Chapitre 1

Généralités sur les signaux

1.1 Introduction

Un signal représente une grandeur physique pour lequel son modèle mathématique est établi sous la forme d'une ou plusieurs variables indépendantes. Pour cela le signal peut être défini suivant sa dimension.
Le signal est qualifié de monodimentionnelle (1 D), dans le cas d'une seule variable, bisimentionnelle (2D) pour deux variables et multidimentionnelle si sa fonction est de plusieurs variables.
Le signal mesuré est généralement traduit à partir d'une transformation d'un phénomène physique en un signal électrique obtenu à travers un capteur ou transducteur. Ce dernier est caractérisé par une amplitude et un temps continu qui permettent de le classer sous la catégorie de signaux analogique. Par ailleurs, l'analyse de ce signal et son traitement par ordinateur nécessite la numérisation du signal analogique en faisant appel de la conversion analogique vers la conversion numérique (cf fig 1.1.).
Ce chapitre est consacré aux différentes notions de base de la théorie du signal. De plus, les approches permettant d'effectuer l'analyse du signal étudié pour le traitement du signal.

1.2 Signaux analogiques et discrets

Les signaux analogiques et discrets sont présents pour toute transmission d'information définissant un phénomène physique.

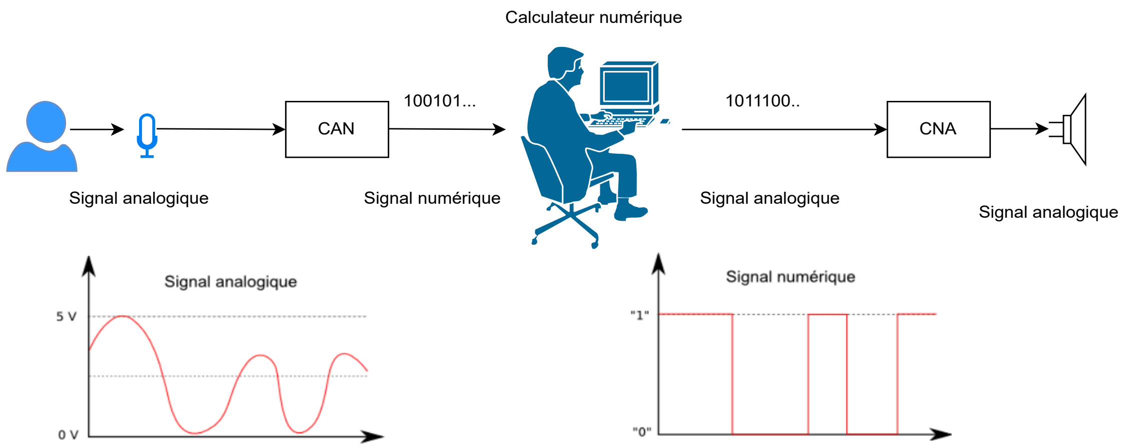


FIGURE 1.1 – **Chaine de transmission CAN et CNA**

Le signal analogique représente la forme d'une onde souvent sous la forme sinusoïdale qui vari de façon continue au cours du temps.

Le signal discret varie d'une façon discontinue au cours du temps et les valeurs du signal sont discrètes. Le temps est un paramètre important de classification entre les deux signaux. De plus, un autre paramètre pris en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue (valeur réelle) ou discrète (quantifiée).

