Chapitre 5

Corrélation des signaux

5.1 Corrélation

5.1.1 *Introduction*

Le calcul de corrélation est utilisée dans le cas d'interprétation de signaux pour extraire une information. Ce qui exprime la notion de liaison linéaire entre deux variables.

Il est très important d'analyser et d'étudier des circuits et systèmes en effectuant certaines opérations sur les signaux afin de réaliser et répondre à certains objectifs. Toute transmission d'information dans un système est liée à une transmission d'énergie.

dans ce contexte,le devéloppement de certaines techniques de repésentation et d 'analyse des systèmes linéaires, est nécessaire pour l'étude des systèmes de commande ou de transmission d'information.
On définit un système par un opérateur mathématique qui transforme tout signal d'éntrée $e(t)$ en un signal de sortie $s(t)$ qui définit la réponse du système.

La notion dénergie ou puisance d'un signal est très importante pour caractérisé sa distribution dans le domaine temporel pour fréquentielle. Cette caractérisation des signaux basée sur l'énergie et sur la puissance des signaux et de leurs interactions permet de s'intéresser au calcul de fonction d'Auto-corrélation et fonction d'Inter-corrélation. Les domaines d'application de la corrélation : extraire le bruit dans un signal, ou détection d'un signal important noyé dans le bruit, mesure de distances et/ou de temps par inter-corrélation comme le cas des radars, sonars et autres GPS. . ..

5.1.2 *L'auto-corrélation*

L'auto-corrélation consiste à faire la corrélation d'un signal avec lui même. ce qui correspond à l'étude de ressemblance d'un processus avec lui-même au cours d'un certain temps.

— Cas de signaux à énergie finie : $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$
  $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$
  Avec $x^*(\tau)$ est le conjugué de $x(t)$.
— Cas de signaux à puissance finie : $R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$
  $R_{xx}(0)$ est la puissance moyenne du signal.$R_{xx}(\tau) \leqslant Rxx(0)$:

5.1.3 *L'inter-corrélation*

L'intercorrélation consiste à faire la corrélation entre deux signaux différents.Ce qui compare deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ retardée.

— Cas de signaux à énergie finie : $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$
  $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$
  Avec $y^*(t)$ est le conjugué de $y(t)$.
— Cas de signaux à puissance finie : $R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$

5.2 Propriétés de la fonction d'auto-corrélation

— La fonction d'auto-corrélation des signaux réels est paire :$R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$
— de $R_{xx}(0)$ est égale à l'énerige totale du signal $x(t)$, $R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(t)dt$

5.3 Convolution et corrélation

$R_{xy}(\tau) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(-(\tau-t))dt = x(\tau) * y^*(t-\tau)dt$
L'inter-corrélation revient à déterminer la convolution du premier signal avec le conjugué du deuxième signal retourné à un instant τ donné.
De même pour l'auto-corrélation : $R_{xx} = x(\tau) * x^*(\tau)$

5.4 Corrélation et densité Spectrale

La la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de l'énergie du signal représente la fonction d'auto-corrélation d'un signal. C'est la distribution énergétique contenue dans le spectre du signal.

$R_{xx}(\tau) = TF^{-1}\{S_{xx}(f)\}$
$= TF^{-1}\{|X(f)|^2\} = TF^{-1}\{X(f)\} * TF^{-1}\{X^*(f)\} = x(t) * x^*(-t)$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$

$TF\{R_{xx}(t)\} \rightarrow S_{xx}(t)$

$TF\{R_{xy}(t)\} \rightarrow S_{xy}(t)$

$TF\{R_{yx}(t)\} \rightarrow S_{yx}(t)$

5.4.1 *Cas des signaux périodique*

Dans le cas d'un signal périodique réel $x(t)$ de période T_0, la corrélation est donnée par la formule suivante :
$R_{xx}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x^*(\tau-t)d\tau$
En ecrivant les différents signaux périodiques sous forme d'un développement en-série de Fourier alors :
$R_{xx}(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) cos(2\pi f_0 t)$

A retenir : d'autocorrélation conserve l'information de périodicité du signal (fréquence) mais elle perd l'information de phase et d'amplitude.
L'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences.

5.5 Relations entre la convolution et les densités spectrales

$y(t) = x(t) * h(t)$

— La densité inter-spectrale d'énergie entre la sortie $y(t)$ du sytème et l'entrée $x(t)$: $S_{xy}(f) = H(f).S_{xx}(f)$

— La densité spectrale d'énergie $S_{yy}(f)$ de la sortie $y(t)$:$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f)$

5.6 Degré de cohérence

- On définit le degré d'auto-cohérence d'un même signal à un instant τ par :

$$\gamma = \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)}$$

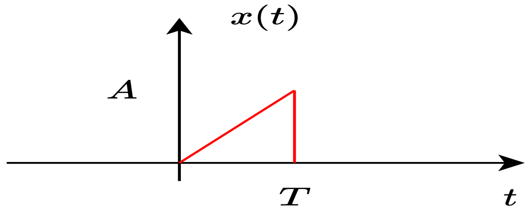
Dans ce cas on peut savoir si le signal $x(t)$ reste corrélé avec lui même après un décalage temporel de durée τ.
- On définit le degré d'inter-cohérence d'un signal signal et un autre $y(t)$ à un instant τ par :

$$\gamma = \frac{R_{xy}(\tau)}{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}.$$

Série de TD 5

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ donné par la figure suivante : 1. Décrire $x(t)$ en fonction du



signal échelon unité $u(t)$. 2. Calculer la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$.

