Chapitre 2

Analyse de Fourier

2.1 Introduction

2.1.1 *Introduction*

Une fonction périodique de période T est égale à une somme de signaux sinusoïdaux.

L'analyse consiste en la détermination de la suite des coefficients de Fourier.

La synthèse permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

Une fonction f de période T est égale à sa série de fourier ssi : $\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$

2.2 Série de Fourier

Théorème Sous certaines conditions, la fonction $x(t)$ périodique peut être approximée sous une somme infinie de sinusoïde :

$$x(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nwt) + b_n sin(nwt))$$

a_0, a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$: valeur moyenne du signal.

$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)cos(nwt)dt,\ n \geqslant 1$

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)sin(nwt)dt,\ n \geqslant 1$

$$w = 2\pi/T = 2\pi f$$

Les fréquences des composantes sinusoïdales sont des multiples de la fréquence f du signal périodique décomposé.

$f_1 = f$: fréquence fondamentale, harmonique d'ordre 1.

$f_n = nf$: fréquence qui correspond à l'harmonique d'ordre n.

2.2.1 *Harmonique*

La vibration d'une corde (piano ou guitare) envoie un son caractérisé par la somme d'une fréquence fondamentale qui défini la hauteur de la note jouée et d'une fréquences appelée harmoniques.

Les différentes formes de la série trigonométrique

La série de Fourier peut être représentée selon trois forme :

— Réelle : $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nwt) + b_n sin(nwt))$

— Harmonique : $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n cos(nwt + \phi_n)$,

— Complexe : $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{jnwt}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $C_n \in \mathbb{C}$

Avec :

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ n \geqslant 1$$
$$\phi_n = \arctan(\frac{b_n}{a_n})$$

2.2.2 *Propriétés*

Si $x(t)$ est pair alors : $b_n = 0\ \forall n$

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nwt)$

$$A_n = |a_n| \text{ et } \phi_n = 0,\ n \geqslant 0.$$

Si $x(t)$ est impair alors $a_n = 0,\ n \geqslant 1$

$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nwt) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n cos(nwt - \frac{\pi}{2})$

$A_n = |b_n|,\ n \geqslant 1$

Si $a_n = 0,\ b_n \neq 0$ alors $\phi_n = \frac{\pi}{2}\ n \geqslant 1$

Si $b_n = 0,\ a_n \neq 0$ alors $\phi_n = 0\ n \geqslant 1$

2.2.3 *Relation entre la forme trigonométrique et complexe*

$e^{-j\alpha} = cos(\alpha) - jsin(\alpha)$

$e^{j\alpha} = cos(\alpha) + jsin(\alpha)$

$cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$ et $sin(\alpha) = \frac{e^{-j\alpha}+e^{j\alpha}}{2j}$

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nwt) + b_n sin(nwt) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - jb_n)e^{jnwt} + (a_n + jb_n)e^{-jnwt}$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

alors : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jnwt}$ où $C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)e^{-jnwt}dt$

Le coefficient C_n est généralement complexe, il sera réécrit sous la forme suivante :

$C_n = |C_n|e^{jarg(C_n)}$

Des fréquences négatives et positives interviennent dans la représentation complexe, elles sont introduites par commodité de représentation.

Exemple Soit $x(t)$ une fonction périodique sous la forme suivante :

$$x(t) = \begin{cases} V_0 & si - \frac{T}{4} < t \leqslant \frac{T}{4} \\ 0 & si \frac{T}{4} < t \leqslant \frac{3T}{4} \end{cases}$$

Calculer selon le créneau suivant les coefficients complexe de la série de Fourier :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t)e^{-jnwt}dt$$

$$= \frac{-V_0}{jnwT}[e^{-jnwt}]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{-V_0}{n\pi}\frac{e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}}{2j} = \frac{V_0}{n\pi} sin\frac{n\pi}{2}$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2p \\ (-1)^p \frac{V_0}{n\pi} & si \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 dt = \frac{V_0}{2}$$

$$x(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} e^{j(2p+1)wt}$$

2.3 Transformée de Fourier

2.3.1 *Introduction*

Considérons la période T qui tend vers l'infini, ce qui veut dire que f tend vers 0.
La transformée de Fourier est appliquée pour les signaux apériodique ($T \to \infty$) dont lequel les harmoniques deviennent infiniment petite (spectre a infinité d'harmonique et la séparation entre les fréquences devient plus petite, on passe donc d'un spectre discret à un spectre continu).
Les coefficients de la série de Fourier deviennent alors de plus en plus faibles càd : $T \to \infty$ alors $C_n \to 0$.

