Chapitre 4

Produit de convolution

4.1 Formulation du produit de convolution

4.1.1 *Définition*

Une des méthodes d'analyse dans le domaine temporel permettant de relier tout signal de sortie $s(t)$ (réponse du sytème) à un signal d'entrée $e(t)$ (signal d'excitation du système) est basée sur la notion de Convolution des signaux.

La convolution est une opération mathématique sur deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui produit une troisième fonction exprimant la quantité de recouvrement des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

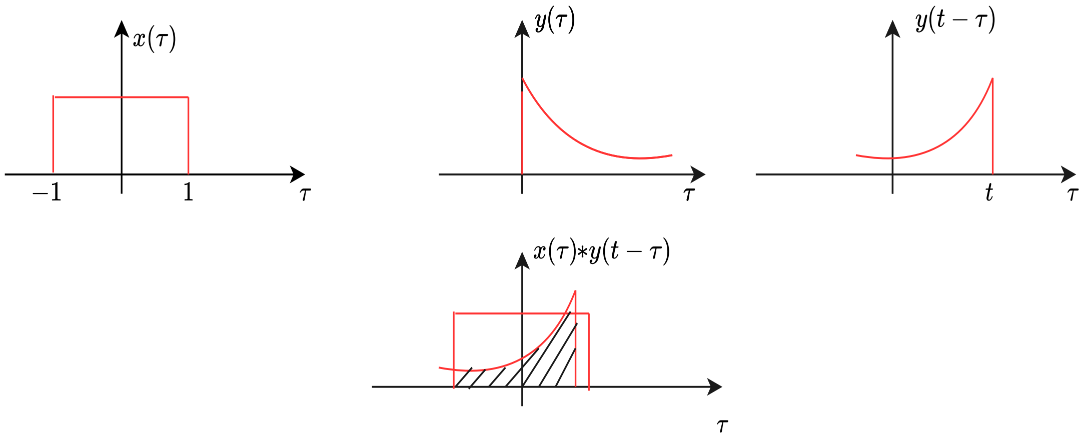


FIGURE 4.1 – **Méthode graphique de la convolution**

4.2 Propriétés du produit de convolution

1. commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
   $y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$
   On pose : $t_0 = t - \tau \Rightarrow dt_0 = -d\tau$
   $y(t) * x(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-t_0)x(t_0)dt_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)y(t-t_0)dt_0 = x(t) * y(t)$

2. Distributivité : $[x_1(t) + x_2(t)] * y(t) = x_1(t) * y(t) + x_2(t) * y(t)$

3. Associativité : $[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$

4. La convolution de signaux causaux est aussi causale : $y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$.

5. Changement d'échelle : si $x(t) * h(t) = y(t)$ alors $x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|}y(at)$

6. Differentiation de la sortie : si $y(t) = x(t)*h(t)$ alors $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)*\frac{dh(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}*h(t)$

4.3 Produit de convolution et impulsion de Dirac

L'élément neutre : $x(t) * \delta(t) = x(t)$

Translation : $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$$

$$x(t-t_0) * \delta(t-t_1) = x(t-t_0-t_1)$$

4.4 Etape de calcul de produit de convolution

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

1. Inverser le signal $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnée pour obtenir $h(-\tau)$

2. Décaler le signal $h(-\tau)$ par une quantité t

3. Calculer l'intersection qui se trouve entre $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ sur tout l'intervalle de temps t $h(t-\tau).x(\tau)$, ce qui revient à calculer la surface pour différente valeur de t.

