$\Rightarrow S_{xx}(f) = 2.2sinc(2f).2sinc(2f) = 8sinc^2(2f)$

Chapitre 6

Echantillonnage et signaux discrets

6.1 Signaux discret

6.1.1 *Introduction*

Dans le traitement de signal, le signal continu est discrétisé pour pouvoir le mémoriser, le transmettre grâce à l'opération de conversion analogique-numérique. Dans ce traitement, le signal discret est obtenu suite à l'opération d'échantillonnage qui consiste à prélever des échantillons du signal continu à une fréquence d'échantillonnage.
Le théorème de Shannon permet de limiter la fréquence minimale pour laquelle, le signal peut être échantillonné sans perdre l'information qu'il contient. La condition sur la fréquence d'échantillonnage doit être respectée afin de pouvoir reconstituer correctement le signal continu à partir des échantillons.

6.1.2 *Principe de l'échantillonnage*

L'échantillonnage est une représentation des valeurs du sinal continu $x(t)$ à des instants nT_e. Pour lequel T_e est appelé période d'échantillonnage.
On obtient donc une suite de valeurs $x_e(t) = n(nTe)$
$T_e = t_{n+1} - t_n$ appelé période d'échantillonnage
$f_e = \frac{1}{T_e}$ appelé fréquance d'échantillonnage

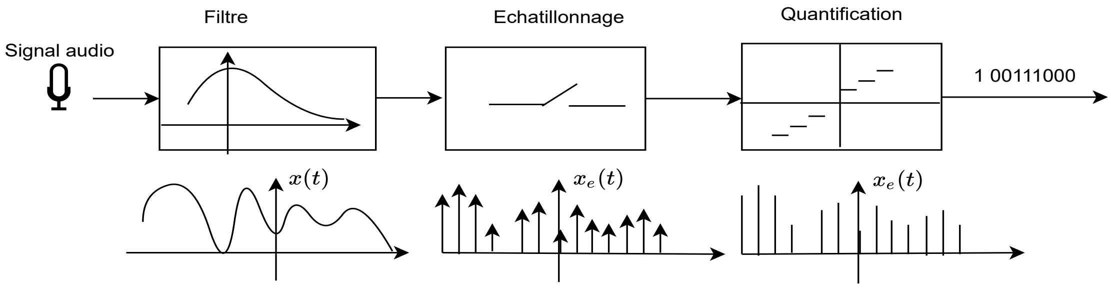
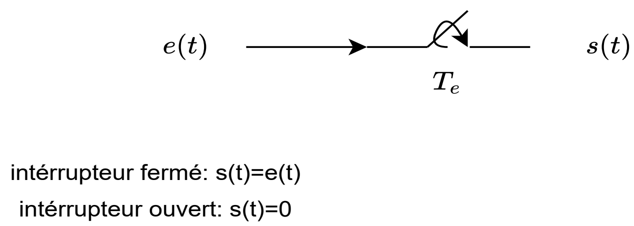


FIGURE 6.1 – **Chaine de numérisation**

6.2 *Echantillonnage réel*

L'échantillonnage d'un signal est basé sur l'ouverture et la fermeture de l'interrupteur pour chaque période d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$



6.3 *Echantillonnage idéalisé*

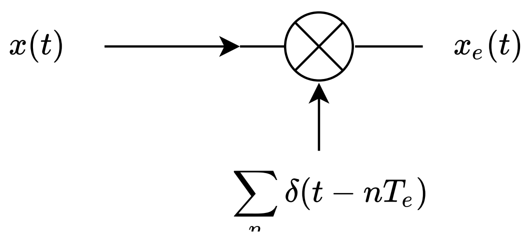
L'échantillonnage idéal est une représentation de l'interrupteur par une fonction mathématique défini par un train d'impulsion représentant l'ouverture et la fermeture de l'interrupteur pendant un temps infiniment petit.

