

Solution 4.5

1. *Montrons que* d *définit une distance sur* X
• *Il est clair que* $d \geq 0$.
• $d(x,y) = 0$ *si est seulement si* $x - y \in \mathbb{Q}$ *et* $|x-y| = 0$ *si est seulement si* $x = y$.
• $d(x,y) = d(y,x)$ *car si* $x - y \in \mathbb{Q}$ *alors* $y - x \in \mathbb{Q}$ *et* $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$ *et si* $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *alors* $y - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *et* $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.
• *Si* $x - z \in \mathbb{Q}$ *alors* $z - y \in \mathbb{Q}$ *alors* $x - y \in \mathbb{Q}$ *et* $d(x,z) + d(z,y) = |x-z| + |z-y| \geq |x-y| = d(x,y)$.
Dans tous les autres cas on a :

$$d(x,z) + d(z,y) \geq 1 \geq d(x,y).$$

2. *Pour tout* $(x,y) \in X \times X$ *on ait* $d(x,y) \leq 1$, *donc* X *est borné pour la distance* d *et son diamètre est*≤ 1. *Puisque* $d(0,1) = 1$ *alors le diamètre sera égale à* 1 *(rappelons que* $D(X) = \max\limits_{x,y\in X} d(x,y)$*).*
3. *On a* $D\left(\left[\frac{1}{2020}, \frac{1}{2021}\right]\right) \leq D(X) = 1$. *De plus, si on prend un rationnel et un irrationnel de* $\left[\frac{1}{2020}, \frac{1}{2021}\right]$ *alors la distance entre eux est égale à* 1. *Ainsi* $D\left(\left[\frac{1}{2020}, \frac{1}{2021}\right]\right) = 1$.
4. *a) Si* x *est rationnel alors* $(x_n - x)$ *est irrationnel pour tout* n. *Ainsi* $d(x_n, x) = 1$ *ce qui contredit le fait que* $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ *(car* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* A *qui converge vers* $x \in X$*).*
b) D'après la question précédente si $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* A *qui converge vers* $x \in X$ *alors* $x \in A$. *Ainsi* A *est fermé.*

5. *a) Si* x *est irrationnel alors* $(x_n - x)$ *est irrationnel pour tout* n*. Ainsi* $d(x_n, x) = 1$ *ce qui contredit le fait que* $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ *(car* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* B *qui converge vers* $x \in X$*).*
b) D'après la question précédente si $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* B *qui converge vers* $x \in X$ *alors* $x \in B$*. Ainsi* B *est fermé.*
6. A *et le complémentaire de* B *dans* X*. Donc,* A *est un sous-ensemble de* X *différent de* $\emptyset$ *et de* X *qui est ouvert et fermé à la fois. Ainsi* X *n'est pas connexe.*
7. *Soit* $(x, y) \in X$*. En distinguant les cas* $x-y \in \mathbb{Q}$ *et* $x-y \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$ *on obtient trivialement*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y).$$

La fonction f *est lipschitzienne donc continue.*

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Normes

Définition 5.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corp $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.* ***Une norme*** *sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les proprités suivantes :*

1. $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0.$ *(positivité)*
2. $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ *(définie, séparation)*
3. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \Bbbk,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$ *(homogénéité)*
4. $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y).$ *(inégalité triangulaire)*

Vocabulaire et notations

– Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.
– Pour $x \in E$, $N(x)$ est appelé norme de x et se note en général $\|x\|$.
– Un vecteur de norme 1 s'appelle un vecteur unitaire (ou normé). Pour tout $x \neq 0_E$, il existe au moins deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\pm\frac{1}{\|x\|}x$.
– On dit alors que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 5.1 (semi-norme) *Si N ne vérifie que la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire on parle de* ***semi-norme****.*

Exemple 5.1 (Exemples usuels de normes)
1. *Il existe une infinité de normes sur $\Bbbk^n$; les plus courantes sont notées $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$, et définies sur l'espaces de dimensions finies sur $\mathbb{R}$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$). Si x un élément de $\mathbb{R}^n$ dont*

les composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *, on a*

$$\begin{array}{l} \text{La norme absolue : } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \text{La norme euclidienne : } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \\ \text{La norme infinie : } \|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} (|x_i|) \end{array}$$