4.4.1 *Transformée de Fourier du produit de convolution*

$$TF\{x(t)*h(t)\} = TF\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-j2\pi ft}dt$$

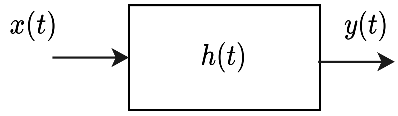
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dtd\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}dte^{-j2\pi f\tau}d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-j2\pi fu}du = X(f).H(f)$$

Théorème de Plancherel :

$TF\{x(t)*h(t)\} = X(f).H(f)$

De même, il est possible de calculer le produit de convolution à partir de cette relation : $x(t)*h(t) = TF^{-1}\{X(f).H(f)\}$



4.4.2 *Transformée de Fourier d'un produit*

$$TF\{x(t).h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi(f-f')t}dtdf$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f-f')df = X(f).H(f)$$

4.4.3 *Convolution des signaux périodiques*

pour les deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ périodique de période T_0 alors :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

4.4.4 *Déconvolution*

La déconvolution est l'opération inverse de la convolution. Ces deux opérations sont utilisées dans le traitement des signaux et des images. Par exemple, la convolution peut être utilisée pour appliquer un filtre, et il peut être possible de récupérer le signal original en utilisant la déconvolution.

En général, l'objectif de la déconvolution est de trouver la solution $s(t)$ d'une équation de convolution de la forme :$e(t) * h(t) = s(t)$
Le signal de sortie $s(t)$ est le signal que nous souhaitons récupérer après avoir convolué le signal $e(t)$ par un filtre $h(t)$ (représentée par sa fonction de transfert).

Si la fonction de transfert $h(t)$ est connue alors $s(t)$ est obtenue par une déconvolution déterministe. Cependant, si nous ne connaissons pas $h(t)$ à l'avance alors nous devons l'estimer. Cela se fait généralement à l'aide de méthodes s'estimation statistique.

Série de TD 4

Exercice 1

1. Calculer analytiquement les produits des convolutions $x(t) * y(t)$:

a. $x(t) = e^{-t}u(t)$ et $y(t) = tx(t)$

b. $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$ et $y(t) = \delta(t-a) + \delta(t+a)$

2. Représenter graphiquement les cas $a = T$, $a >> T$ et $a < T$

Solution :

1. $z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

a) $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)(t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) = e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)u(t-\tau)u(t-\tau)d\tau$

Premier cas :

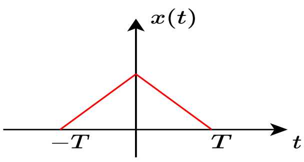
Si $t < 0 : \Rightarrow z(t) = 0$

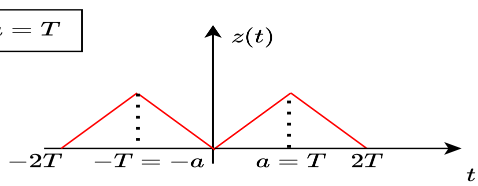
Deuxième cas :

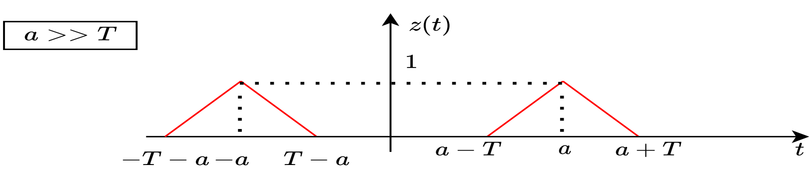
Si $t > 0$ et $\tau > 0$ et $t - \tau > 0 \Rightarrow 0 < \tau < t \Rightarrow z(t) \neq 0$

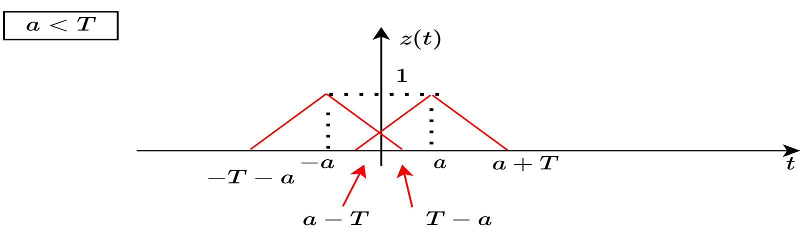
$z(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)d\tau = e^{-t}(t^2 - \frac{t^2}{2}) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$

b) $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)[\delta(t-a)+\delta(t+a)]d\tau = x(\tau)\delta(t-a) + x(\tau)\delta(t+a) = x(t-a) + x(t+a)$