$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

6.3.1 *Spectre d'un signal échantillonné*

$TF\{x_e(t)\} = X_e(f) = TF\{x(t).\delta_T(t)\}$

$X_e(f) = TF\{x(t)\} * TF\{\delta_T(t)\}$



On sait que : $TF\{x(t)\} = X(f)$ et $TF\{\delta_T(t)\} = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e)$

Alors : $X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e)$

D'après la propriété de l'imulsion de Dirac, on a :

$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Ce qui permet d'avoir :

$X_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$

6.3.2 *Théorème d'échantillonnage*

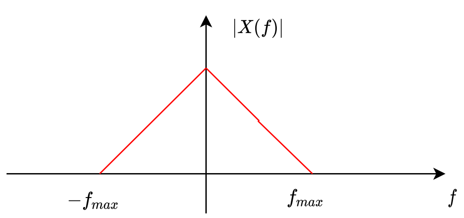
Un signal peut être représenté par ses échantillons et être récupéré lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale présente dans le signal.

La fréquence de Nyquist est égale à : $\frac{F_e}{2}$

6.3.3 Analyse fréquentielle

Soit $|(X(f)|$ le spectre du signal $x(t)$ qui représente le motif principal.

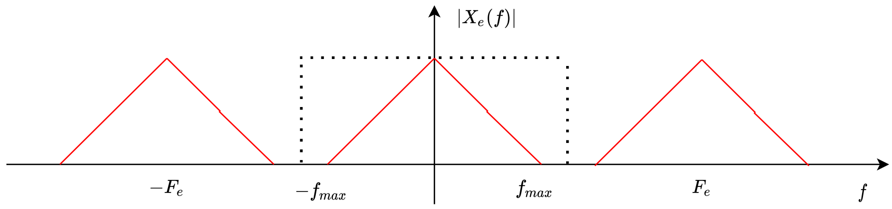
$F_e \geqslant 2F_{max}$:



Le spectre du signal échantillonné est le même que le motif pour $n = 0$

On constate que la périodisation du motif principal est disjointe.

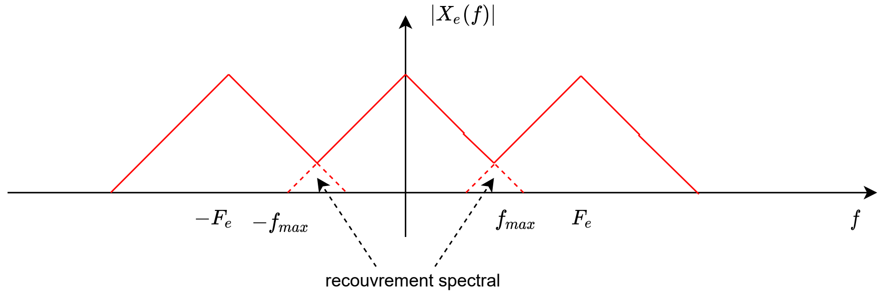
Ceci permet d'extraire correctement $X(f)$ en utilisant un filtre passe-bas. Ceci rend la reconstitution du signal d'origine $x(t)$ possible à partir des échantillons



$x_e(t)$.

$F_e < 2F_{max}$:

Les motifs obtenus par l'échantillonnage en créé un recouvrement spectral. Cela



va rendre la reconstituon du signal impossible à partir des échantillons.

6.4 Transformée en z

La transformée en z zst un outil mathématique exploité pour faciliter l'analyse.

6.4.1 *Définition*

La transformée en z est appliquée dans le domaine discret équivalente à la transformée de Laplace dans le domaine continu suivant quelque différences.

A partir de la transformée de Laplace l'opérateur p est :

$p = \sigma + j\omega$

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

La disrétisation de $x(t)$ permet de :

- Remplacer $x(t)$ par sa forme échantillonné $x(n)$.