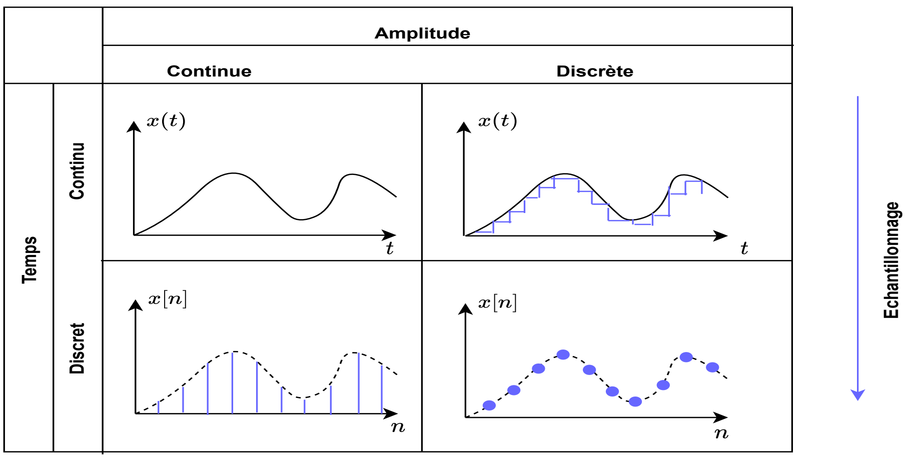


FIGURE 1.2 – **Classification morphologique d'un signal**

1.3 Système

Un système est un ensemble reliant les signaux d'entrée avec les signaux de sortie.

$x(t)$: Signal d'entrée : commande, consigne(valeur désirée) ou perturbation (bruit).

$y(t)$: signal de sortie : mesure (courant, tension, position...)

1.4 Signaux particuliers

Certaine représentation de signaux particulier sont utilisées dans le traitement de signal dans le but de simplifier les opérations de calcul.

1.4.1 *Signal échelon*

La fonction échelon modélise un signal qui change son état très rapidement de 0 à 1 et reste ensuite à 1. Cette fonction représente par exemple le clic de l'interrupteur (mise sous tension). La réponse à un échelon s'appelle une réponse indicielle.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

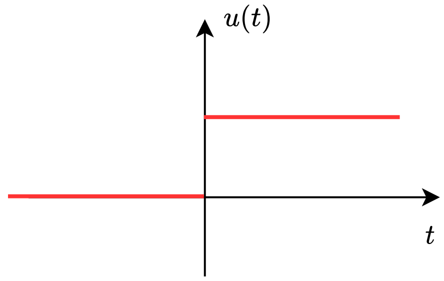


FIGURE 1.3 – **Signal échelon**

La dérivée de l'échelon unité est la fonction impulsion de Dirac. $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

1.4.2 *Rampe unité*

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ at & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$r(t) = atu(t)$$

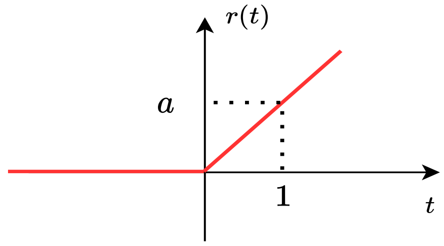


FIGURE 1.4 – **Signal Rampe**

La dérivée de la rampe est la fonction l'échelon unité. $\frac{dr(t)}{dt} = u(t)(t)$

1.4.3 *Signe*

La fonction signa peut être exprimée en fonction de la fonction échelon comme suit : $sgn(t) = 2u(t) - 1$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

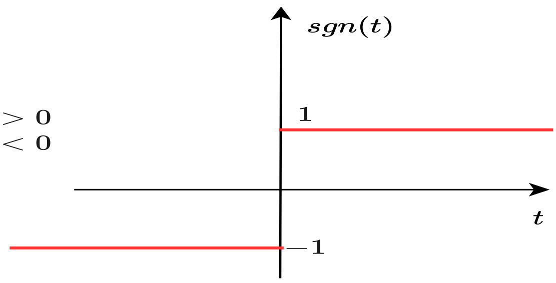


FIGURE 1.5 – **Signal Signe**

1.4.4 *Impulsion de Dirac*

Cette fonction est appelée aussi distribution car c'est une fonction discontinue nulle sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Elle modélise une action s'exerçant pendant un temps très court (chocs, impulsion électrique...)

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

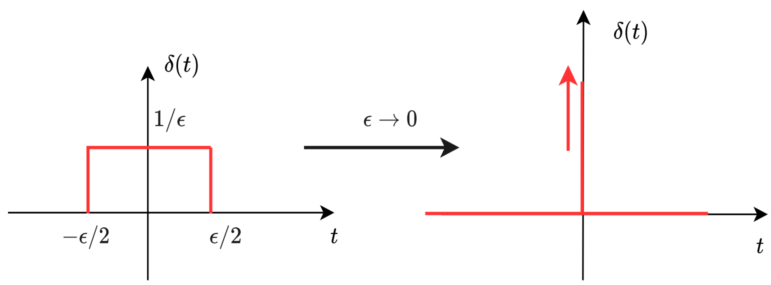


FIGURE 1.6 – **Signal implusion de Dirac**

On peut encore considérer $\delta(t)$ comme la dérivée de la fonction échelon unité $u(t)$.

