CHAPITRE 4

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Les déterminants fournissent un outil efficace et indispensable pour la discussion des systèmes linéaires : ils permettent d'avoir les conditions de compatibilité sous forme de relations liant les coefficients et fournissent aussi des formules qui donnent explicitement la solution (formules de **Cramer**).

Les notions essentielles abordées dans ce chapitre sont :

— Déterminant.
— Permutations.
— Convention d'écriture.
— Systèmes d'équations linéaires
— Définitions et interprétations.
— Expression matricielle et rang d'un système.
— Expression vectorielle.
— Interprétation en termes d'applications linéaires.
— Systèmes de Cramer.

4.1 Déterminant

4.1.1 Permutations

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée, nous devons commencer par introduire les permutations.

Une permutation est une bijection $\sigma : S \to S$, où S est un ensemble. Nous dénotons généralement une permutation sous la forme d'un tableau à deux rangées de sorte que chaque élément de la rangée du bas représente l'image de l'élément qui se retrouve immédiatement au-dessus. En utilisant cette notation, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une permutation telle que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1$, et $\sigma(3) = 2$. (La notation pour les permutations ne doit pas être confondue avec celle des matrices.) L'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est dénoté par S_n. Notons que $|S_n| = n!$. Les éléments de S_2 sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et ceux de S_3 sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(i) = i$ pour $i = 1, \ldots, n$ est la permutation identité.

Soient $\sigma, \gamma \in S_n$. Il n'est pas difficile de voir que $\gamma \circ \sigma \in S_n$.

Exemple 4.1 *Soient*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que donne $\gamma \circ \sigma$?

Notons que

$$(\gamma \circ \sigma)(1) = \gamma(\sigma(1)) = \gamma(3) = 1,$$
$$(\gamma \circ \sigma)(2) = \gamma(\sigma(2)) = \gamma(1) = 3,$$
$$(\gamma \circ \sigma)(3) = \gamma(\sigma(3)) = \gamma(2) = 2.$$

Ainsi, $\gamma \circ \sigma$ est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\gamma \circ \sigma$ est la permutation identité. On appelle γ permutation inverse (ou simplement l'inverse) de σ. Chaque permutation a un inverse.

Nous verrons plus tard que la définition du déterminant d'une matrice A de taille $n \times n$ est une somme de termes, chacun contenant un produit de la forme $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$, pour une permutation $\sigma \in S_n$, où $a_{i,j}$ dénote l'élément (i,j) de $\mathbf{A}$.

Rappelons que l'on utilise le premier indice pour les lignes et le second pour les colonnes. Ainsi, le produit $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ contient exactement un élément de chacune des lignes de A. Puisque $\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$ est une permutation des nombres $1,\ldots,n$, le produit

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

contient aussi exactement un élément de chacune des colonnes de A.

Exemple 4.2 *Soient*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \end{bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} = cdv$

Exercice 4.1 *1. Pour chacune des permutations suivantes, donnez la permutation inverse.*

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; b. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; c. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Quel valeur prend* $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$ *?*

Solution. 1. a. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = 3 \cdot 1 \cdot (-5) = -15.$ □

Avant d'aborder le déterminant, nous devons aussi introduire la notion d'inversion d'une permutation.

Definition 4.1 *Soit $\sigma \in S_n$. La paire (i, j) est une inversion de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. (À ne pas confondre avec la permutation inverse discuté au préalable.) Le nombre total d'inversions de σ est dénoté par $\operatorname{inv}(\sigma)$.*

Exemple 4.3 *Considérons*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La paire $(1, 2)$ est une inversion de σ car on a $1 < 2$ et $\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$. L'autre inversion est donnée par la paire $(1, 3)$. Donc $\operatorname{inv}(\sigma) = 2$.

Exemple 4.4 *Soit $\sigma \in S_n$ pour laquelle éxiste $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j$ tels que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, et $\sigma(k) = k$ pour tout les autres indices. Nous voulons déterminer $\operatorname{inv}(\sigma)$.*

Notons que pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1, (i, k)$ est une inversion car $i < k$ et $\sigma(i) = j > k = \sigma(k)$.

De plus, pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1, (k, j)$ est une inversion car $k < j$ et $\sigma(k) = k > i = \sigma(j)$.

Finalement, la paire (i, j) est également une inversion. Ainsi,

$$\operatorname{inv}(\sigma) = 2(j - 1 - (i + 1) + 1) + 1 = 2(j - i) - 1,$$

qui est toujours impair.

Par exemple, les inversions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

sont $(2, 3), (3, 4)$ et $(2, 4)$.

Definition 4.2 *Si $A = (a_{ij})$, le déterminant de $\mathbf{A}$, dénoté par $\det(\mathbf{A})$, est défini par*

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

où $a_{i,j}$ dénote l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $\mathbf{A}$.

Le calcul du déterminant tel que défini requiert la somme de $n!$ termes. Chacun de ces termes dépend d'une permutation de S_n et du produit de n éléments de $\mathbf{A}$, et le signe dépend de la parité du nombre d'inversion de la permutation. (La parité d'un entier relatif nous indique si le nombre est pair ou impair.)