2.3.2 *Définition*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction :
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par : $TF\{f(t)\} = F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi f t}dt$
La transformée de Fourier inverse : $f(t) = TF^{-1}\{F(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi f t}df$

2.3.3 *Propriétés de la transformée de Fourier*

1. Linéarité : si $\begin{cases} x_1(t) \to X_1(f) \\ x_2(t) \to X_2(f) \end{cases}$ alors : $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$

   Démonstration :
   $TF\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))e^{-j2\pi f t}dt$
   $= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x_1(t)e^{-j2\pi f t}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta x_2(t)e^{-j2\pi f t}dt$
   $= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-j2\pi f t}dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-j2\pi f t}dt = \alpha X_1(f) + \beta X_2(f).$

2. Décalage temporel (translation) : si $x(t) \to X(f)$ donc : $x(t - t_0) \to e^{-j2\pi f t_0}X(f)$

   Démonstration :
   $TF\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi f t}dt$
   on pose $t_1 = t - t_0$:
   $TF\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)e^{-j2\pi f(t_1-t_0)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)e^{-j2\pi f t_1}e^{-j2\pi f t_0} = e^{-j2\pi f t_0}X(f)$

3. Décalage fréquentiel (translation sur f ou modulation) : $x(t)e^{j2\pi ft} \rightarrow X(f-f_0)$

4. Changement d'échelle : si $x(t) \rightarrow X(f)$ alors $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$

5. Dualité : si $x(t) \rightarrow X(f)$ alors : $X(t) \rightarrow x(-f)$

   exp : $e^{-at} \rightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$ donc : $\frac{2a}{a^2+(2\pi t)^2} \rightarrow e^{-a(-f)}$

6. Dérivation : si $x(t) \rightarrow X(f)$ alors $x^{'}(t) \rightarrow j2\pi f X(f)$

   Pour la dérivée d'ordre supérieur : $x^n(t) \rightarrow (j2\pi f)^n X(f)$

   si $\frac{d^n}{df^n}[F(f)] = (-j)^n TF\{t^n f(t)\}$

7. Produit de convolution (Théorème de Plancherel) : $x(t) * y(t) \rightarrow X(f).Y(f)$

   $x(t).y(t) \rightarrow X(f) * Y(f)$

   La convolution de $x(t)$ et $h(t)$ est définie par :

   $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

8. Intégration : $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \frac{1}{j2\pi f}X(f) + 1/2X(0)\delta(f)$

9. Conservation de l'énergie (égalité de Parseval) signaux à énergie finie :

   $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_X[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

$X(f) = |(X(f)|^{j\phi_f}$

$Re(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(2\pi ft)dt$

$Im(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)sin(2\pi ft)dt$

2.4 *Transformée de Fourier usuelles*

Les fonctions usuelles et leur transformée de Fourier sont représentées dans le tableau suivant dans le cas où on utilise la convention la plus fréquente conforme à la définition mathématique (cf fig.2.1).

Fonction échelon :$u(t) = \begin{cases} 1 & sit > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Fonction sinus cardinal : $sinc = \frac{sinx}{x}$

Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Echelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
Exponentielle	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
Gaussienne	e^{-t^2/σ^2}	$\sigma e^{-\pi\sigma^2 f^2}$
Exponentielle complexe	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
cosinus	$cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
sinus	$sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
Rectangle	$Rect(t/T) = \begin{cases} 1 & \|t\| < T/2 \\ 0 & sinon \end{cases}$	$Tsinc(Tf)$
Sinus cardianal	$sinc(t/T)$	$TRect(fT)$
Triangle	$Tri(t/T) = \begin{cases} 1 - \|t\| & \|t\| < T \\ 0 & sinon \end{cases}$	$Tsinc^2(Tf)$
Peigne de Dirac	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n/T) = \frac{1}{T}\delta_{t/T}(f)$

FIGURE 2.1 – **Transformée de Fourier des fonctions usuelles**

2.5 Egalité de Parseval

L'égalité de Parseval revient à exprimer la puissance moyenne du signal par une somme d'une série numérique basée sur des coefficients de Fourier.

$$P_{moy} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Théorème

Si f est continue par morceaux et 2π périodique, alors la série numérique :

$$\sum_n |C_n|^2 \text{ et } \sum_{n\geqslant 1}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \text{ converge à } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

2.6 Causalité et stabilité

On appelle fonction causale toute fonction nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

La fonction échelon-unité est une fonction causale.