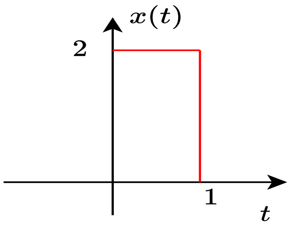


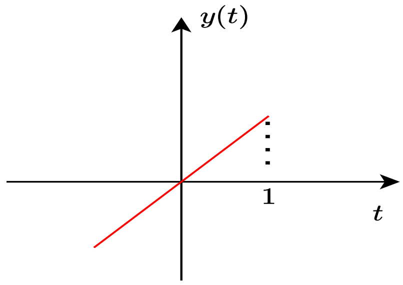
Exercice 2

Soient les deux signaux signaux :

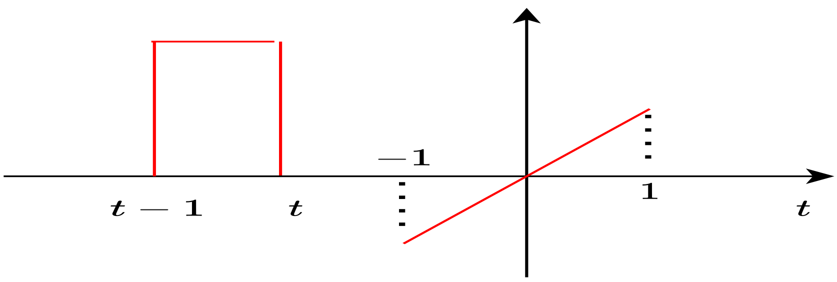
Calculer $z(t) = x(t) * y(t) = x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

Solution :