2. *Les espaces de fonctions sont de dimension infinie. Considérons l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle* $I = [a, b]$ *à valeurs réelles ou complexes. Pour* $f \in \mathcal{C}([a, b], \Bbbk)$ *on a*

$$\begin{array}{l} \text{La norme de la convergence absolue : } \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \\ \text{La norme de la convergence quadratique : } \|x\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \\ \text{La norme infinie : } \|.\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t)|) \end{array}$$

3. *Les espaces vectoriels de polynômes* $\Bbbk_n[X]$ *sont de dimension* $(n + 1)$ *. Il existe trois normes usuelles sur* $\Bbbk_n[X]$ *. Si* $P = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$*, on a*

$$\begin{array}{l} \|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \\ \|P\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}, \\ \|P\|_\infty = \sup_{0\le i\le n} (|a_i|). \end{array}$$

Exercise 5.1 *On définit l'application* N *sur* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$N(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}\right).$$

Montrer que N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

Solution 5.1

1. *Positivité :* $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $N(x, y) \geq 0$. *(par définition)*
2. *Homogénéité :* $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{|\lambda x + t(\lambda y)|}{\sqrt{1 + t^2}}\right) \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(|\lambda| \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}\right) \\ &= |\lambda| \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{|\lambda x + t(\lambda y)|}{\sqrt{1 + t^2}}\right) \\ &= |\lambda| .N(x, y). \end{aligned}$$

3. *Séparation : si* $N(x,y)=0$, *alors pour tout* t, *on a* $x+ty=0$. *Choisir* $t=0$ *montre que l'on a* $x=0$. *Ensuite, si on prend* $t=1$, *on obtient également* $y=0$, *et donc* $(x,y)=0$.
4. *L'inégalité triangulaire : pour tous* (x,y) *et tout* (x',y'), *on a*

$$|(x+x')+t(y+y')| \leq |x+ty| + |x'+ty'|,$$

donc

$$\frac{|(x+x')+t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x'+ty'|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Passant au sup, *on obtient*

$$N((x,y)+(x',y')) \leq N(x,y) + N(x',y').$$

Exercise 5.2 *Dites si la proposition suivante est elle vraie ou fausse :*

$$N(x,y) = |5x+3y| \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^2.$$

Solution 5.2 *Posons* $x=3$ *et* $y=-5$. *Alors* $5x+3y=0$, *d'où* $N(3,-5)=0$ *sans que* $(3,-5)$ *ne soit le vecteur nul.* N *n'est pas une norme*!

Exercise 5.3 *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *des reéls et* $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 |x_1| + \alpha_2 |x_2| + \ldots + \alpha_n |x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les α_i $1 \leq i \leq n$, *pour que* N *soit une norme sur* $\mathbb{R}^n$.

Solution 5.3 *Notons* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Alors si* N *est une norme, on sait que*

$$\begin{aligned} N(e_1) &= N(1,0,\ldots,0) = \alpha_1 > 0 \\ N(e_2) &= N(0,1,0,\ldots,0) = \alpha_2 > 0 \\ &\vdots \\ N(e_k) &= \alpha_k > 0, \end{aligned}$$

et donc il est nécessaire que tous les α_k *soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet,* N *est alors bien à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *il est clair que* $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \alpha_1 |\lambda x_1| + \alpha_2 |\lambda x_2| + \ldots + \alpha_n |\lambda x_n| \\ &= |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

Si,

$$\begin{aligned} N(x)=0 &\Rightarrow \alpha_1|x_1|+\alpha_2|x_2|+\ldots+\alpha_n|x_n|=0 \\ &\Rightarrow \forall i\in\{1,2,\ldots,n\},\ x_i=0 \\ &\Rightarrow x=0 \end{aligned}$$

puisqu'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul. Enfin, l'inégalité triangulaire se prouve simplement comme pour la valeur absolue $|.|$ *. En effet, si* $x,y\in\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \alpha_1|x_1+y_1|+\alpha_2|x_2+y_2|+\ldots+\alpha_n|x_n+y_n| \\ &\le \alpha_1(|x_1|+|y_1|)+\alpha_2(|x_2|+|y_2|)+\ldots+\alpha_n(|x_n|+|y_n|) \\ &\le (\alpha_1|x_1|+\alpha_2|x_2|+\ldots+\alpha_n|x_n|)+(\alpha_1|y_1|+\alpha_2|y_2|+\ldots+\alpha_n|y_n|) \\ &\le N(x)+N(y). \end{aligned}$$