Les systèmes causaux ont une réponse impulsionnelle nulle avant l'instant d'impulsion, soit $h(t < 0) = 0$.

2.7 Système linéaire

Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est-elle même linéaire càd si cette fonction vérifie le principe de proportionnalité et de superposition.

2.8 *Système stable*

Un système est stable si lorsqu'on lui présente une entrée finie, il produit une sortie finie.

$x(t) < \beta_x < \infty$

$y(t) < \beta_y < \infty$

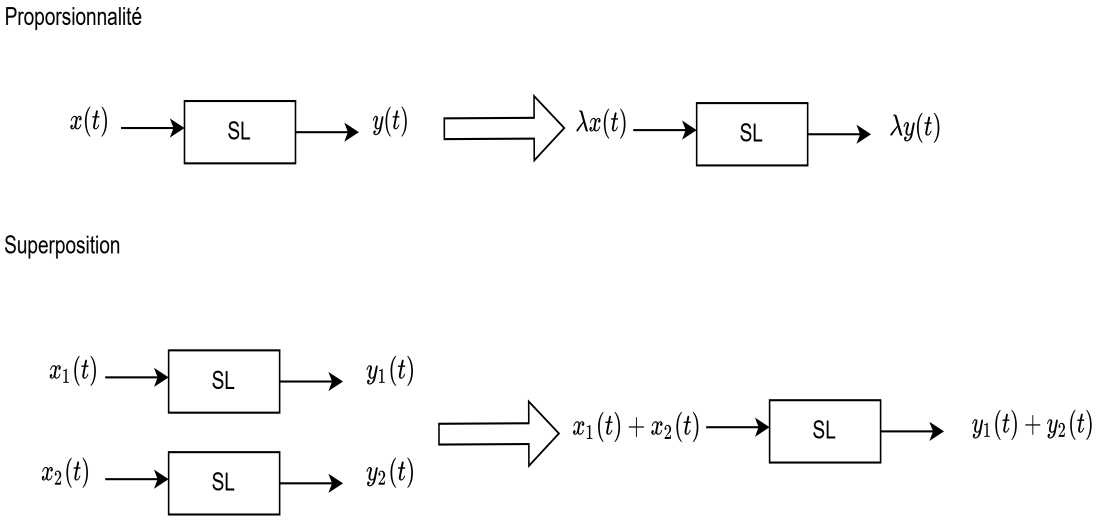


FIGURE 2.2 – **Système linéaire**

2.9 *Système invariant(stationnaire)*

Si le comportement d'un système est indépendant de l'origine de temps alors on dit que le système est invariant.

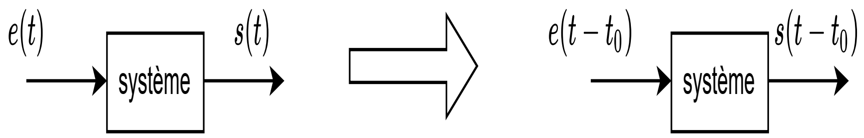


FIGURE 2.3 – **Système invariant**

Exemple Etudier la linéarité, l'invariance et la stabilité du système suivant (cf figure 2.4) :

1. Linéarité : $x(t) \to y(t)$

si $x_1(t) \to y_1(t)$ et$x_2(t) \to y_2(t)$ alors :

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to k(x_1(t) + \beta x_2(t)) + A \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Donc ce système est non linéaire.

2. Linvariance : si $x(t) \to y(t)$

$x(t - t_0) \to kx(t - t_0) + A = y(t - t_0)$

Donc ce système est invariant dans le temps.

3. Stabilité : On suppose que $x(t) < \beta_x$

$\to kx(t) < k\beta_x \to kx(t) + A < k\beta_x + A$

$y(t) < \beta_y \Rightarrow$ ce système est stable.