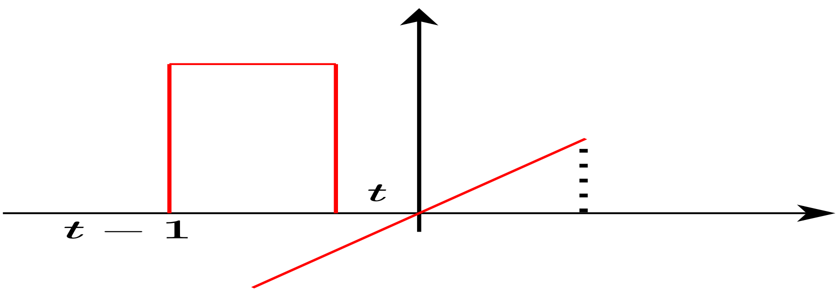


1 er cas : $t \leqslant -1 \Rightarrow z(t) = 0$



2 ème cas : $-1 < t \leqslant 0$

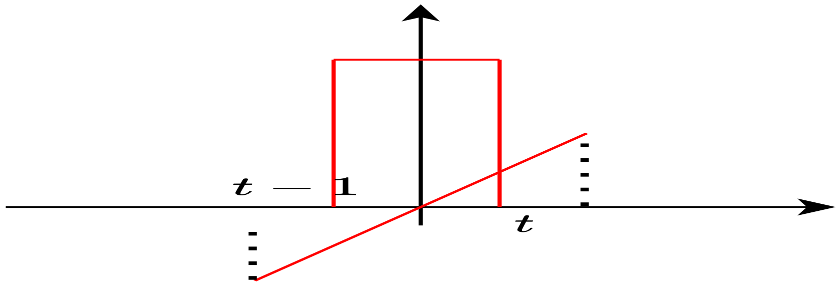
$z(t) = t^2 - 1$



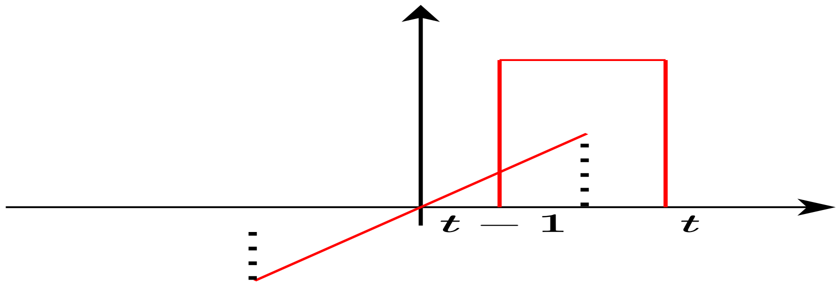
3 ème cas : $0 < t \leqslant 1 : z(t) = 2t - 1$

4 ème cas : $1 < t \leqslant 2 : z(t) = -t^2 + 2t$

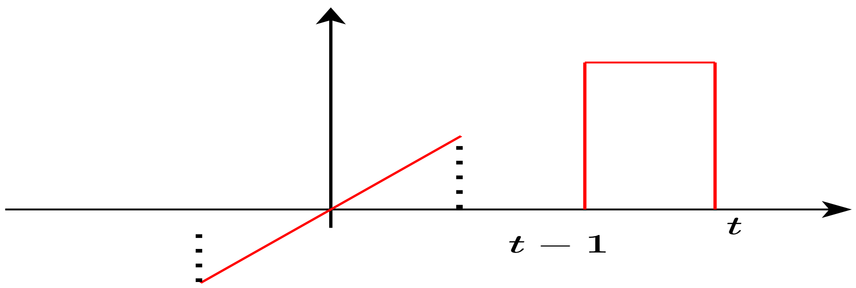
5 ème cas : $t \geqslant 2 : z(t) = 0$



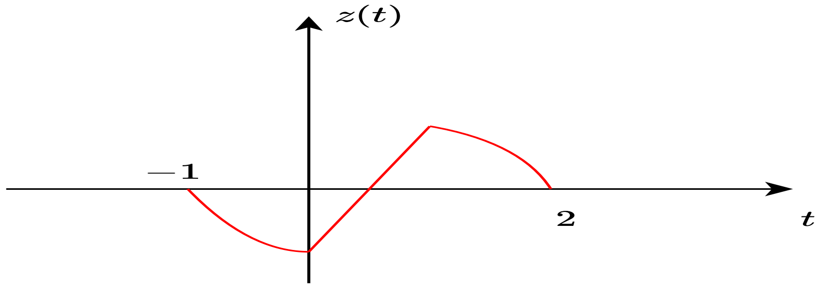
t — 1
t



t — 1
t



t
t — 1



z(t)
—1
2
t

Exercice 3

La fonction triangle est définie par :

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t| & si -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de $tri(t)$ et exprimer cette dérivée à l'aide de la fonction porte recta,gulaire $rect(t)$.

2. Appliquer à l'expression précédente l'opérateur TF. En déduire la TF de $tri(t)$.

3. Vérifier que $tri(t) = rect(t) * rect(t)$ et retrouver le résultat de la question précédente.

Solution :

D'après la table de la transformée de Fourier on a :

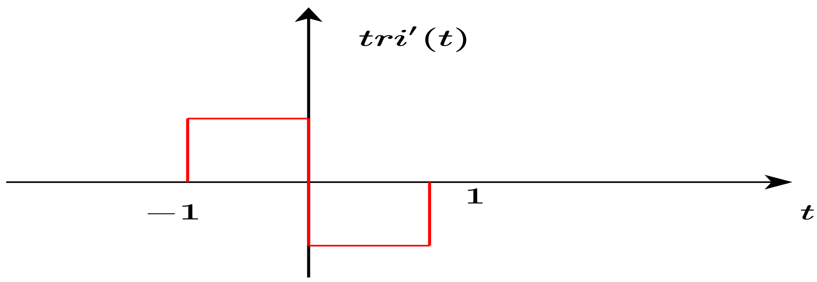
$TF\{tri(t/T)\} \rightarrow T sinc^2(fT)$

