الفوائد المركبة

تمهيد :

ظهر مفهوم الفائدة المركبة بظهور التوظيفات طويلة الأجل التي تكون مدتها سنة فما فوق و الشيء الملاحظ أنه الفائدة المحصل عليها في نهاية الفترة الأولى لا تسحب بل تضاف لرأس المال الموظف في بداية المرحلة الثانية ، و هذه العملية التي تعتمد على إضافة الفائدة الى رأس المال تسمى بالرسملة capitalisation أي تحويل الفائدة إلى رأس مال الذي يشكل أساسا لحساب فائدة المرحلة المقبلة .

1- تعريف :

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة الناتجة عن إضافة الفائدة البسيطة للفترة إلى الأصل لكي تنتج بدورها فائدة للفترة الموالية قد تكون المدة : ثلاثية ، سداسية ، سنوية

2- القانون الأساسي للفائدة المركبة :

إذا كان C_0 هو المبلغ الموظف ، i هو معدل التوظيف ، n : مدة التوظيف فإن القيمة المحصلة C_n تكون بالشكل التالي :

الفترة	رأس المال الموظف في بداية الفترة	الفائدة	القيمة المحصلة
1	C_0	$C_0 i .1$	$C_0+C_0 i = C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i)i .1$	$C_0(1+i)+C_0(1+i)i=C_0(1+i)^2$
3	$C_0(1+i)^2$	$C_0(1+i)^2\ i .1$	$C_0(1+i)^2+C_0(1+i)^2 i=C_0(1+i)^5$
.			
.			
.			
.			
n	$C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1}\ i .1$	$C_0(1+i)^{n-1}+C_0(1+i)^{n-1}i=C_0(1+i)^n$

القيمة المحصلة بعد n فترة من التوظيف هي القيمة الحالية :

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n} \quad ، \quad C_n = C_0(1+i)^n$$

مثال 1: أحسب القيمة المحصلة لرأس مال قدره 9000 دج لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة 8%

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow \qquad C_3 = 9000(1+0.008)^3 = 113374.08\ \text{DA}$$

مثال 2: ما هي جملة أصل قدره 12000دج مودع في البنك لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة 4% للسداسي ؟

$$n = 5 * 2 = 10$$

$$C_{10} = 12000(1+0.004)^{10} = 12000\ .\ 1.480244$$

$$C_{10} = 17762.92\ \text{DA}$$

3- ملاحظات هامة :

أ- للحصول على العلاقة الأساسية للفائدة المركبة $C_n = C_0(1+i)^n$ افترضنا أن رسملة الفوائد رسمية ، معدل الفائدة سنوي و المدة معبر عنها بالسنوات كذلك .

ب- إن معدل التوظيف و مدة التوظيف يتبعان الرسملة

مثلا إذا كانت الرسملة سداسية فإن كل من المدة و المعدل يجب أن يكونا سداسيين

ت- الجدول السابق (العمود الرابع) يظهر أن القيم المحصلة المتتالية في نهاية المدة 1،2،3......،n رسملة الفوائد تشكل متتالية هندسية ذات أساس $(1+i)$ و الحد الأول هو الأصل C_0

ث- إن العلاقة الأساسية للفائدة البسيطة تعطي مباشرة الفائدة المتحصل عليها من رأس مال معين ، لكن العلاقة الأساسية للفائدة المركبة تعطي القيمة المحصلة من طرف رأس مال معين و يمكن أن تتحصل على الفائدة كما يلي :

$$I = C_n - C = C(1+i)^n - C = C\left[\ (1+i)^n - 1\right]$$

4- مدة رسملة الفوائد :

المدة المستعملة عادة هي السنة ، و لكن يمكن أن تكون المدة سداسية ، ثلاثية أو شهرية أو أية مدة أخرى.