5.2 Distance associée à une norme

Définition 5.2 *Soit* $(E,\|.\|)$ *est un espace vectoriel normé sur un corp* $\mathbb{k}$*. L'application*

$$d: E\times E\longrightarrow\mathbb{R}^+ \text{ définie par } d(x,y)=\|x-y\|,$$

est une distance sur E*, appelée la distance associée à la norme* $\|.\|$ *. Elle verifie, en plus des conditions de la défintion d'une distance, les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} (P_1) &: \forall\lambda\in\mathbb{k},\ \forall(x,y)\in E\times E,\ d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,d(x,y). \\ (P_2) &: \forall x,y,z\in E,\ d(x\pm z,y\pm z)=d(x,y). \end{aligned}$$

Proposition 5.1 *Soit* (E,d) *un espace métrique. On suppose que* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *et que la distance* d *vérifie aussi les deux conditions de la définition précédente* $((P_1)$ *et* $(P_2))$*. Alors l'application*

$$\|.\|: E\times E\longrightarrow\mathbb{R} \text{ définie par } \|x\|=d(0,x),$$

est une norme sur E*. La distance associée à cette norme est la distance* d*.*

Preuve. l'application $\|.\|$ définie une norme sur E. En effet, on a

1. $\forall x\in E,\ \|x\|\ge 0$ car l'application d définie une distance sur E.

2. $\forall \lambda \in \Bbbk, \ \forall x \in E, \ \|\lambda x\| = d(0, \lambda x) = d(\lambda 0, \lambda x) = |\lambda| \, d(0, x) = |\lambda| \, \|x\|$.
3. $\forall x, y \in E, \ \|x + y\| = d(0, x + y)$ et on a

$$d(0, x + y) \leq d(0, x) + d(x, x + y),$$

de plus

$$d(x, x + y) = d(x + 0, x + y) = d(0, y) \ \text{(d'aprés définition 5.2)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} d(0, x + y) &\leq d(0, x) + d(0, y) \\ &\leq \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Remarque 5.2 *La distance triviale $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x = y \\ 1 \ \text{si } x \neq y \end{cases} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

n'est associée à aucune norme sur $\mathbb{R}$ car elle ne vérifie pas la condition (P_1).

Exemple 5.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications*

$$\|.\|_1, \ \|.\|_2, \ \|.\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

définie pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|),$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Les distances associées à ces normes sont définies par

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \ d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \ d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i|).$$

La distance d_1 est appelee la distance de Manhattan. La distance d_2 est appelee la distance euclidienne usuelle. La distance d_∞ est appelee la distance uniforme.

Définition 5.3 (Boule, Sphère) *Soit $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé sur un corp $\Bbbk$.*

1. *La boule ouverte de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$ est définie par*

$$B(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| < r\}.$$

2. *La boule fermée de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$ est définie par*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

3. *La sphère de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$ est définie par*

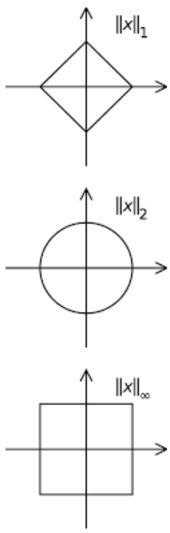
$$S(x_0, r) = \{x \in E, \ \|x - x_0\| = r\}.$$

Exemple 5.3 *Dans l'espace à deux dimensions $\mathbb{R}^2$, pour les trois normes qui suivent, les sphères de rayon 1 correspondantes ont des formes différentes.*

· *la norme 1 :* $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

· *la norme euclidienne :* $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

· *la norme uniforme :* $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$



5.3 Normes équivalentes

Définition 5.4 *Soit E est un $\Bbbk-$espace vectoriel normé. Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes sur E. On dit que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ equivalentes et on note $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$ si et seulement si il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que pour tout $x \in E$ on ait*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 .$$

Proposition 5.2 *La relation* $\| \|_1 \sim \| \|_2$ *est une relation d'equivalence (c'est à dire une relation réflexive, symétrique et transitive) sur l'ensemble des normes sur* E.