- L'intégrale devient une sommation.

$$X(\sigma,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-\sigma n}e^{-j\omega n}$$

On pose $r^{-n} = e^{-\sigma n}$, on obtient alors :

$$X(\sigma,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

On pose : $z = re^{jw}$

$$TZ\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

L'opérateur z représente un délai (retard) de n échantillons.

Exemple : calculer la transformée en z de $x(n) = (0.5)^n$ pour $n \geq 0$

$x(n) = (0.5)^n = 1 + 0.5 + (0.5)^2 + ... + (0.5)^n$

$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5)^{-n} z^{-n} = 1 + 0.5.z^{-1} + (0.5)^2 z^{-2} + ... + (0.5)^n z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5z^{-1})^n$

6.4.2 *Relation entre la transformée de Fourier et la transformée en z*

$X(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fnT_e}$

T_e période d'échantillonnage du signal $x(t)$

6.4.3 *Région de convergence de la TZ*

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$

C'est une suite de somme infinie des termes d'une suite numérique. La région de convergence dépend de la forme de $x(n)$:

$x(n)$ est un signal droitier ;

$x(n)$ est un signal gaucher ;

$x(n)$ est un signal bilatéral.

6.4.4 *Propriétés de la TZ*

- Linéarité : $TZ\{ax(n) + by(n)\} = aTZ\{x(n)\} + bTZ\{y(n)\}$
- Déphasage : $TZ\{x(n-k)\} = z^{-k} TZ\{x(n)\}$
- Reflexion : $TZ\{x(-n)\} = X(\frac{1}{z}$
- Avance : $TZ\{x(n+k)\} = z^k [TZ\{x(n)\} - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^{-j}]$
- Convolution : $TZ\{x(n) * y(n)\} = TZ\{x(n)\}.TZ\{y(n)\}$
- Echelonnage : $TZ\{a^n x(n)\} = X(\frac{z}{a})$

Théorème de la valeur initiale $x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$

Fonction $x(n)$	TZ	RDC
$\delta(n)$	1	tout z
$u(n) - u(n-a)$	$\dfrac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}$	$z \neq 0$
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$(-a)^n u(n)$	$\dfrac{z}{z+a}$	$\|z\| > a$
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\| > a$
$nu(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$na^n u(n)$	$\dfrac{za}{(z-a)^2}$	$\|z\| > a$

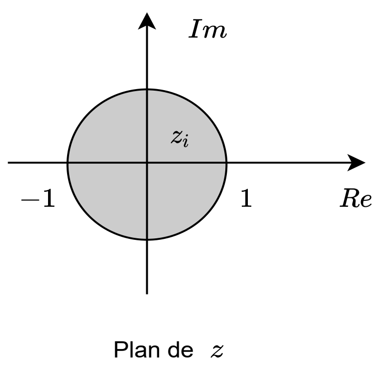
FIGURE 6.2 – Région de convergence selon $x(n)$

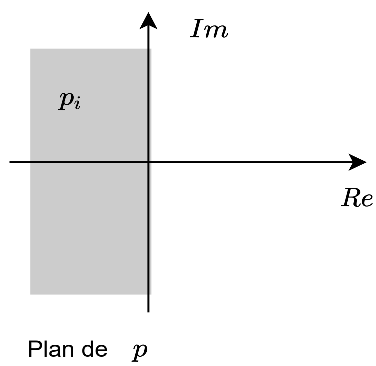
Théorème de la valeur finale $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1, |z|<1} (z-1)X(z)$

6.4.5 *Etude de stabilité de système à temps discret et système à temps continu*

Un système à temps discret est stable si et seulement tous les pôles de sa fonction transfert $G(z) = N(z)/D(z)$, racines de l'équation $D(z) = 0$, ont tous un module < 1, donc les pôles doivent être à l'intérieur du cercle de centre (0,0) et de rayon unité du plan z.