ففي الحالة التي تكون فيها المدة على شكل كسر أي $n = K + F$ لدينا طريقتين أو حلين لحساب القيمة المحصلة C_n

طريقة 1: طريقة الحل الرشيد (العقلاني)

المبدأ الأساسي لهذه الطريقة هو حساب الفائدة المركبة بالجزء الصحيح و الفائدة البسيطة للجزء الكسري

$$n = K + F \qquad\qquad C_n = C_0(1+i)^n$$

K هو الجزء الصحيح و F هو الجزء الكسري

$$C_n = C_0(1+i)^{K+F}$$

- حساب الفائدة المركبة بالجزء الصحيح

$$C_K = C_0(1+i)^K$$

- حساب الفائدة البسيطة بالجزء الكسري

$$C_F = C_K\, i\,.F = C\,(1+i)^K\, i\,.\,F$$

$$C_{F+K} = C_K + C_F = C\,(1+i)^K + C\,(1+i)^K i.F$$

$$C_{F+K} = C\,(1+i)^K[1+i.F]$$

مثال : أحسب القيمة المحصلة بالحل الرشيد لمبلغ قيمته 24000 دج لمدة سنتين و 4 أشهر بمعدل فائدة مركبة

$$C_{F+K} = C\,(1+i)^K[1+i.F]$$

$$C_{2+\frac{4}{12}} = 24000\,(1+0.04)^2[1+0.04.\frac{4}{12}] = 26304.522$$

طريقة 2 : طريقة الحل التجاري :

في هذه الحالة نقوم بحساب القيمة المحصلة للجزء الصحيح و الجزء الكسري

$$C_n = C\,(1+i)^{K+F} = C\,(1+i)^K.(1+i)^F$$

$$C_{K+F} = C\,(1+i)^K.(1+i)^F$$

مثال 2: نفس المثال :

$$C_{2+\frac{4}{12}} = 24000\,(1+0.04)^2.(1+0.04)^{\frac{4}{12}} = 26500\text{ DA}$$

ملاحظة : النتائج يمكن الوصول إليها باستخدام الآلة الحاسبة أو الجداول المالية

5- العلاقة بين القيمة المحصلة و الزمن في الفائدة المركبة :

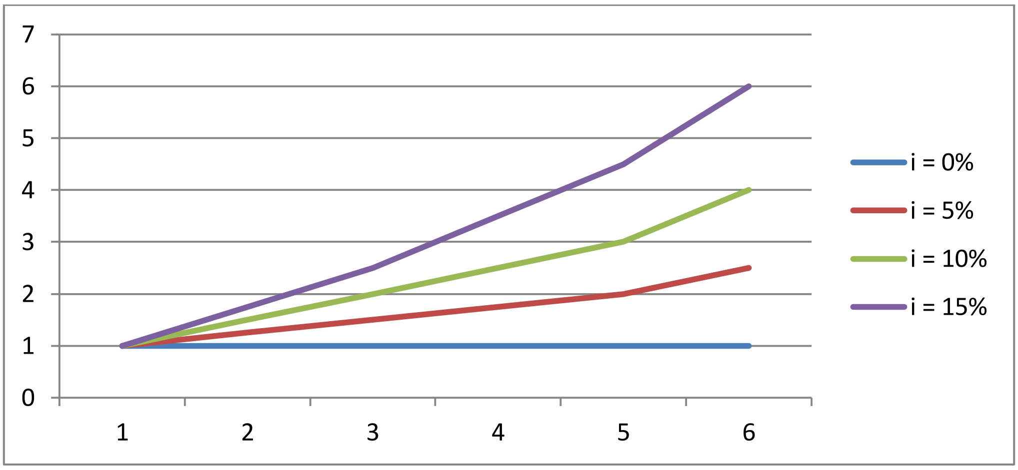
القيمة المحصلة لدينار واحد $C_n = C\,(1+i)^n$

$$i = 5\%$$

$$C_n = (1+0.05)^1 = 1.05$$

$$(1+0.05)^2 = 1.1025$$

$$(1+0.05)^3 = 1.157625$$



العلاقة بين n و C_n غير خطية في حين هي خطية في الفائدة البسيطة

6- استعمال قانون الفائدة المركبة :

* المعدل مجهول :

مثال : رأس مال قدره 30000 دج أودع البنك بمعدل فائدة مركبة لمدة 4 سنوات لتكون جملته 40438.08 دج أحسب معدل الفائدة المستعمل .

$$C_n = C\,(1+i)^n \Leftrightarrow 40438.08 = 30000\,(1+i)^4$$

$$(1+i)^4 = 1.347936$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد أن $i = 7.75\%$

* المدة مجهولة :

مثال : مبلغ قدره 2000 دج أودع لمدة معينة بمعدل فائدة 6 % سنويا ليعطي جملة قدرها 2676.452 حدد هذه المدة .

$$C_n = C\,(1+i)^n \Leftrightarrow 2676.452 = 2000\,(1+0.006)^n$$

$$(1.06)^n = 1.3382.26$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد أن $n = 5$ ans