Preuve. Notons $\Re$ la relation considérée.
· Soit $\| \|$ une norme sur E. Soit $\alpha = \beta = 1$. α et β sont deux réels strictement positifs tels que pour tout x de E,

$$\alpha \|x\| \leq \|x\| \leq \beta \|x\|.$$

Donc, $\| \|$ est équivalente à $\| \|$. Ceci montre que $\Re$ est réflexive.
· Soient $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes sur E. Supposons que $\| \|_2$ soit équivalente à $\| \|_1$. Il existe deux réels strictement positifs α et β tels que pour tout $x \in E$,

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

Il vient donc

$$\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ et } \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_2.$$

D'où

$$\frac{1}{\beta} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_2.$$

Puisque $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{\alpha}$ sont deux réels strictement positifs, $\| \|_1$ est équivalente à $\| \|_2$. Ceci montre que $\Re$ est symétrique.
· Soient $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_3$ trois normes sur E. Supposons $\| \|_1$ équivalente à $\| \|_2$ et $\| \|_2$ équivalente à $\| \|_3$. Il existe quatre réels positifs α, β, γ et δ tels que pour tout $x \in E$,

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \text{ et } \gamma \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \delta \|x\|_2.$$

Il s'ensuit, pour tout $x \in E$,

$$\alpha\gamma \|x\|_1 \leq \gamma \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \delta \|x\|_2 \leq \beta\delta \|x\|_1.$$

Puisque $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont deux réels strictement positifs, $\| \|_3$ est équivalente à $\| \|_1$. Ceci montre que $\Re$ est transitive.
On a montré que $\Re$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Proposition 5.3 *Les normes usuelles sur* $\mathbb{R}^n$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *sont des normes deux à deux équivalentes.*

Preuve.

· Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty .$$

Inversement, si i_0 est un indice tel que $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} (|x_i|) = |x_{i_0}|$, alors,

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq |x_1| + \cdots + |x_{i_0}| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1 .$$

Donc,

$$\| \ \|_\infty \leq \| \ \|_1 \leq n \| \ \|_\infty .$$

Ceci montre que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont deux normes équivalentes.

· Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists i_0 \in \{1, ..., n\}$, tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|x_i| \leq |x_{i_0}|$. Donc,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\|x\|_\infty)^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty .$$

Réciproquement, on a $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} (|x_i|) = |x_{i_0}|$, alors

$$\|x\|_\infty \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_{i_0}|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2 .$$

Donc,

$$\| \ \|_\infty \leq \| \ \|_2 \leq \sqrt{n} \| \ \|_\infty .$$

Ceci montre que $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont deux normes équivalentes.
On a finalement $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2 \sim \| \ \|_\infty$. Par transitivité, on en déduit que $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$.

Exercise 5.4 *On considère sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ les deux normes définies par*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \ \ et \ \ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)|) .$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Solution 5.4

Pour tout $f \in E$, on a

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty .$$

Supposons par l'absurde que les deux normes soient équivalentes, il existe alors $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall f \in E, \ \ \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1 .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par* $f(t) = t^n$. *On a*

$$\|f\|_1 = \frac{1}{n+1} \text{ et } \|f\|_\infty = 1$$

et l'inégalité

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{n+1}$$

Quand n *tend vers* $+\infty$, *on obtient* $0 \leq 1 \leq 0$ *ce qui est impossible.*

Exercise 5.5 *On considère sur* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *les deux normes définies par*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \text{ et } \|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt.$$

1. *Montrer que* $\| \ \|$ *est une norme sur* E.
2. *Comparer les normes* $\| \ \|_1$ *et* $\| \ \|$ *et en particulier vérifier que* $\| \ \|_1$ *et* $\| \ \|$ *ne sont pas équivalentes.*

Solution 5.5

1.*a*) *Soit* $f \in E$. f' *est alors définie et continue sur le segment* $[0,1]$. *On en déduit que* $\|f\|$ *existe dans* $\mathbb{R}$.

b) *Soit* $f \in E$. $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \geq 0$.

c) *Soit* $f \in E$.

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 \ \ &\Rightarrow \ \ |f(0)| = \int_0^1 |f'(t)|\, dt = 0 \\
&\Rightarrow \ \ |f(0)| = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1], |f'(t)| = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow \ \ f(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1], \ f'(t) = 0 \\
&\Rightarrow \ \ f(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1], \ f(t) = f(0) \\
&\Rightarrow \ \ f \equiv 0.
\end{aligned}$$

d) *Soient* $f \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\, dt \\
&= |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \right) \\
&= |\lambda| \|f\| .
\end{aligned}$$

e) Soit $(f,g)\in E^2$.