$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t)dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon}dt = \varepsilon/\varepsilon = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t)dt = 1$$

1.4.5 *Propriétés*

- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$

- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

1.4.6 *Triangle*

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t| & si 1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Dans le cas générale : $x(t) = Atri(\frac{t-\tau}{T})$, avec :

$A : amplitude$, τ : centre et T : etendu.

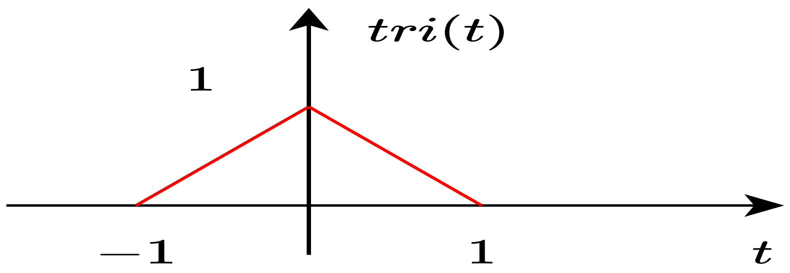


FIGURE 1.7 – **Signal triangle**

1.4.7 *Peigne de Dirac*

Cette fonction est appelée aussi fonction d'échantillonnage (cf fig.1.8.)

T : période d'échantillonnage.

1.4.8 *Fonction sinus cardinal*

La fonction sinus cardinal intervient dans le traitement de signal l'ors d'un calcul du spectre d'un signal obtenu par troncature. Cette fonction permet la synthèse exacte des signaux à spectre de support fini.

Une deuxième définition, nommée sinus cardinal normalisé.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

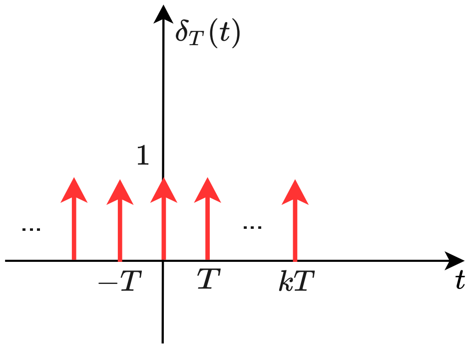


FIGURE 1.8 – **Signal peigne de Dirac**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)dt = 1$$

$sincx = \frac{sinx}{x}$

$sincx = \frac{sin\pi x}{\pi x}, \forall x \neq 0$

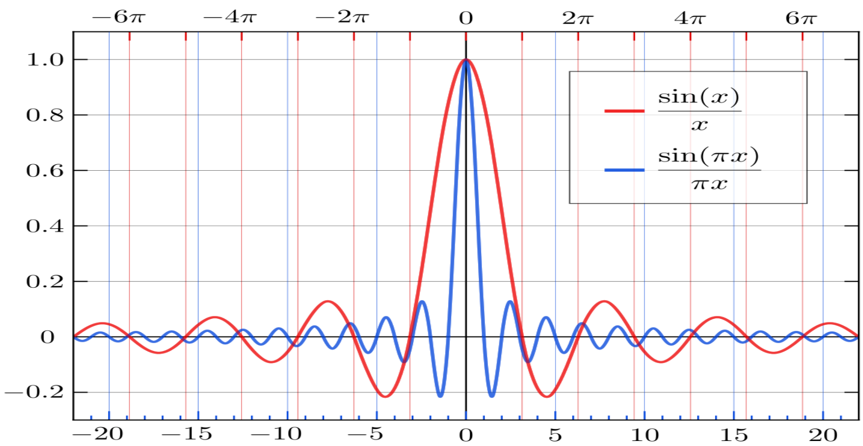


FIGURE 1.9 – **Signal sinus cardinal**

1.5 Signaux déterministes

Suivant la classification phénoménologique, les signaux déterministes sont des signaux dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée grâce à une description mathématique ou graphique sous une forme périodique ou non. Il est à noté que la plupart des signaux d'origine physique ont un caractère non reproductible (apériodique).