أو $(1.06)^n$=1.3382.26

$$\ln 1.06^n = \ln 1.3382.26$$

$$n \ln 1.06 = \ln 1.3382.26$$

$$n = \frac{\ln 1.338226}{\ln 1.06} = \frac{0.291345}{0.058269} = 5 \text{ ans}$$

* طريقة التناسب في حساب المعدل :

مثال : حدد معدل الفائدة الذي بموجبه تصبح قيمة 100 دج بعد 10 سنوات جملة بمقدار 2500 دج

$$C_n = C\,(1+i)^n \Leftrightarrow 2500 = 100\,(1+i)^{10}$$

$$(1+i)^{10} = \frac{2500}{1000} = 2.5$$

من الجدول المالي رقم 01 ، نجد أن $\%\,9.5 < i < \%9.75$

و بطريقة التناسب يمكن تحديد المعدل كما يلي :

$$i = 9.5 + x$$

$$(1+0.0975)^{10} = 2.535393 \qquad i \neq \frac{v_c - v_m}{v_s - v_m}$$

$$i = 9.5 + \frac{2.5 - 2\ \ldots\ldots}{2.535393 - 2.478228} = 9.5 + \frac{0.021772}{0.057165} = 9.515$$

7- معدلات الفائدة المتناسبة و المتكافئة :

أ- المعدل التناسبي :

يكون معدلان ينتميان لفترتين مختلفتين متناسبان إذا تساوت النسبة بينهما مع النسبة بين فترتيهما .

لحساب المعدل التناسبي يكفي أن نقسم المعدل السنوي على عدد القنوات الموجودة في السنة .

المعدل السداسي التناسبي = $\frac{\text{المعدل السنوي}}{2}$

المعدل الثلاثي التناسبي = $\frac{\text{المعدل السنوي}}{4}$

المعدل الشهري التناسبي = $\frac{\text{المعدل السنوي}}{12}$

ب- المعدل التكافؤي:

المعدلات المتكافئة هي المعدلات المختلفة التي تعطي نفس الجملة لفترة زمنية معينة للاستثمار أو القرض

$$C\,(1+i_a)^1 = C\,(1+i_k)^k$$

$$1+i_a = (1+i_k)^k$$

مثال : أحسب المعدل السداسي التناسبي و التكافؤي لمعدل سنوي 6

المعدلات التناسبية :

السداسي التناسبي $i_2 = \frac{i}{2} = \frac{6}{2} = 3\%$

الثلاثي التناسبي $i_2 = \frac{i}{4} = \frac{6}{4} = 1.5\%$

الشهري التناسبي $i_2 = \frac{i}{12} = \frac{6}{12} = 0.5\%$

المعدل التكافؤي :

$$1+i_a = (1+i_k)^k$$

$$1+0.06 = (1+i_2)^2 \Leftrightarrow 1.06 = (1+i_2)^2$$

$$1+i_2 = \sqrt{1.06} \Leftrightarrow i_2 = \sqrt{1.06} - 1 = 0.029563$$

$$i_2 = 2.9563\%$$

ملاحظة : المعدل التناسبي > المعدل التكافؤي .

$$1+i = (1+i_4)^4 \Leftrightarrow (1+0.06)^{\frac{1}{4}} = 1+i_4 \Leftrightarrow i_4 = (1.06)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$i_4 = 0.014673$ $i_4 = 1.4673\ \%$

8- تسديد الديون بعد تاريخ الاستحقاق و قبل تاريخ العقد :

مثال :

مبلغ قيمته 100000 دج يستحق بعد 5 سنوات بمعدل فائدة 10 %

أحسب المبالغ المسددة في الحالات التالية :

- إذا تم التسديد بعد إمضاء العقد
- إذا تم التسديد سنتين قبل تاريخ الاستحقاق
- اذا تم التسديد سنتين بعد تاريخ الاستحقاق
- اذا تم التسديد سنة قبل تاريخ العقد

1/ التسديد بعد إمضاء العقد

$$C= C_n (1+i)^{-n}=10000 (1.1)^{-5} = 10000 * 0.620921 \qquad C= 62092.13 \text{ DA}$$