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= |f(0)+g(0)|+\int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,dt\\ &\le |f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,dt+|g(0)|+\int_0^1 |g'(t)|\,dt\\ &\le \|f\|+\|g\|.\end{aligned}$$

On a montré que $\|\ \|$ *est une norme sur* E.
2) *Soit* $f\in E$. *Pour* $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt\right|\\ &\le |f(0)|+\int_0^x |f'(t)|\,dt\\ &\le |f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,dt\\ &\le \|f\|.\end{aligned}$$

Il s'en suite

$$\|f\|_1=\int_0^1 |f(x)|\,dx\le\int_0^1 \|f\|\,dx=\|f\|.$$

On a montré que $\|\ \|_1\le\|\ \|$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $t\in[0,1]$, *posons* $f_n(t)=t^n$. *Chaque* f_n *est un élément de* E *tel que*

$$\|f\|_1=\frac{1}{n+1}\ \ et\ \ \|f\|=1.$$

Par l'absurde supposons qu'il existe un réel strictement positif α *tel que* $\alpha\|\ \|\le\|\ \|_1$. *En particulier,*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\alpha\|f_n\|\le\|f_n\|_1$$

ou encore

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha\le\frac{1}{n+1}.$$

Quand n *tend vers* $+\infty$, *on obtient* $0<\alpha\le 0$ *ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas un réel strictement positif* α *tel que* $\alpha\|\ \|\le\|\ \|_1$. *Ceci montre que les normes* $\|\ \|$ *et* $\|\ \|_1$ *ne sont pas des normes équivalentes.*

Exercise 5.6 *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *l'application*

$$N:(x,y)\longmapsto\max\{|x|,|2x+y|\}.$$

1. *Montrer que* N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$*. Décrire la boule ouverte de centre* $a \in \mathbb{R}^2$ *et de rayon* $r > 0$.
2. *Montrer que* N *est équivalente à la norme* $\| \ \|_1$, *et trouver des constantes strictement positives* α *et* β *telles que*

$$\alpha \| \ \|_1 \leq N \leq \beta \| \ \|_1 .$$

3. *Décrire l'intérieur de*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |2x - y| < 1\right\}.$$

Solution 5.6

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= \max\{|\lambda x|, |2\lambda x + \lambda y|\} \\ &= \max\{|\lambda| |x|, |\lambda| |2x + y|\} \\ &= |\lambda| N(x, y). \end{aligned}$$

On a vérifié que N *est homogène, ainsi* $N(0,0) = 0$*. Maintenant, si* $N(x, y) = 0$*, alors* $|x| = |2x + y| = 0$*, et donc* $x = y = 0$*, d'où l'application* N *est séparative. Enfin, vérifions l'inégalité triangulaire : soient* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *deux éléménts de* $\mathbb{R}^2$*. On a*

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2)$$

et

$$\begin{aligned} |2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)| &\leq |2x_1 + y_1| + |2x_2 + y_2| \\ &\leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).$$

N *est donc une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
La boule ouverte B *de centre* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *et de rayon* $r > 0$ *est définie comme suit :*

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x - x_0, y - y_0) < r\right\}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} N(x - x_0, y - y_0) < r \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x - x_0| < r \\ |2(x - x_0) + (y - y_0)| < r \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -r + x_0 < x < r + x_0 \\ -r - 2(x - x_0) + y_0 < y < r - 2(x - x_0) + y_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \max\{|x|, |2x+y|\} \\ &\leq \max\{|x|, 2|x| + |y|\} \\ &\leq 2(|x| + |y|) \\ &\leq 2\|(x,y)\|_1, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_1 &= |x| + |y| \\ &= |x| + |2x + y - 2x| \\ &\leq 3|x| + |2x+y| \\ &\leq 4\max\{|x|, |2x+y|\} \\ &\leq 4N(x,y). \end{aligned}$$

Les constantes $\alpha = \frac{1}{4}$ *et* $\beta = 2$ *conviennent.*
3. *On remarque tout d'abord que l'application linéaire définie sur* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(muni de la distance associée à la valeur absolue) par*

$$f(x,y) = 2x - y$$

est continue pour la norme N *: en effet pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |2x - y| \\ &= |4x - (2x+y)| \\ &\leq |4x| + |2x+y| \\ &\leq 5\max\{|x|, |2x+y|\} \\ &\leq 5N(x,y). \end{aligned}$$

Par conséquent, $A = f^{-1}(]-1,1[)$ *est donc ouvert comme image réciproque de l'ouvert* $]-1,1[$ *de* $\mathbb{R}$ *par l'application continue* f. *L'intérieur de* A *est donc* A.