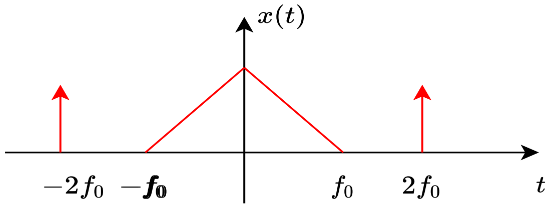
Un système linéaire continu invariant est stable si les pôles (racine du dénominateur) de sa fonction de transfert $G(p) = N(p)/D(p)$, racines de l'équation $D(p) = 0$ sont à partie réelle strictement négative.





Série de TD 6

Exercice 1 Soit $x(t)$ donné par la figure suivante : 1. Représenter le spectre du



signal échantillonné.

2. Représenter le spectre de signal reconstruit $x_r(t)$ ontenu par le filtre passe bas avec : $f_c = \frac{3f_0}{2}$

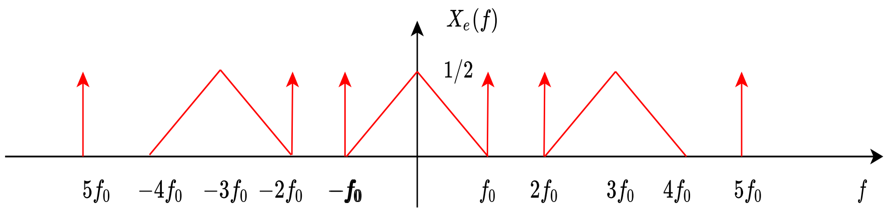
Solution :

$x(t) = a(t) + b(t)$

Avec : $b(t) = \frac{1}{2}(\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0))$

On sait que $TF\{cos(2\pi ft\} = \frac{1}{2}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$ alors $B(f) = cos(4\pi f_0 t)$

$x_e(t) = x(t).\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-nT_e)$



$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nF_e)$

$X_e(f) = tri(f) * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nF_e) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} tri(f-nF_e)$

On sait que : $x_e(t) = b(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-nT_e)$

Alors : $X_e(f) = (\frac{1}{2}(\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)) * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nF_e)$

$X_e(f) = (\frac{F_e}{2}(\delta(f--nF_e-2f_0) + \delta(f+-nF_e 2f_0))$

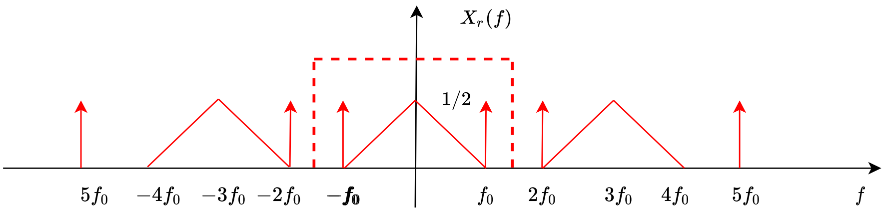
on échantillonne le signal : $X_r(f) = A(f) + \frac{1}{2}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$

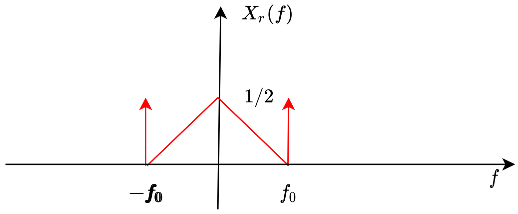
$x_r(t) = a(t) + cos(2\pi f_0 t)$

$x(t) = a(t) + b_1(t) \neq a(t) + b(t)$

avec $b(t) = cos(4\pi f_0 t)$ et $b_1(t) = cos(2\pi f_0 t)$

puisque $x_r(t) \neq x(t)$ alors le théorème de Shanon n'a pas été repecté.





Exercice 2 Soit le signal $x(t) = 500sinc(500\pi t)(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$ avec $f_0 = 8KHz$

1. Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ puis donner sa représentation analytique.