2/ إذا تم التسديد سنتين قبل تاريخ الاستحقاق:

$$C_2= C_n (1+i)^{-2}=10000 (1.1)^{-2} = 82644.62$$

أو $C_3= C (1+i)^3=62092.13 (1.1)^3$

3/ إذا تم التسديد سنتين بعد تاريخ الاستحقاق:

$$C_7= C_5 (1+i)^2=10000 (1.1)^2 = 121000\ DA$$

أو :

$$C_7= C (1+i)^7=62092.13 (1.1)^7$$

4/ إذا تم التسديد سنة قبل تاريخ العقد :

$$C= C_n (1+i)^{-6}=100000 (1.1)^{-6} = 56447.39\ DA$$

أو

$$C= C_0\ (1+i)^{-1}=62092.13\ (1.1)^{-1} =$$

8-الخصم بالفائدة المركبة :

الخصم يساوي المبلغ المستحق في المستقبل C_n مطروحا منه القيمة الحالية

$$E_c = C_n - C = C(1+i)^n - C = C\,[(1+i)^n - 1]$$

مثال : ورقة تجارية قيمته الاسمية 100000دج تستحق بعد 5 سنوات تفاوضت بمعدل 4 % ، أحسب قيمتها الحالية و قيمة الخصم .

$$C_n = (1+i)^n \Leftrightarrow C= C_n\ (1+i)^n$$

$$=100000\ (1.04)^{-5} = 82192.71$$

حساب الخصم : $E_c = C_n - C$

$$= 100000-82192.71=17807.29$$

مثال : فوضت ورقة تجارية قيمتها الاسمية 20000دج تستحق بعد 4 سنوات خصمت بفائدة مركبة فكان مبلغ الخصم 3860 دج

- أحسب معدل الخصم .

$$E_c = C_n - C \Leftrightarrow E_c = C(1+i)^n - C = C\,[(1+i)^n - 1$$

$$E_c = C_n - C_n(1+i)^{-n} = C_n\,[(1+i)^n - 1]$$

$$C_n\,[(1+i)^{-n} - 1\,]$$

$$3860 = 20000\,[(1+i)^{-n} - 1\,]$$

$$3860 = 20000 - 20000\,[(1+i)^{-4}]$$

$$(1+i)^{-4} = 0.807 \Leftrightarrow i = 5.5\%$$

9-التكافؤ بفائدة مركبة :

تتكافأ الديون أو الاوراق التجارية بفائدة مركبة إذا تساوت بينها القيم الحالية و بمعدل واحد .

9-1- تكافؤ ورقتين تجاريتين:

$$C_1\ (1+i)^{-n1} = C_2\ (1+i)^{n2}$$

9-2- تكافؤ مجموعة أوراق تجارية :

$$C_1\ (1+i)^{-n1} + C_2\ (1+i)^{-n2} + C_3\ (1+i)^{-n3} + \cdots \ldots . + C_k\ (1+i)^{-nk} =$$
$$C_1{}'\ (1+i)^{-n1} += C_1{}'\ (1+i)^{-n1}$$

$$+C_2{}'\ (1+i)^{-n2} + C_3{}'\ (1+i)^{-n3} + \ldots\ldots . + C_k{}'\ (1+i)^{-nk}$$

مثال : شخص مدين بالمبالغ التالية

10000 دج واجبة الدفع بعد 4 سنوات

20000دج واجبة الدفع بعد 2 سنة

اتفق الطرفان على تسديد الدين بعد 3 سنوات .

أحسب مبلغ الدين الجديد إذا كان معدل الفائدة 6 %

$$C_n\ (1+i)^{-n1} = C_1\ (1+i)^{-n1} + C_2\ (1+i)^{-n2}$$

$$=1000\ \ (1.06)^{-4} + 20000\ (1.06)^{-2}$$

$$s\ (1.06)^{-3}$$

$$=7920.93+17799.9288=25720.85$$

$$S=\frac{25720.85}{(1.06)^{-3}} \qquad =30633.94$$

مثال 2 :

شخص مدين بالمبالغ التالية :

- 50000 دج تستحق الدفع بعد 6 سنوات
- 60000 دج تستحق الدفع بعد 8 سنوات

اتفق الطرفين على تعويض المدينين بمبلغين آخرين الأول قيمته 40000 دج يدفع بعد 4 سنوات و الثاني يدفع بعد 10 سنوات بمعدل فائدة مركبة 6 % .