Chapitre 6

Quelques sujets d'examens des années précédentes

Sujet 1

Exercice 1 : (Distance à une partie)(3pts)

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour $x \in E$. on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d_A(x) = \text{distance de } x \text{ à } A.$$

1. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.
2. Pour $\varepsilon > 0$, on pose : $V_\varepsilon(A) = \{x \in E : \ d(x, A) < \varepsilon\}$. Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$.
3. Montrer que $d_A = d_B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Exercice 2 : (3pts)

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que d soit une distance.

2. On pose $E = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$. Montrer que d est une distance et trouver les boules ouvertes.

Exercice 3 : (14pts)

On désigne par $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[-1, 1]$.

Pour toute fonction continue $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ on pose,

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(t)|\, dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{+1} |f(t)|^2\, dt}.$$

1. En déduire que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $\int_a^b |f(t)|\, dt = 0$

alors

$$f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b].$$

2. Montrer que la fonction $\| \ \|_1 : \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme.

3. Montrer que pour tout couple de fonctions continues f et $g \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ on a l'inégalité de **Cauchy-Shwartz**, $\int_{-1}^{+1} |f(t)\,g(t)|\,dt \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

Indication : On pourra utiliser le trinôme positif, $P(t) = (\|tf - g\|_2)^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que la fonction $\| \ \|_2 : \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie l'inégalité triangulaire.

5. En utilisant l'inégalité de Cauchy- shwartz (QUEST.3) , montrer que pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ on a l'inégalité, $\|f\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|f\|_2$.

6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in [-1,1]$ on pose $f_n(x) = x^n$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$ et en déduire que les deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

7. Pour tout entier $n > 0$ on définit une fonction $g_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par les expressions,

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1,0] \\ nx, & \text{si } x \in \left]0,\frac{1}{n}\right] \\ 1, & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

i) En admettant que la suite (g_n) et de Cauchy dans l'espace normé $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \| \ \|_2)$. Montrer que cette suite n'a pas de limite dans l'espace normé $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \| \ \|_2)$.

ii) En déduire que $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \| \ \|_2)$ n'est pas complet.

Sujet 2

Exercice1 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, telle que $f(0) = 0$, et telle que f soit sous-additive,*i.e.*

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : f(u+v) \leq f(u) + f(v)$.

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que $d' = f(d)$ est une distance sur E.
2. Application : montrer que

$$d = d^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$$

est une distance sur E.

Exercice2 : (sur 6 points) (question de cours)

On dit qu'un ensemble C de $\mathbb{R}^d$ est convexe s'il vérifie

$$\text{pour tous } x\ , y \in C \text{ et pour tout } t \in [0;1],\ (1-t)x + ty \in C.$$

1. (i) Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ est convexe.
(ii) Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe.
2. Soit C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$.
(i) On suppose que C contient deux boules (ouvertes) de rayon $r > 0$ de centres respectifs x et y.
Montrer alors que C contient toutes les boules de rayon $r > 0$ de centre $(1-t)x + ty,\ t \in [0;1]$.
(ii) En déduire que l'intérieur de C est convexe.
3. Montrer que l'adhérence d'un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ est aussi convexe.
Exercice3 : Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit pour $f \in E$,

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \int_0^1 x\,|f(x)|\,dx \\ N_2(f) &= \left(\int_0^1 x\,|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

1. Vérifier que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E,\ N_1(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N_2(f)$ (c'est- à-dire que N_2 domine N_1).
3.Montrer qu'en revanche N_1 ne domine pas N_2, et donc que ces deux normes ne sont pas équivalentes
(Considérer f_n définie par $f_n(x) = n - n^2 x$ si $x \in [0; 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$).

Sujet 3
Exercice1 :

1-Par définition, les ouverts sont stables par réunion quelconque et par intersection finie.Les fermés sont stables par intersection quelconque et par réunion finie. Cependant, montrer que

l'intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée.

2 -Montrer que l'intervalle $]-1, 2]$ est un ouvert de $[-3, 2]$ muni de la topologie induite par τ_u (topologie usuelle).