Donc : $TF\{tri(t)\} \rightarrow sinc^2(f)$

1. $tri(t) = \begin{cases} 1+t & si -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1-t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Alors : $(tri'(t)) = \begin{cases} 1 & si -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ -1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

$(tri'(t)) = rect(t+1/2) - rect(t-1/2)$ et $rect(t) \rightarrow sinc(t)$



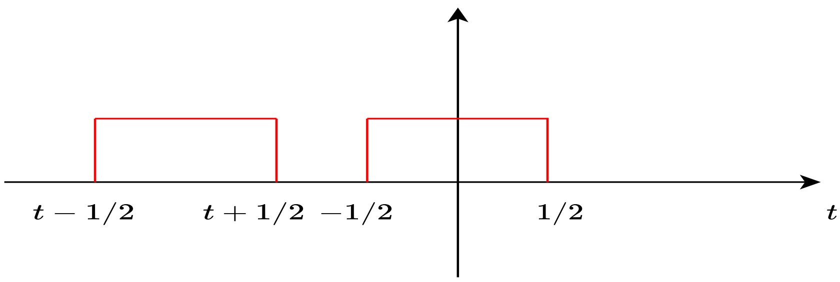
2. $TF\{tri'(t)\} = TF\{rect(t+1/2) - rect(t-1/2)\} = TF\{rect(t+1/2)\} - TF\{rect(t-1/2)\} = 2j\pi f sinc^2$

D'après la propriété de dérivée : $TF\{tri(t)\} = sinc^2(f)$

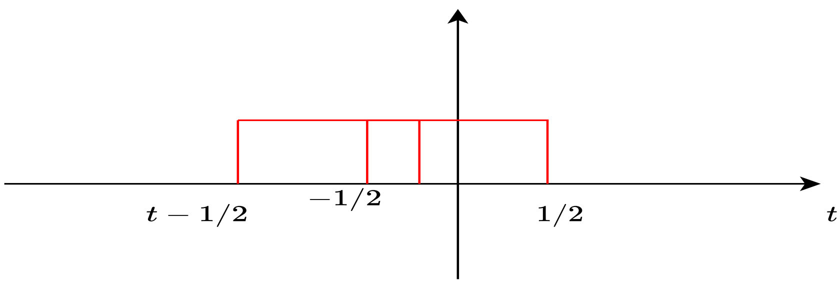
3. D'après la propriété de la convolution : $x(t) * y(t) \rightarrow X(f).Y(f)$

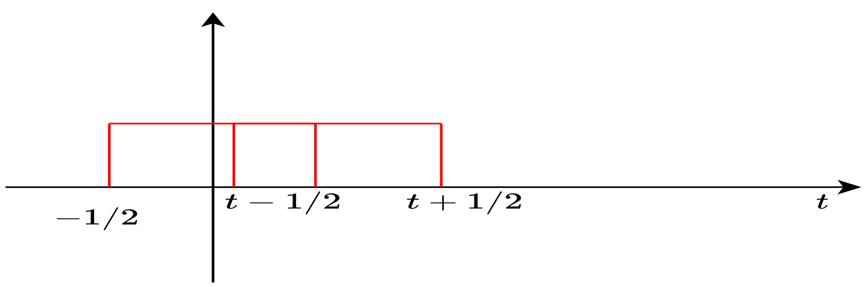
$TF\{tri(t)\} = TF\{rect(t)\}.TF\{rect(t)\} = sinc(f).sinc(f) = sinc^2(f)$