2. Donner l'expression du signal échatillonné $x_e(t)$ échantillonné à la fréquence $F_e = 6KHz$ puis donner sa transformée de Fourier $X_e(f)$ graphiquement dans un interval $[-9KHz, 9KHz]$.

3. Représenter le spectre du signal reconstruit $x_r(t)$ à partir un filtre passe bas $H(f)$ pour les cas suivant :

a).$F = 6KHz$

b).$F = 18KHz$

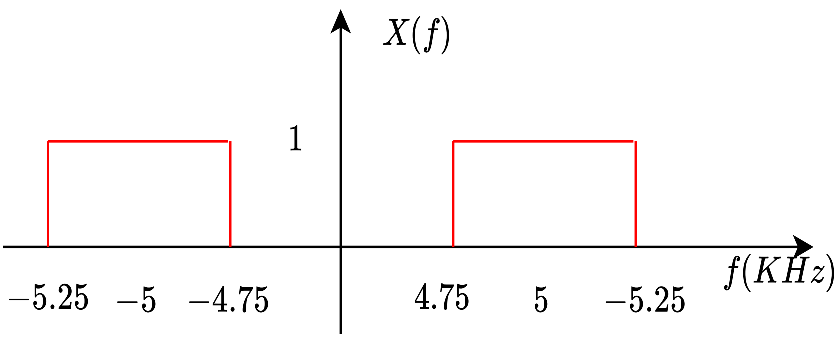
Solution :

1. $x(t) = 500sinc(500\pi t)(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$ avec $f_0 = 800Hz$

$$rect(f) = \begin{cases} 1 & si - F/2 \leqslant F/2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$X(f) = rect(f) * (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) = rect(f - f_0) + rect(f + f_0)$

2. $x_e(t) = x(t).\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$



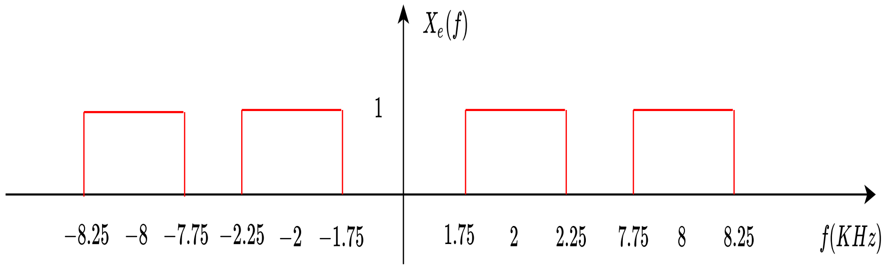
$x_e(f) = X(f)F_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e)$

$= F_e \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$

$F_e \geqslant 2F_{max}$

$X_e(f) = rect(f - f_0) + rect(f + f_0) * F_e \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) = F_e(\sum_{-\infty}^{+\infty} rect(f - nF_e - f_0) + \sum_{-\infty}^{+\infty} rect(f - nF_e + f_0)$

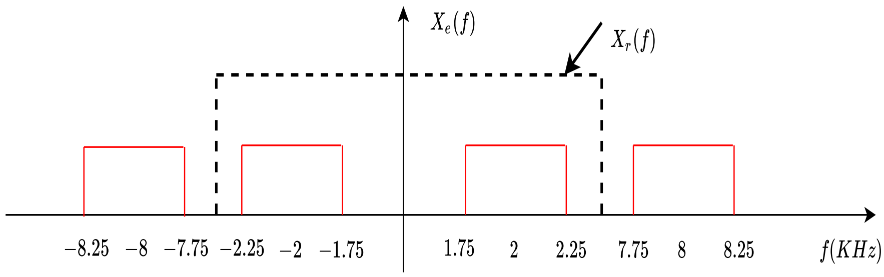
3.a). Pour$F = 6KHz$



La fonction porte est entre $-F/2 \leqslant F/2$ alors :

$X_r(f) = rect(f - 2000) + rect(f + 2000) = rect(f)e - 2j\pi 2000t$

$X(f - f_0) = X(f)e^{-j2\pi f_s t)}$



Alors : $X_r(f) = rect(f)e^{-2j\pi 2000t} + rect(f)e^{2j\pi 2000t}$

$X_r(f) = rect(f)2cos(2\pi 2000t)$

$X_r(t) = 500sinc(\pi 500t)2.cos(2\pi 2000t)$

$X_r(t) \neq x(t)$ donc le théorème de Shannon n'a pas été respecté.