Un signal déterministe (certain) est un signal qui représente une grandeur phy-

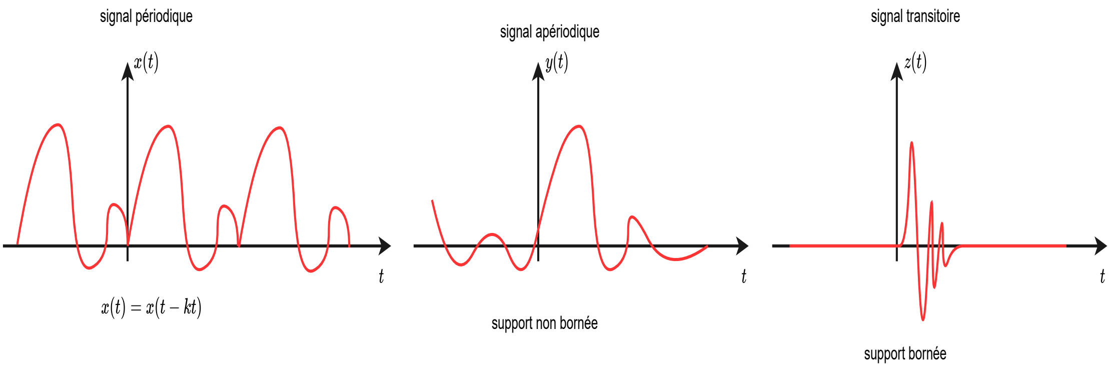


FIGURE 1.10 – **Les diffrérent signaux déterministes**

sique. Sa description mathématique est une fonction réelle.

Ex : fonction de la tension aux bornes d'un Condensateur.

1.6 Opération sur les signaux

1.6.1 *Décalage temporelle*

$y(t) = x(t - a)$

- si $a > 0$ décalage à droite
- si $a < 0$ décalage à gauche

1.6.2 *Changement d'échelle*

Consiste à dilater ou compresser le temps d'un signal

$x(t) \rightarrow x(\alpha t)$

- si $0 < \alpha < 1$: le signal est dilaté par un facteur α
- si $\alpha > 1$: le signal est compressé par un facteur α

1.6.3 *Opérations continues*

$x(t) \rightarrow x(\alpha t + \beta)$

On peut tracer la courbe graphique de $x(\alpha t + \beta)$ selon les étapes suivantes :

1. Changement d'échelle par $|\alpha|$;
2. Si α est négative alors le signal sera inversé ;

3. Décaler la courbe obtenues à l'étape précédente par $\frac{\beta}{\alpha}$ vers la droite si $\frac{\beta}{\alpha}$ est négatif sinon décaler vers la gauche.

1.7 Signaux aléatoire (probabiliste)

Dans ce type de signaux, l'évolution temporelle est imprévisible donc la valeur du signal ne peut être prédite à un instant t. Ce sont des signaux.
Exp : la vitesse du vent, la variation de la température ... La description de ce