1 ^{er} cas : $t \leqslant -1$ alors : $rect * rect = 0$



2 ^{ème} cas :$-1 \leqslant t \leqslant 0$ alors : $rect * rect = t + 1$

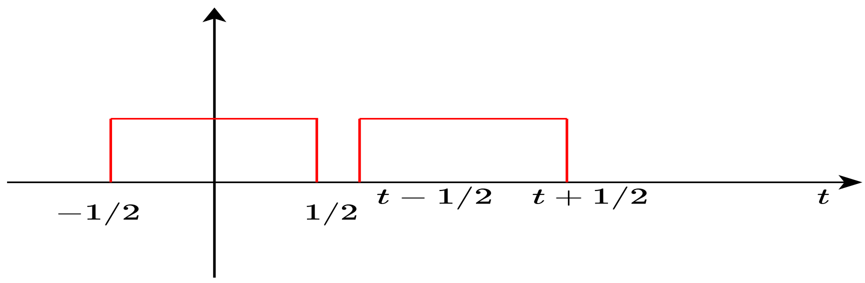




3 ^{ème} cas : :$0 \leqslant t \leqslant 1$ alors : $rect * rect = t - 1$

Exercice 4

Soit le signal porte rectangulaire représenté par :$x(t) = \frac{1}{\tau} rect(t/\tau)$.



1.a) Calculer sa transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$.

b) Représenter graphiquement $x(t)$ et $|X(f)|$ pour $\tau = 1$.

2. soit le signal triangulaire représenté par $y = Atri(t/\tau)$.

a) Montrer qye $y(t) = x(t) * x(t)$, où A est une constante à déterminer.

b) Déduire la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(y)$ en utilisant le résultat précédent : $y(t) = x(t) * x(t)$.

c) Tracer les courbes donnant : $y(t)$ et $|Y(f)|$.

3. On réalise un échantillonnage idéal de porte triangulaire $y(t) = Atri(t/\tau)$ avec un pas d'échantillonnage $T_e = \tau/4$.

a) Donner l'expression du signal échantillonné $y_e(t)$ en fonction de $y(t)$.

b) calculer la transformée de Fourier $Y_e(f)$, du signal échantillonné $y_e(t)$.

c) Représentrer le graphe de $y_e(t)$, et celui de $|Y_e(f)|$ sur l'intervalle $[-f_e, f_e]$ où $f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage.

d) Comparer le spectre de base $Y_e(f)$ du signal échantilloné avec $Y(f)$ le spectre du signal d'origine.

4. Soit le signal $z(t)$ défini par : $z(t) = \lim_{\tau \to 0} x(t)$.

a) Que représente $z(t)$.

b) Calculer dans ce cas le spectre $Z(f)$ de ce signal.

c) Représenter graphiquement $z(t)$ et $Z(f)$.

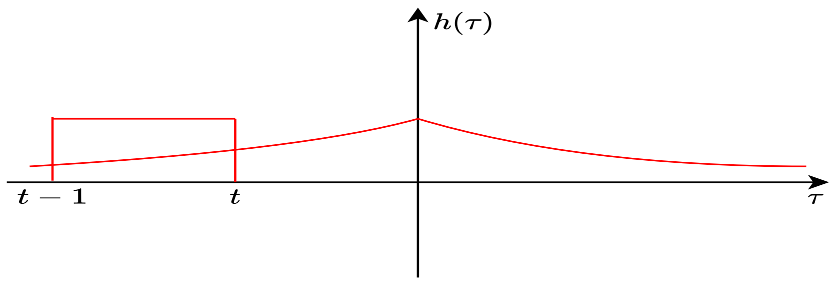
Exercice 5

$$x(t) = \begin{cases} e^t & t < 0 \\ e^{-t} & t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et } h(t) = rect(t - 1/2) = \begin{cases} 1 & \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Solution :

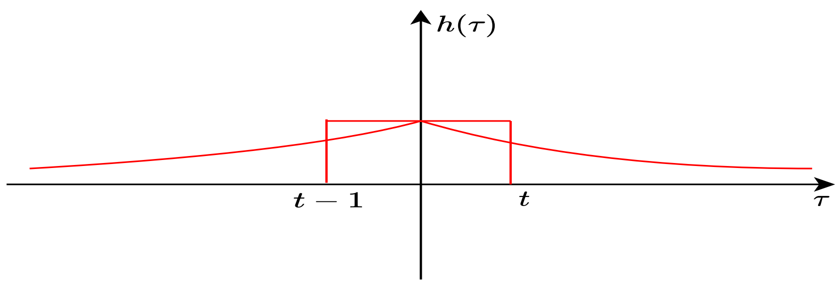
$1^{\,er}$ cas : $t < 0$:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{\tau} d\tau = e^t - e^{t-1}$$