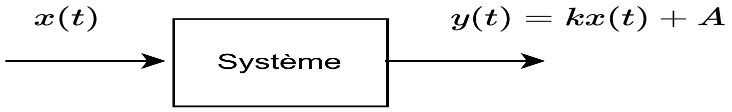


FIGURE 2.4 – **Système non linéaire, invariant et stable**

Série de TD 2

Exercice 1

Soit $x(t) = 2cos(20\pi t - \frac{\pi}{4})$

1. Tracer $x(t)$

2. Tracer les coefficients de série de Fourier en utilisant la forme harmonique

Solution :

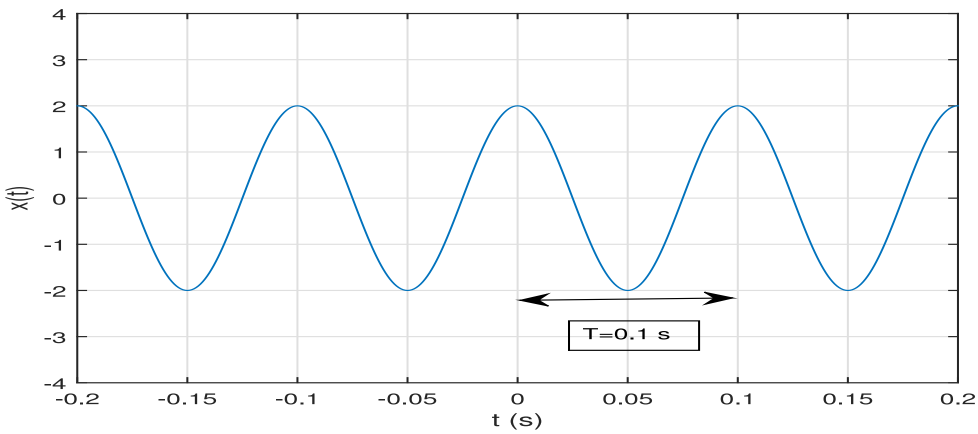


FIGURE 2.5 – Signal cosinus déphasé

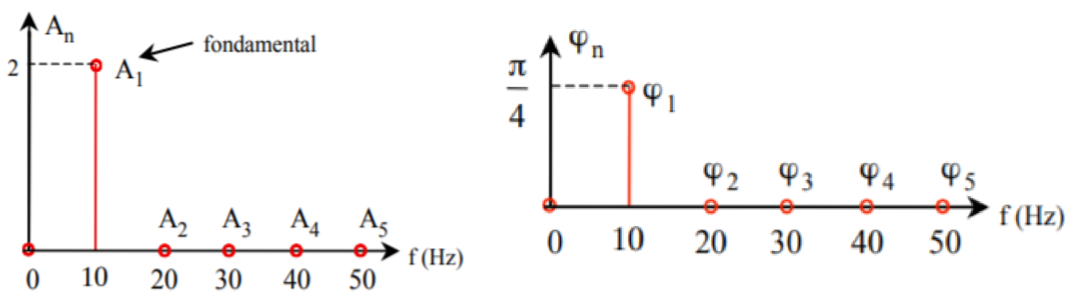


FIGURE 2.6 – Spectre de fréquence d'amplitude et de phase

$$A_n = \begin{cases} 2 & f = 10Hz \\ 0 & aileurs \end{cases}$$

$\phi_1 = \pi/4$ car à la fréquence foncdamental le déphasage est de $= \pi/4$

Exercice 2 Soit $x(t)$ une fonction périodique de période $T = 1s$ (cf figure 2.7) :

1. Donner la formule $x(t)$.

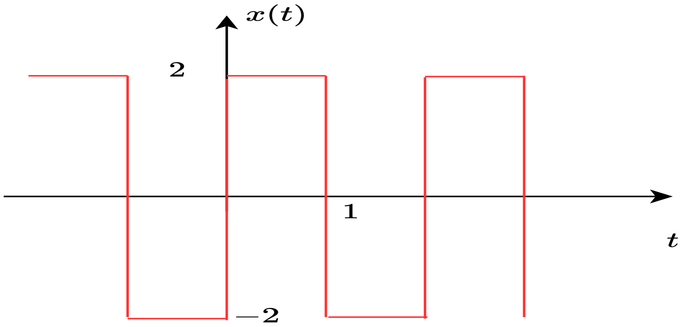


FIGURE 2.7 – signal carré

2. Calculer les coefficients réels de $x(t)$.

2. Construire le spectre de fréquence en amplitude et en phase.

Solution :