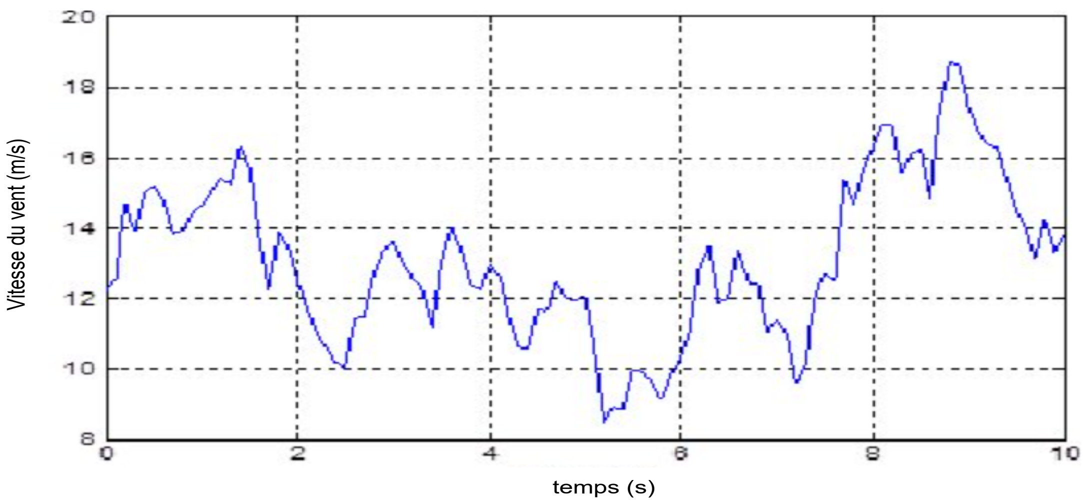


FIGURE 1.11 – **Signal aléatoire**

signal ne peut ce faire suivant un modèle mathématique, il est donc nécessaire de se baser sur les propriétés statistiques telque la moyenne du signal, la variance, l'écart type et la loi de probalbilité.

1.7.1 *Stationnarité*

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des signaux aléatoires.
Un signal aléatoire est staionnaire si ses propriétés statistiques telque sa moyenne statistique (son espérance) est indépendante du temps.

1.7.2 *Ergodisme*

La deuxième propriétés temporelles d'un signal aléatoire est ergodisme. L'ergodisme est une propriété très souvent employée, mais non vérifiable, à l'exception de quelques domaines de la physique.

1.8 Notions de puissance et d'énergie d'un signal

1.8.1 *Moyenne d'un signal périodique*

$$x_{moy}(t) = \int_0^T x(t)dt,\ T : \text{la période.}$$

1.8.2 *Moyenne d'un signal apériodique*

$$x_{moy}(t) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt.$$

1.8.3 *Energie du signal*

Un signal $x(t)$ à énergie finie E_x vérifie la condition :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

Un signal $x(t)$ à énergie E_x finie a une puissance moyenne nulle ($P_x = 0$).

1.8.4 *Puissance du signal*

- Pour un Signal $x(t)$ périodique, on définit la puissance moyenne qui est finie sur une durée T par :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

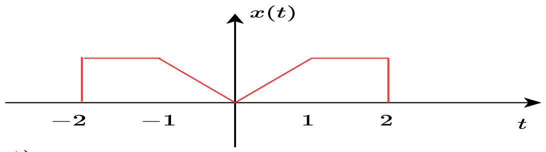
- Pour un signal apériodique, on a : $P_x = \lim_{T\to+\infty} (\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt).$

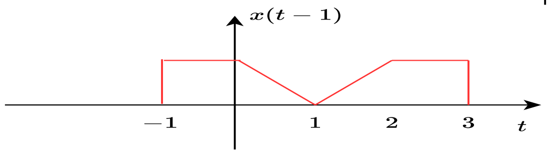
  Un signal à puissance moyenne finie (non nulle) possède une énergie E_x infinie.

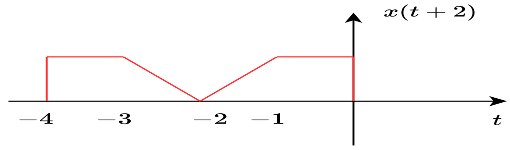
Série de TD 1

Exercice 1

Soit $x(t)$ donné par la figure suivante, tracer les signaux $x(t-1)$ et $x(t+2)$.