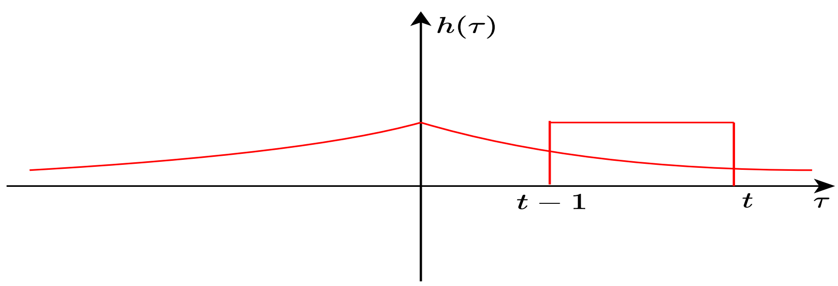
$2^{\,\text{ème}}$ cas : $0 < 1$:

$$y(t) = \int_{t-1}^{0} e^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = 2 - e^{-t} - e^{t-1}$$



$3^{\,\text{ème}}$ cas :$t > 1$:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-t-1} - e^{-t} = e^{t(1-e^{-1}}$$



$$y(t) = \begin{cases} e^t - e^{t-1} & t < 0 \\ 2 - e^{-t} - e^{t-1} & 0 \leqslant t < 1 \\ e^{t(1-e^{-1}} & t > 1 \end{cases}$$

Exercice 6

1. Soientt les deuc fonctions suivantes : $h(t) = 2rect(\frac{t-1}{2})$

$x(t) = Arect(\frac{t}{T}$ avec $A = 2$, $T = 2$

1. Calculer sa transormée de fourier de $h(t)$.

2. Calculer le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$

3. Calculer la transformée de Fourier de $y(t)$. ***Solution :***

1. On utilise la popriété de la TF : $x(t - t_0) \rightarrow e^{-2\pi f t_0} X(f)$

et $Arect(\frac{t}{T}) \rightarrow ATsin(\pi f T)$

$X(f) = ATsinc(\pi f T)$ avec $A = 2$, $T = 2$.

$X(f) = 4sinc(2\pi f)$, alors $H(f) = e^{-j2\pi f(1)} 4sinc(2\pi f)$

$H(f) = 4e^{-j2\pi f} sinc(2\pi f)$

2. Le produit de convolution : $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4(1 - e^{-t}) & 0 < t < 2 \\ 4(-e^{-t} + e^{-t+2}) & t > 2 \end{cases}$$

3. TF $\{y(t)\}$

$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow Y(f) = X(f).H(f)$

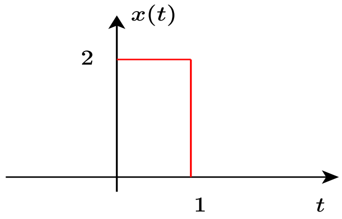
$Y(f) = \frac{8e^{-j2\pi f}}{1+j2\pi f} sinc(2\pi f)$

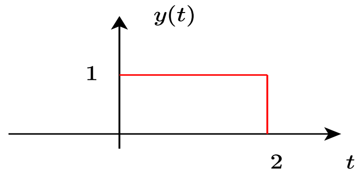
Exercice 7

Soient les deux fonctions représentées graphiquement .

1. Calculer $f(t) = x(t) * y(t)$

Solution :





$$f(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 & 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 6 - 2t & 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. 2. Tracer $f(t)$

<u>**Exercice 8**</u>

Soient les deux fonctions représentées graphiquement .

1. Calculer $x(t) * y(t)$

2. Tracer $y(t)$ $x(t) * y(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + t & t \leqslant 0 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2 & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$