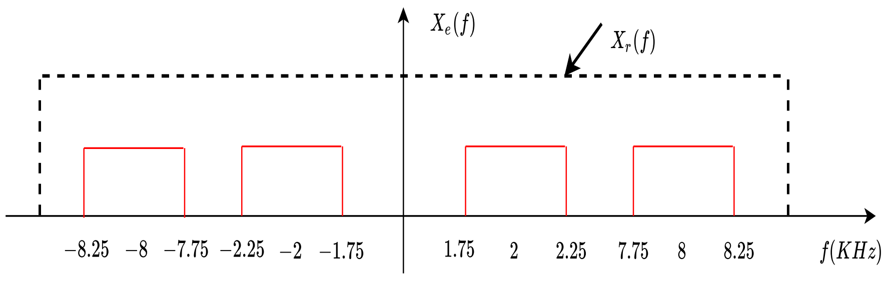
b). Pour$F = 18KHz$

$X_r(f) = rect(f - 8000) + rect(f + 8000) + rect(f - 2000) + rect(f + 2000)$

$X_r(f) = 500sinc(\pi 500t)2cos(2\pi 8000t) + 500sinc(\pi 500t)2cos(2\pi 2000t)$

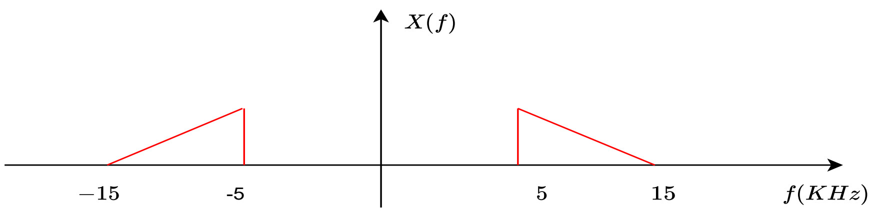
$X_r(f) = 2 * 500 sinc(\pi 500t)(cos(2\pi 8000t) + cos(2\pi 2000t))$

$X_r(t) \neq x(t)$ donc le théorème de Shannon n'a pas été respecté.



Exercice 3 On considère le sprctre $X(f)$ du signal $x(t)$ donné par la figure suivante :

1. Déterminer la fréquence maximale du signal.



2. Tracer le spectre du signal échantillonné pour les différents cas :

a) $F_e = 15KHz$ pour $-30KHz \leqslant f \leqslant 30KHz$.

b) $F_e = 30KHz$ pour $-45KHz \leqslant f \leqslant 45KHz$.

c) $F_e = 30KHz$ pour $-50KHz \leqslant f \leqslant 50KHz$.

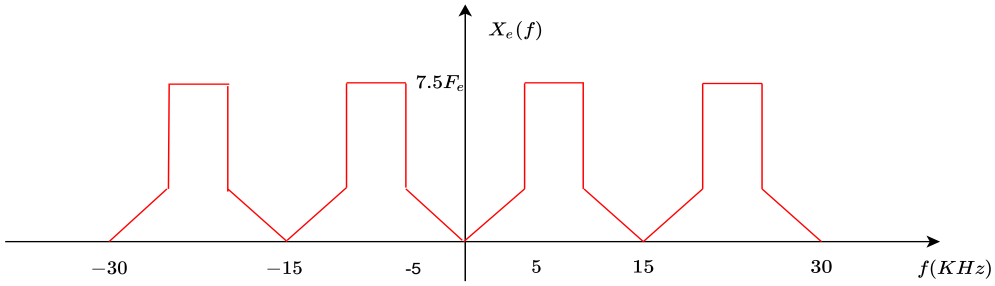
Solution :