3 - $\mathbb{Q}$ est il un ouvert de $\mathbb{R}$?(justifier)

4 - $\mathbb{Q}$ est il un fermé de $\mathbb{R}$?(justifier)

Exercice2 :

5- Donner la définition de l'intérieure , noté ici A^0, d'une partie A, d'un espace topologique (E, τ)

6 - Soit $A,\ B$ des parties d'un espace topologique E. Pour tout ouvert O de E inclus

dans $A \cap B$, démontrer que O conteu dans l'intersection $A^0 \cap B^0$.

7 - En déduire $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

Exercice3 :

Soit E un ensemble non vide .On définit une application d sur $E \times E$ par : $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,y) = 0$ si $x = y$.

8 - Montrer que c'est une distance sur E.

9 - Quelles sont les ouverts et les fermés de l'espace métrique (E,d)?

10 - Quelles sont les suites de Cauchy sur E?

Exercice4 :

On considère sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ les deux normes définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

11 - Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.(indication $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Sujet 4

Exercice1 :

Soit $E =]0, +\infty[$. *Pour* $x,\ y \in E$, *on pose*

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

1. *Démontrer que* d *est une distance sur* E.
2. *Déterminer la boule ouverte* $B(1,\ 1)$ *pour cette distance.*
3. *La partie* $A =]0,\ 1]$ *est-elle bornée pour cette distance ?*
4. *Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.*
5. *L'espace métrique* $(E,\ d)$ *est-il complet ?*

Exercice2 :

Si A est une partie d'un espace topologique E, la frontière de A, notée ∂A, est l'ensemble $\partial A = \overline{A} - A^\circ$.

1. Montrer que ∂A est un fermé. (Montrer que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$)
2. D'eterminer la frontière des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2 \right\}. \\ A_2 &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \\ A_3 &=]-2, 1[\times [0,1]. \end{aligned}$$

Exercice3 :

1. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

$$\begin{aligned} E_1 &= \{2^n;\ n \geqslant 0\} \\ E_2 &= \mathbb{N} \times \mathbb{R} \\ E_3 &= l'ensemble\ des\ nombres\ premiers. \end{aligned}$$

2. Montrer que $\{n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{3n+2,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont équipotons.
3. Montrer que le sous-ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense pour l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Sujet 5

Exercice 1. (Questions de cours)Soit (E, d) un espace métrique.

1.Qu'est- ce qu'un ouvert de E?

2. Démontrer qu'une intersection finied'ouverts est ouverte. Donner un exemple d'une intersections d'ouverts qui n'est pas ouverte.

3. Montrer qu'une suite convergente est toujours une suite de Cauchy.

4. Montrer que toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence ℓ, converge vers cette valeur d'adhérence ℓ.

5. Soit O une partie ouverte de l'espace métrique (E, d). Démontrer que pour toute partie A de E on a

$$A \cap O = \phi \Leftrightarrow \overline{A} \cap O = \phi.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose :

$$\|P(X)\|_\infty = \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\} \text{ et } \|P(X)\|_+ = \sup\{|P(t)|,\ t \in [0,1]\}.$$

1. Montrer que $\|.\|_+$ est une norme sur E.

2. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Indication : On pourra considérer les polynômes $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.

Exercice 3. Soit $E =]-1, +\infty[$. Pour $x, y \in E$, on note

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \right|.$$

1. Démontrer que d est une distance sur E.

2. Déterminer la boule $B(0,1)$ pour cette distance.
3. La partie $A =]-1,0]$ est-elle bornée pour cette distance?
4. Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.
5. L'espace métrique (E,d) est-il complet ?
6. Montrer que la fonction, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est 1−Lipschitzienne sur $[0,1]$.

Sujet 6

Exercice1 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, telle que $f(0) = 0$, et telle que f soit sous-additive,i.e.

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : f(u+v) \leq f(u) + f(v)$.

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que $d' = f(d)$ est une distance sur E.

2. Application : montrer que

$$d = d^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

est une distance sur E.

Exercice2 :

Soit X un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On suppose que

$$\forall (x_n) \subset X : x_n \xrightarrow{d_1} x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x \quad \text{et que } (X,d_1) \text{ est compact}$$

1. Démontrer que si F est un fermé dans (X,d_2), alors F est fermé aussi dans (X,d_1).
(On pourra utiliser la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites).