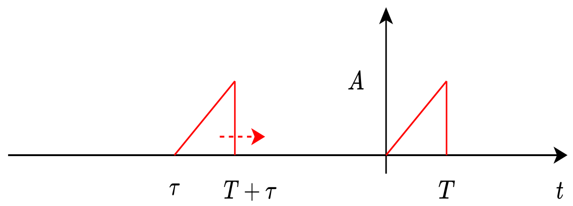
3. Déduire l'énergie du signal $x(t)$

Solution :

1. $x(t) = \frac{A}{T}t(u(t) - u(t-T))$.

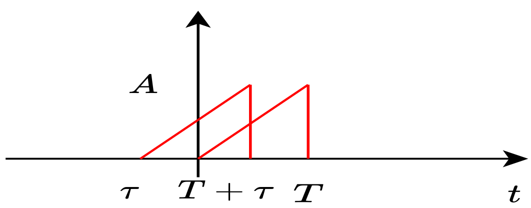
2. $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{T}t(u(t)-u(t-T))\frac{A}{T}\tau(u(t-\tau-t)-u(t-\tau-T))dt$

1 er cas : $\tau < -T$:



$R_{xx}(\tau) = 0$

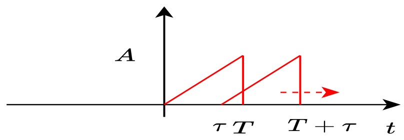
2 ème cas : $-T < \tau < 0$ $R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\int_0^{T+\tau}(t^2 - t\tau)dt = \frac{A^2}{6T^2}(-\tau^3 + 3T^2\tau + 2T^3)$



3 ème cas : $0 < \tau < T$

$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\int_\tau^T (t^2 - t\tau)dt = \frac{A^2}{T^2}(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\tau - \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^3}{2}) = \frac{A^2}{6T^2}(\tau^3 - 3T^2\tau + 2T^2)$

$4^{ème}$ cas : $\tau > T$:



$R_{xx}(\tau) = 0$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{6T^2}(-\tau^3 + 3T^2\tau + 2T^3) & -T < \tau < 0 \\ \frac{A^2}{6T^2}(\tau^3 - 3T^2\tau + 2T^2) & 0 < \tau < T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

3. L'énergie du signal à partir de sa fonction d'autocorrélation :

$R_{xx}(0) = E_x = \frac{A^2}{6T^2}(2T^3)$

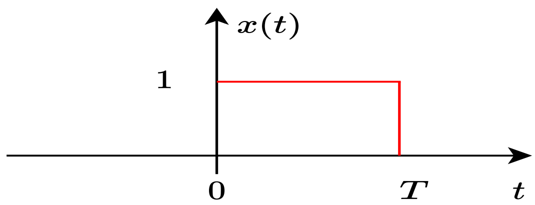
<u>Exercice 2</u>

1.Calculer la fonction d'autocorrélation du signal $x(t) = rect(\frac{t-\frac{T}{2}}{T})$.

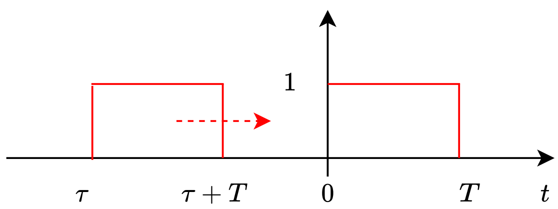
2. Déterminer l'énergie de ce signal à partir de sa fonction d'autocorrélation.

<u>Solution :</u>

1. $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$



1^{er} cas : $\tau < -T$: $R_{xx}(\tau) = 0$



$2^{\text{ème}}$ cas : $0 < \tau < \tau + T : R_{xx}(\tau) = \int_0^{tau+T} 1dt = \tau + T =$

3 ème cas : $\tau < \tau < T : R_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} 1dt = -\tau + T$

4 ème cas : $\tau > T$: $R_{xx}(\tau) = 0$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} \tau + T & si - T < \tau < 0 \\ -\tau + T & si 0 < \tau < T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. L'énergie de $x(t)$ avec la fonction d'autocorrélation :

$E_x = R_{xx}(0) = T$

Exercice 3

Soit $x(t) = 2rect(t-1)$

1. Tracer $x(t)$ puis déterminer le produit de convolution $x(t) * x(t)$

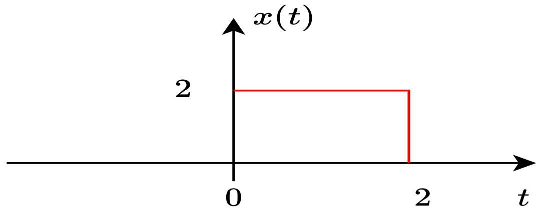
2. Déterminer la fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$