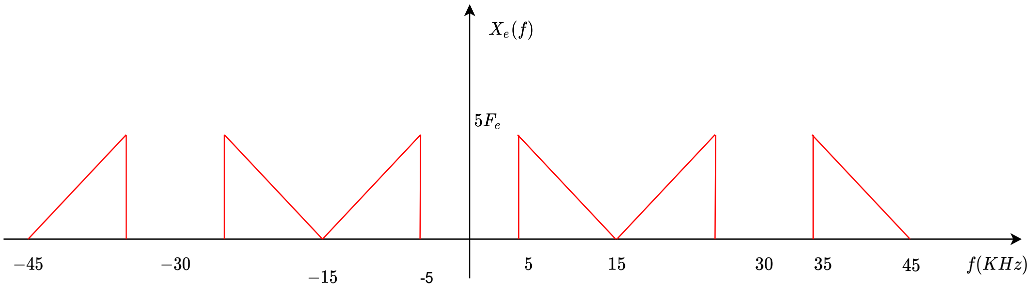
1. La fréquence maximale du signal est $F_{max} = 15KHz$.

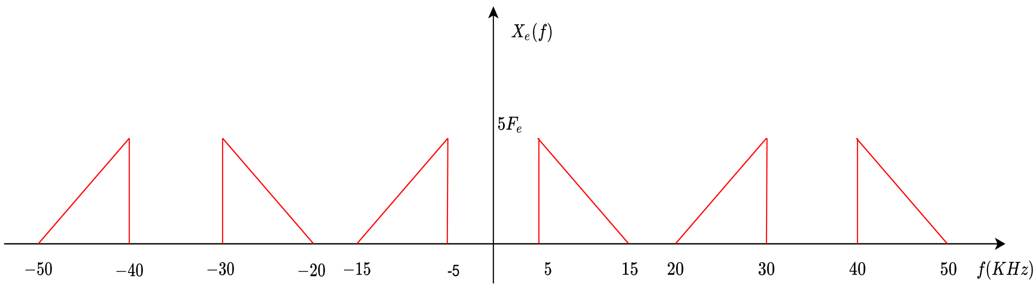
2. a) $F_e = 15KHz$

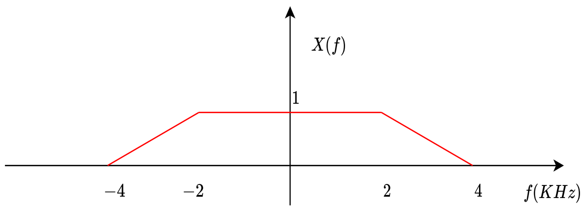
b) $F_e = 30KHz$

c) $F_e = 35KHz$


$X_e(f)$
$7.5F_e$
-30
-15
-5
5
15
30
$f(KHz)$


$X_e(f)$
$5F_e$
-45
-30
-15
-5
5
15
30
35
45
$f(KHz)$


$X_e(f)$
$5F_e$
-50
-40
-30
-20
-15
-5
5
15
20
30
40
50
$f(KHz)$


$X(f)$
1
-4
-2
2
4
$f(KHz)$

Exercice 4 Soit un signal $x(t)$ dont le spectre $X(f)$ est donné par la figure suivante :

1. Déterminer la fréquence d'échantillonnage pour qu'il n y est pas de recouvrement spectral.

Tracer le spectre du signal $x(t)$ échantillonné par cette fréquence minimum pour l'intervalle :

$-12KHz \leqslant f \leqslant 12KHz$.

3. Supposons la fréquence d'échantillonnage $f_e = 6KHz$.

Tracer le spectre du signal échantillonné pour $-12KHz \leqslant f \leqslant 12KHz$. Expliquer.