2. Démontrer que (X,d_2) est compact.

3. Démontrer que si F est un fermé dans (X,d_1), alors F est fermé aussi dans (X,d_2).

4. Conclure que d_1 et d_2 définissent la même topologie.

Exercice 3 :

Pour $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $p \in]0,+\infty[$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ et } \|x\|_\infty = \max\{|x_i|\,; i = 1,...,n\}.$$

1. Pour $n = 2$, dessiner $B_p = \left\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p \leq 1\right\}$ pour $p = \frac{1}{2}, 2, \infty$.

2. Montrer que $\|.\|_p$ n'est pas une norme pour $p \in]0,1[$.

3. Montrer que $\|.\|_p$ *est une norme pour* $p \in]1, +\infty]$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p \longrightarrow \|x\|_\infty$ *quand* $p \longrightarrow +\infty$.

Sujet 7

Exercice1 : Questions de cours et applications

1- Est- ce qu'il existe un espace métrique contenant 8 ouverts et 9 fermés? (justifier)

2- Montrer que l'intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée.

3- Est-ce-que 0 est un point d'accumulation pour $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$? (justifier)

4- $\mathbb{Q}$ est il un ouvert de $\mathbb{R}$?(justifier)

5- Quelles conditions doivent vérifier deux parties différentes A et B de E pour que $\{\phi, A, B, E\}$ soit (l'ensemble des ouverts) une topologie sur E?

Exercice2 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = -x^2+5x-6$. On introduit les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) < 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0\}.$$

1- Montrer que A est ouvert et B est fermé .

2- Si f est la fonction constante égale à zéro($f \equiv 0$) , déterminer les ensembles A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Exercice3 :

On définit une application d sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par : $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

1- Montrer que d définie une distance sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la boule ouverte $B(-1, \frac{3}{2})$.

Bibliographie

[1] I.T. Adamson, A General Topology Workbook, Birkhäuser, Boston, 1996.

[2] S. Banach, « Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales », Fund. Math., vol. 3, 1922, p. 133 – 181.

[3] F.Bakir, Polycopié de Topologie générale - Ency Education, Algérie, Béjaia. 2017.

[4] J.P. Bourguignon, Calcul variationnel, Palaiseau, Éditions de l'École Polytechnique, p 328, 2008.

[5] N. Bourbaki, Topologie générale, eléments de mathématique éd, vol. Fascicule II, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1142, Hermann, 1965.

[6] N. Bourbaki, Éléments de mathématique : IV. Nombres réels

[7] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, livre III : Topologie générale, Hermann,1971.

[8] E. Burroni. La topologie des espaces métriques, Ellipses, 2005.

[9] G. Christol, Anne COT et Charles MARLE, Topologie, Ellipses, 1997.

[10] G. Choquet, Cours de topologie, Broché, 2000.

[11] J. Dieudonné, Éléments d'Analyse, tome I, Gauthiers-Villars,1972.

[12] J. Dixmier, Topologie Générale, Presses Universitaires de France, Paris, 1981.

[13] G. Flory, Topologie et Analyse, Tome 1 : Topologie (exercices avec solutions), Broché, 2017.

[14] N. Elhage Hassan, Topologie générale et espaces normés. Dunod, Paris,2011.

[15] J.P. Marco, Analyse pour la licence, Masson, 1998.

[16] J. Munkres, Topology, Pearson New International Edition, 2014.

[17] H. Queffélec, Topologie, Dunod, 2002, 4−ème édition, 2012.

[18] J.M. Salanskis et Hervé Barreau, L'herméneutique formelle : l'infini, le continu, l'espace, Paris, Éditions du Centre national de la recherche scientifique, coll. « Fondements des sciences », 1991, p 258.

[19] G.F. Simmons, Introduction to Topology and Modern Analysis, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, Malabar, Florida, 1983.

[20] L.A. Steen & J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology, Dover Publications, Inc, New York, 1995.

[21] J.S. Raymond, Calcul différentiel et variable complexe : cours et exercices, Paris : Calvage & Mounet ; DL 2007.

[22] Y. Sonntag. TOPOLOGIE et ANALYSE FONCTIONNELLE, Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés, Ellipses, 1998.

[23] C. Wagschal. Topologie et Analyse Fonctionnelle, Hermann Éditeurs, Paris, 2012.