On a $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - cosn\pi)$

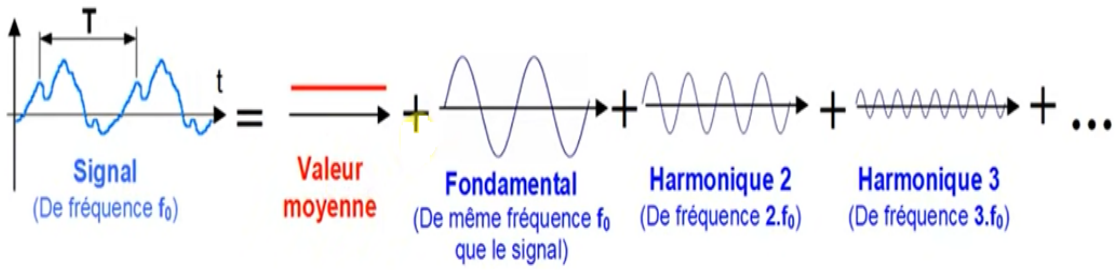
$$cosn\pi = \begin{cases} 1 & si \quad n \quad pair \\ -1 & si \quad n \quad impair \end{cases} \quad \text{Donc : } b_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \quad pair \\ \frac{4A}{n\pi} & si \quad n \quad impair \end{cases}$$

$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sinnw_0 t$

Pour $A = 2$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)\pi} sin((2n+1)2\pi f_0 t) = \frac{8}{\pi} sin(2\pi(f_0 t)) + \frac{8}{3\pi} sin(2\pi(3f_0 t)) + \frac{8}{5\pi} sin(2\pi(5f_0 t)) +$$

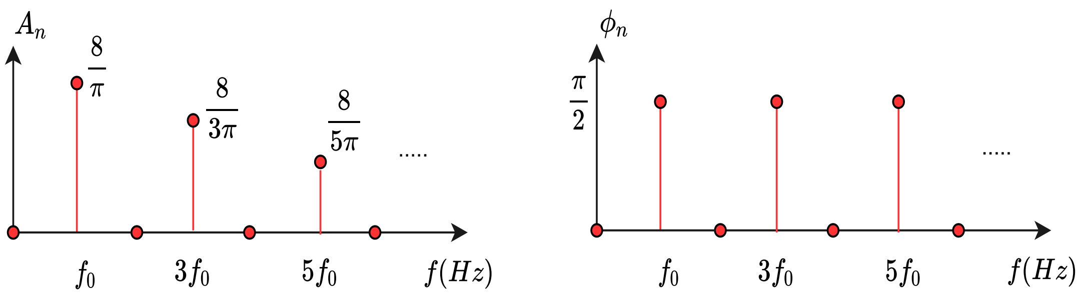
....



Exercice 3 Calculer la transformée de Fourier inverse de : $X(f) = \pi e^{-2|f|}$

Solution :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi e^{-2|f|} e^{2j\pi f t} df = \pi \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi f} e^{2j\pi f t} df + \pi \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi f} e^{2j\pi f t} df =$$



$$\pi\int_{-\infty}^{0} e^{2\pi f+2j\pi f t} df+\pi\int_{0}^{\infty} e^{-2\pi f+2j\pi f t} df=\pi\int_{-\infty}^{0} e^{()2\pi+2j\pi t)f} df+\pi\int_{0}^{\infty} e^{(-2\pi+2j\pi t)f} df$$

Après calcul on trouve : $x(t)=\frac{1}{1+t^2}$

Exercice 4

Soit $f(t)=t^2$ sur $[-\pi,\pi]$, 2π périodique.