أحسب قيمة المبلغ الثاني

$$C_1\ (1+i)^{-n1}+C_2\ (1+i)^{-n2} = C_1'\ (1+i)^{-n1}+C_2'\ (1+i)^{-n2}$$

$$5000\ (1.06)^{-6} + 6000\ (1.06)^{-8} = 4000\ (1.06)^{-4}+C_2'\ (1.06)^{-10}$$

$$35248.03 + 37644.74 = 31683.75+C_2'0.558394$$

$$C_2' = 73799.18\ DA$$

10– تاريخ الاستحقاق المشترك :

هو التاريخ الذي يتم فيه تبديل مجموعة من الديون القديمة بدين جديد بشرط أن تكون القيمة الاسمية للدين الجديد لا تساوي مجموع القيم الاسمية للديون القديمة. $c \neq C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C_n$

مثال : حدد تاريخ الاستحقاق المشترك لدين قيمته 5000 دج

يعوض ثلاثة ديون و هي كما يلي :

- 1000 دج تستحق بعد تستحق بعد 6 أشهر (سداسي)
- 18000 دج تستحق بعد 8 أشهر (3 سداسيات)
- 2000 دج تستحق بعد 30 شهر (5 سداسيات)

بمعدل سداسي 2.5 %

$$c\ (1+i)^{-n} = C_1\ (1+i)^{-n1} + C_2\ (1+i)^{-n2}+C_3\ (1+i)^{-n3}$$

$$5000\ (1.025)^{-n} = 10000\ (1.025)^{-1} + 18000\ (1.06)^{-3} + 20000\ (1.025)^{-5}$$

$$(1.025)^{-n} = 0.889259$$

$5<n<6$ سداسيات

* باستخدام طريقة التناسب نجد 5 سداسيات و 7 أيام

$$(1.025)^{-5} = 0.883854$$
$$(1.025)^{-6} = 0.862296$$

$$n = 5 + \frac{0.889259-0.862296}{0.883854-0.862296} = 5 + \frac{0.026963}{0.021557} = 5 + 1.25$$

تاريخ الاستحقاق المتوسط :

هو التاريخ الذي يتم فيه تبديل ديون قديمة بدين جديد شرط أن تكون القيمة الاسمية الجديدة تساوي مجموع قيم الدين القديم .

مثال : شخص مدين كالآتي :

- 2000 دج تستحق بعد سنة
- 4000 دج تستحق بعد سنتين
- 3000 دج تستحق بعد 3 سنوات

نريد تعويض هذه الديون بدين واحد قيمته 9000 دج بمعدل 4 % . حدد تاريخ التعويض .

$$C_n\ (1+i)^{-n} = C_1\ (1+i)^{-n1} + C_2\ (1+i)^{-n2} + C_3\ (1+i)^{-n3}$$

$$9000\ (1.04)^{-n} = 2000\ (1.04)^{-1} + 4000\ (1.04)^{-2} + 3000\ (1.04)^{-3}$$
$$(1.04)^{-n} = 0.920918$$

من الجدول المالي رقم 02 نجد أن $2<n<3$

$$(1.04)^{-2} = 0.924556$$

$$(1.04)^{-3} = 0.888996$$

$$n = 2 + \frac{0.924556-0.920918}{0.924556-0.888996} = 2 + \frac{0.003638}{0.03556} = 2 + 1.25 \qquad * 360$$

$$= 2 + 36.83$$

تاريخ الاستحقاق المتوسط هو سنتين و شهر و 7 أيام .

11- مردودية الاستثمارات :

قبل شراء الاستثمار أو إنجازه تقوم المؤسسات بدراسات تقديرية للأرباح السنوية التي سوف تجنيها ثم تقارن بين تكلفة الاستثمار و إيراداته و ذلك بمعدلات فائدة معينة .

مثال : تنوي مؤسسة شراء آلة انتاج ، عمرها الانتاجي 5 سنوات ، الارباح التقديرية الصافية المنتظرة من شراء الآلة هي :

- 10000 دج في السنة الأولى
- 20000 دج في السنة الثانية
- 30000 دج في السنة الثالثة

ما هي القيمة التي تخصصها المؤسسة لشراء هذه الآلة حتى تحقق معدل مردودية 8 %

الحل : تكون المقارنة في الزمن 0 بين تكلفة الآلة و الأرباح المنتظرة

تكلفة الآلة (المبلغ المخصص) :

$$1000\,(1.08)^{-1} + 2000\,(1.08)^{-2} + 3000\,(1.08)^{-3} = 50221$$

المبلغ المخصص هو 50221 دج و يحقق معدل مردودية 8 %