4. Que faut-il faire pour éviter le recouvrement spectral.

Solution :

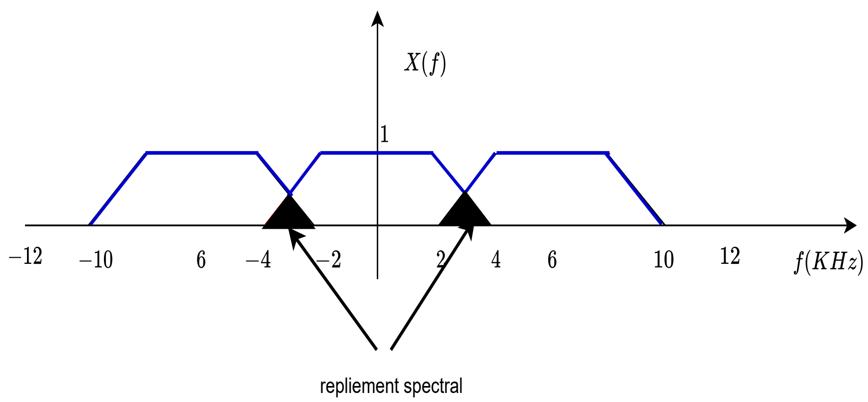
1. Afin de pouvoir restituer le spectre du signal san qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral, il faut respecter la condition du théorème de Shannon : $f_e \geqslant 2f_{max}$

Donc $f_e = 2f_{max}$ est la fréquence minimale pour laquelle le repliement spectral est évité. Alors : $f_e min = 2f_{max} = 2 * 4 = 8KHz$

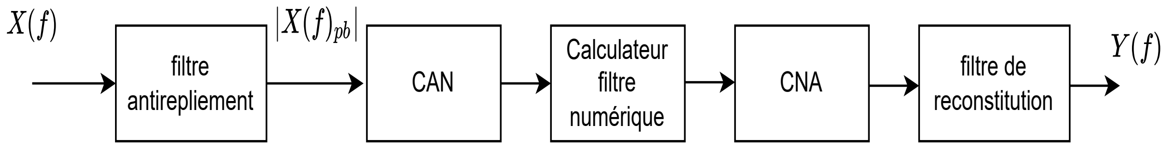
2.Pour $f_e = 6KHz$ alors le spectre du signal échantillonné pour $-12KHz \leqslant f \leqslant 12KHz$.

$f_e < 2f_{max}$, alors dans ce cas il y aura le phénomène de recouvrement spectral.

L'interval de fréquence est limité à $12KHz$.



3. Pour éviter le recouvrement de spectre, on procède la chaine de conversion toujours par un filtre d'anti-repliement de type passe bas de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$



Exercice 5 Calculer la transformée de Fourier inverse de $X(z)$: $X(z) = \frac{1}{(z-0.25)(z-0.5)}$

Solution :

$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-0.25)(z-0.5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0.25} + \frac{C}{z-0.5}$

$X(z) = 8 - \frac{16}{z-0.25} + \frac{8}{z-0.5}$

Selon les tables : $x(n) = 8\delta(n) - 16(0.25)^n u(n) + 8(0.5)^n u(n)$

Exercice 6 Résoudre l'équation aux réccurence suivante :

$x(n) - 0.5x(n-1) = 2(0.25)^n u(n)$

Avec : $x(-1) = 2$

Solution :

$X(z) - 0.5(z^{-1}X(z) + x(-1)) = \frac{2z}{z-0.25}$

$X(z)(1-0.5z^{-1}) = \frac{2z}{z-0.25} - 2$

$X(z) = \frac{z(z+0.25)}{(z-0.25)(z-0.5)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{-2}{z-0.25} + \frac{3}{z-0.5}$

Selon les tables : $x(n) = (-2(0.25)^n + 3(0.5)^n)u(n)$