1. Déterminer la série de Fourier de $f(t)$.

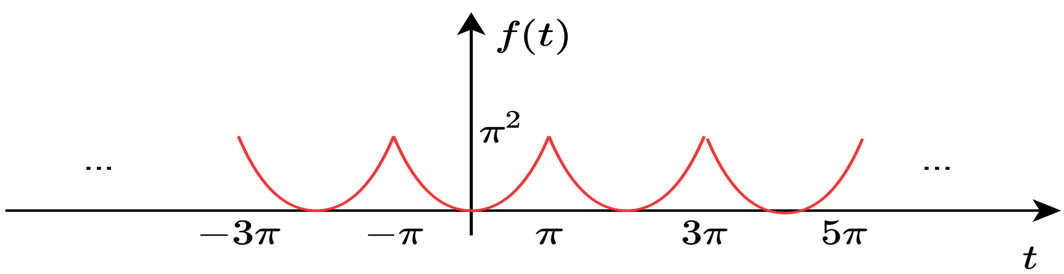
2. En utilisant le théorème de Parseval, calculer :

a. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$

b. Calculer $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$.

Solution :

1. $f(t)$ est pair donc : $b_n=0\ \forall n>0$



$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2dt=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} t^2cos(2\pi nt/(2\pi))dt\ \forall n>0$$

$$=\frac{2}{\pi}[t^2sin(nt)/n]_0^{\pi}=\frac{-4}{\pi n}(\frac{\pi cos(n\pi)}{n})+\frac{1}{n}\int_0^{\pi} cos(nt)dt=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

2.

a. $\forall t\in[-\pi,\pi]:f(t)=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(4(-1)^n)}{n^2}cos(nt)$

$f(0) = \frac{\pi^2}{3} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(4(-1)^n)}{n^2} = 0$

$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

$(-1) \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

car : $-(-1)^n = -1 * (-1)^n = (-1)^{(n+1)}$

$\sum_{n \geqslant 1} -\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nt)$

donc : $f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(n\pi)$

$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n$

$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après la formule de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$T = 2\pi$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$

Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 5

1. Calculer la transformée de Fourier de $s(t) = Rect(t/T)$

2. Tracer $S(f)$ et son module.

Solution :

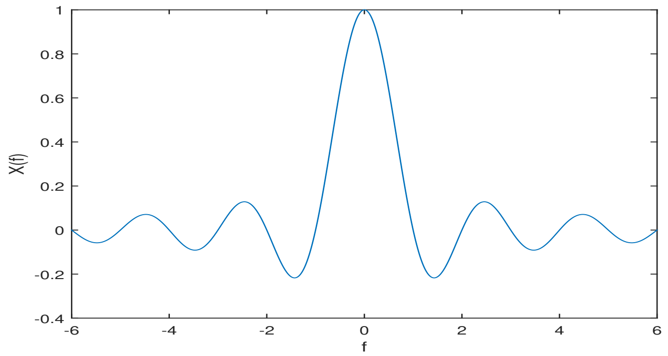
1. $s(t) = \begin{cases} 1 & t \leqslant |\frac{T}{2}| \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

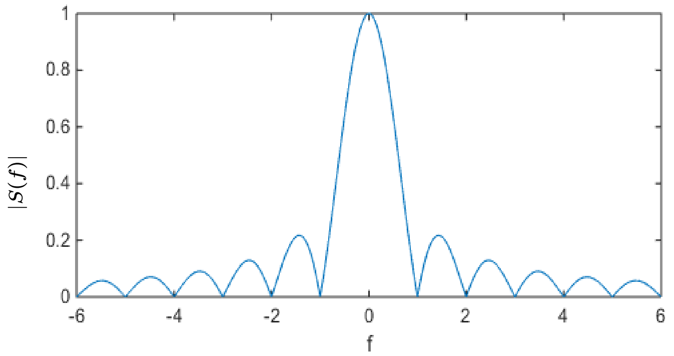
$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt$

$= -\frac{1}{j2\pi f}[e^{-j2\pi f t}]_{-T/2}^{T/2}$

$= \frac{e^{j\pi f \pi} - e^{-j\pi f \pi}}{j2\pi f} = \frac{sin\pi f T}{\pi f} = Tsinc(fT).$

2.





Exercice 6

$$\text{Soit } x(t) = \begin{cases} 1+t & si -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1-t & 0 < t < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Tracer $x(t)$.

2. $\forall a, t \in \mathbb{R}$ calculer $\displaystyle\int_0^a te^{-2j\pi\pi f t}dt$

3. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$.

Solution :

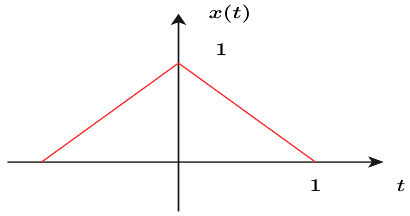
1.