3. En déduire la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$

Solution :

1. $x(t) = 2rect(t-1)$

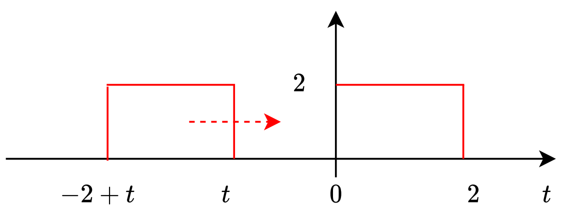
$y(\tau) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$



1^{er} cas : $t < 0$

$y(\tau) = 0$

$2^{\text{ème}}$ cas : $0 < t < 2$



$y(\tau) = 4\tau$

$3^{\text{ème}}$ cas : $t = 2$

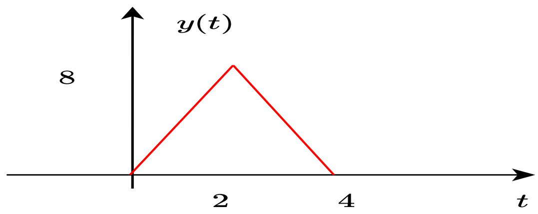
$y(\tau) = 8$

$4^{\text{ème}}$ cas : $t > 2$

$y(\tau) = -4\tau + 16$

$$y(\tau) = \begin{cases} 8 & t = 2 \\ 4\tau & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ -4\tau + 16 & t > 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. La fonction d'auto-corrélation :(étudier le degré de ressemblance d'un signal

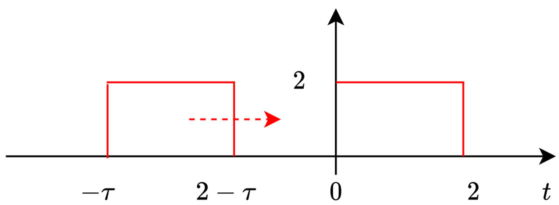


$x(t)$ avec le même mais ce dernier est retardé)

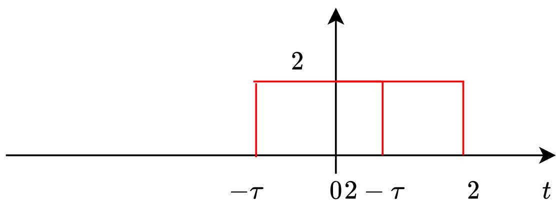
$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$

1^{er} cas : $\tau > 2 \Rightarrow R_{xx}(\tau) = 0$

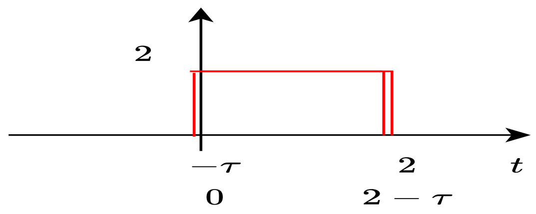
2 ème cas : $0 < \tau < 2 \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \int_0^{2-\tau} 4d\tau = 8 - 4\tau$

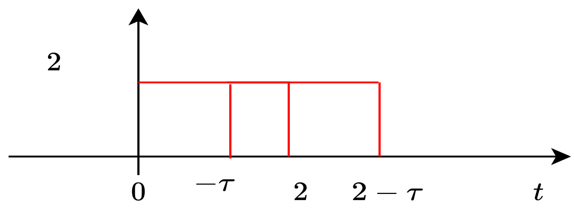


3 ème cas : $\tau = 0 \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \int_0^2 4d\tau = 8$



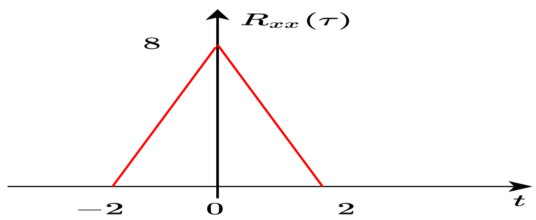
4 ème cas : $-2 < \tau < 0 \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^2 4d\tau = 8 + 4\tau$





5 ème cas : $\tau < -2 \Rightarrow R_{xx}(\tau) = 0$

$$y(t) = \begin{cases} 8 - 4\tau & 0 \leqslant \tau \leqslant 2 \\ 8 & \tau = 2 \\ 8 + 4\tau & -2 \leqslant \tau \leqslant 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



3. La densité spectrale d'énergie :

$S_{xx}(f) = TFR_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau$

On sait la convolution de deux portes donne un signal tri avec une amplitude AT.

Donc : $S_{xx}(f) = 2TF\{rect * rect\}$

Onasait que : $TF\{Arect(t/T)\} = ATsinc(Tf)$

$\Rightarrow S_{xx}(f) = 2.2sinc(2f).2sinc(2f) = 8sinc^2(2f)$