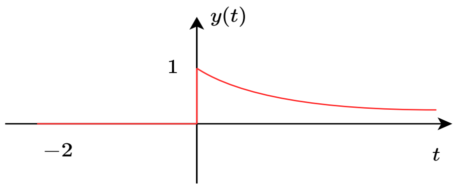


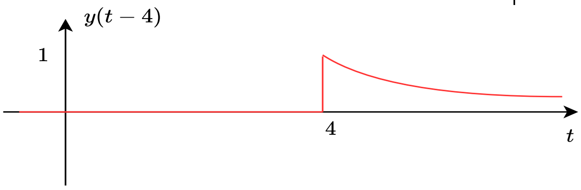
Exercice 2

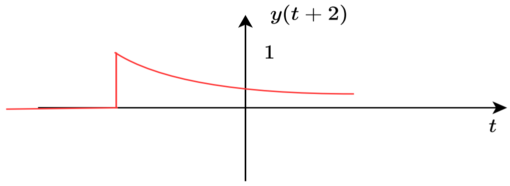
Soit $y(t) = e^{-t}x(t)$

$x(t) = u(t)$

Déterminer et tracer $y(t-4)$ et $y(t+2)$

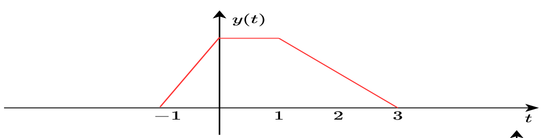


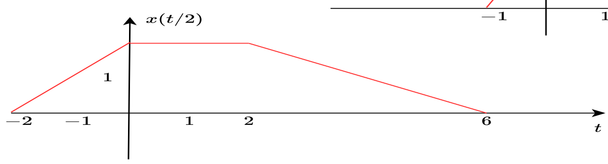


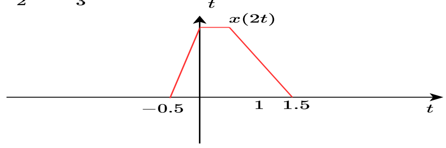


Exercice 3

Soit le signal $x(t)$ suivant, tracer $x(t/2)$ et $x(2t)$.

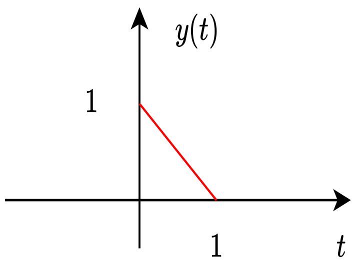


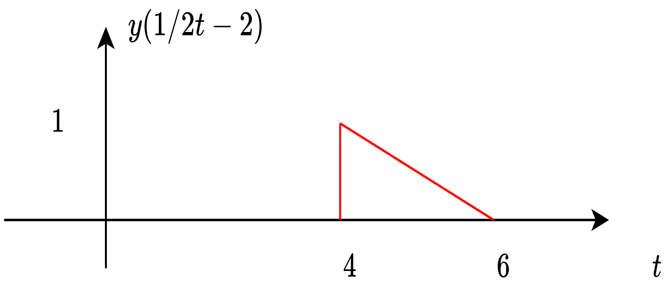




Exercice 4

En se basant les étapes du changement d'échelle et du décalage, tracer $y(1/2t-2)$:





Exercice 5

Soient $x(t) = Asin(wt)$, $y(t) = u(t)$

Calculer la puissance et l'énergie de $x(t)$ et $y(t)$.

Que peut-on dire sur $x(t)$.

Solution :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt) = \frac{A^2}{2T}(1-coswt)dt = \frac{A^2}{2}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow +\infty$$

Donc $x(t)$ est un signal à puissance finie et énergie infinie.

$P_y = 1/2$

$E_y = +\infty$

Exercice 6

Même question pour :

$z(t) = t.u(t)$ et $h(t) = ae^{-at}u(t)$ avec $a > 0$

Solution :

$P_z = \frac{T^2}{24}$ et $P_z = +\infty; T \rightarrow +\infty$

$E_z = +\infty$

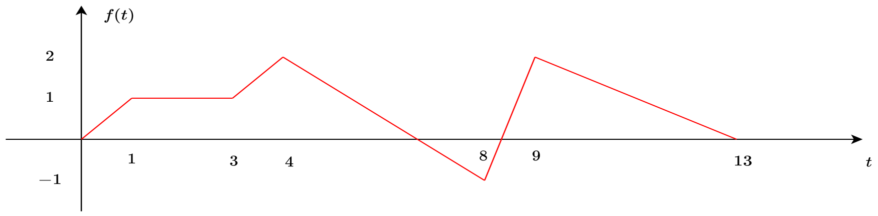
$P_h = 0$

$E_h = \frac{A^2}{2a}$

Exercice 7

Trouver l'expression de $f(t)$ en fonction de $u(t)$, $\delta(t)$, $r(t)$.

Solution :



$$f(t) = r(t) - r(t-1) + r(t-3) - \frac{7}{4}r(t-4) + \frac{15}{4}r(t-8) - \frac{7}{2}r(t-9) + \frac{1}{2}r(t-13)$$