2. On pose : $A = \displaystyle\int_0^a te^{-2j\pi\pi f t}dt$

Pour $f \neq 0$:

$A = [\frac{te^{-j2\pi f t}}{-2j\pi f}]_0^a \displaystyle\int_0^a \frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f}dt = \frac{ae^{-2j\pi f a}}{-2j\pi f} - \frac{1}{2j\pi f}[\int_0^a e^{-2j\pi f t}dt]$

$A = \frac{ae^{-2j\pi f a}}{-2j\pi f} + \frac{1}{2j\pi f}[\frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f}]_0^a = \frac{jae^{-2j\pi f a}}{2\pi f} - \frac{1}{(2j\pi f)^2}[e^{-2j\pi f a} - 1] = \frac{jae^{-2j\pi f a}}{2\pi f} + \frac{e^{-j2\pi f a} - 1}{4\pi^2 f^2}$



Pour $f = 0$:

$A = \frac{a^2}{2}$

Exercice 7

1. On considère le signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Avec : $x_1(t) = asinc(\pi at)e^{j2\pi f_0 t}$ et $x_2(t) = asinc(\pi at)e^{-j\pi f_0 t}$

Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$, puis tracer son allure.

2. Même question pour : $x(t) = 2 + 2cos(2\pi f_0 t) + 4cos(4\pi f_0 t)$

Avec : $f_0 = 100Hz$

Solution :

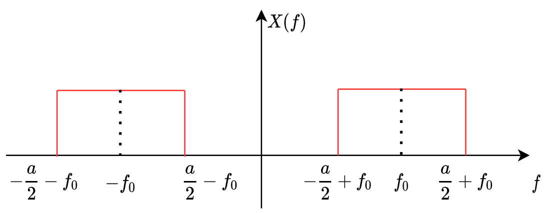
1. $TF\{x(t)\} = X_1(f) + X_2(f) = TF\{asinc(\pi at)(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$

$=TF\{2asinc(\pi at)(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2})\}$

$= TF\{2asinc(\pi at).cos(2\pi f_0 t)\}$

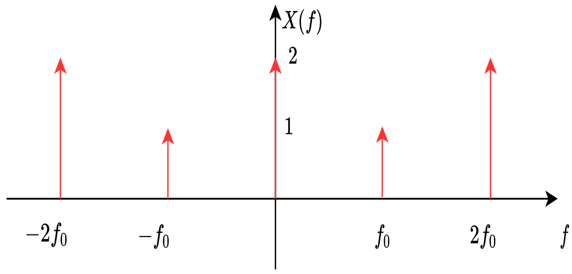
$X(f) = 2rect(\frac{f}{a}) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

$= rect(\frac{f - f_0}{a}) + rect(\frac{f + f_0}{a})$



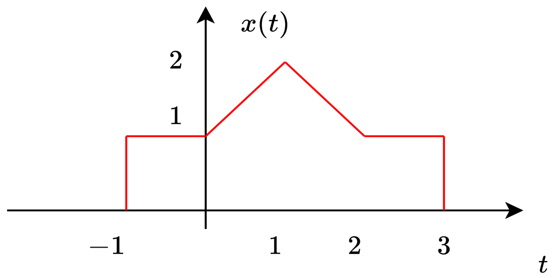
2. $TF\{x(t)\} = TF\{2 + 2cos(2\pi f_0 t) + 4cos(4\pi f_0 t)\}$

$X(f) = 2\delta(f) + 2[\frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] + 4.\frac{1}{2}[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)]$



Exercice 8

Soit le signal $x(t)$ représenté en figure suivante et $X(f)$ est sa transformée de Fourier. Donner le résultat et justifier avec un minimum de calcul les quantités



suivantes :

1. $X(0)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2j\pi f}df$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Solution :

1. $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 5$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$

$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = 1$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2j\pi f}df$

$x(1) = X(f)e^{2j\pi f}df = 2$

4. D'après le théorème de Parseval l'énergie temporelle est égale à l'énergie fréquentielle.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^{0} dt + \int_{0}^{1} (t+1)^2 + \int_{1}^{2} (-t+3)^2 dt + \int_{2}^{3} dt = \frac{7}{3}$$