Notons que même lorsque la taille de la matrice est petite, le nombre de termes à calculer devient rapidement trop élevé. Par exemple, si $n = 5$, il y a déjà $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ termes. Fort heureusement, il existe des méthodes efficaces de calcul de déterminant qui ne demandent pas autant de termes.

4.1.2 Déterminant de matrices de petite taille

Dans le cas des matrices de taille 2×2 ou 3×3, il y a des formules permettant de simplifier les calculs.

Soient
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Les deux permutations de S_2 sont
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Puisque $\operatorname{inv}(\sigma_1) = 0$ et $\operatorname{inv}(\sigma_2) = 1$, nous avons
$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_1)} a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_2)} a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} = ad - bc.$$
Soient
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}.$$
Les six permutations de S_3 sont énumérées dans le tableau suivant.

i	1	2	3
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\operatorname{inv}(\sigma_i)$	0	1	1
$(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)}$	1	-1	-1
i	4	5	6
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\operatorname{inv}(\sigma_i)$	2	2	3
$(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)}$	1	1	-1

Alors
$$\begin{aligned} \det(A) &= \textstyle\sum_{i=1}^{6} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)} a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} a_{3,\sigma_i(3)} \\ &= p_1q_2r_3 - p_1q_3r_2 - p_2q_1r_3 + p_2q_3r_1 + p_3q_1r_2 - p_3q_2r_1 \end{aligned}$$

4.1.3 Convention d'écriture

Au lieu d'écrire
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix}\right),$$

on écrit simplement

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.2 *1. Pour chacune des permutations suivantes, donnez le nombre d'inversions.*

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ b. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ c. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$a. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ b. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \ c. \begin{bmatrix} 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

3. Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *des matrices de taille* $n \times n$ *telles que* $\mathbf{B}$ *est obtenue de* $\mathbf{A}$ *en multipliant une ligne de A par le scalaire* α*. Démontrer que* $\det(\mathbf{B}) = \alpha \det(\mathbf{A})$.

Solution. 1. a. Le nombre d'inversions est 1, b. Le nombre d'inversions est 6, c. Le nombre d'inversions est 6.

2. a. 1, b. $ad - bc$, c. pqr.

3. Supposons que $\mathbf{B}$ soit obtenue de $\mathbf{A}$ en multipliant la i-ième ligne par α. Alors

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} b_{p,\sigma(p)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \left(\prod_{p \neq i} a_{p,\sigma(p)} \right) \left(\alpha a_{i,\sigma(i)} \right) \\ &= \alpha \left(\textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} a_{p,\sigma(p)} \right) \\ &= \alpha \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

□

4.1.4 Matrices spéciales

Matrices ayant une ligne ou une colonne nulle

Soit A une matrice carré ayant une ligne ou une colonne nulle. Alors $\det(\mathbf{A}) = 0$. En effet, notons que chaque terme de la définition de $\det(\mathbf{A})$ est une produit de la forme $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, pour une permutation σ. Ainsi, chaque terme contient exactement un élément de chaque ligne et de chaque colonne de $\mathbf{A}$, ce qui implique que chaque terme est nul, ce qui implique que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Matrices de permutations

Une matrice de permutation de taille $n \times n$ est une matrice obtenue de la matrice identité $\mathbf{I}_n$ en permutant ses lignes. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de permutation.

Comme son nom le suggère, une telle matrice permet d'encoder directement une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. L'interprétation est la suivante : si σ est encodée par la matrice de permutation, alors $\sigma(i)$ est l'indice de la colonne de l'élément contenant 1 à la i-ième ligne. Dans I'exemple ci-dessus, la permutation correspondante est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

car dans la ligne 1, la colonne 2 contient 1 ; dans la ligne 2, la colonne 4 contient 1 ; dans la ligne 3, la colonne 1 contient 1 ; dans la ligne 4, la colonne 3 contient 1.

Pour une matrice de permutation $\mathbf{P}$ donnée qui encode σ, le déterminant de $\mathbf{P}$ est tout simplement $(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$. À l'exemple ci-dessus, il y a trois inversions. Donc, le déterminant est $(-1)^3 = -1$.

Ce résultat se voit directement à partir de la définition du déterminant : chaque terme de la somme contient un facteur $(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma')}$ qui multiplie le produit de n éléments d'exactement un élément de chaque ligne et un élément de chaque colonne. La seule façon d'obtenir un terme non nul est d'utiliser une permutation qui extrait l'élément non nul de chaque ligne. II n'y a qu'une permutation pour laquelle c'est le cas, celle qui est encodée par σ.

Matrices triangulaires

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée triangulaire supérieure (c'est-à-dire que $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$). Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Dans ce cas, $\det(\mathbf{A})$ est le produit des éléments sur la diagonale. Ici, le déterminant est $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

Voyons pourquoi c'est le cas. Soit $\sigma \in S_n$. On commence par montrer que si σ n'est pas la permutation identité, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$.

Supposons que $\sigma(1) \neq 1$. Alors il doit y avoir un $i \geq 2$ tel que $\sigma(i) = 1$. Ceci donne $a_{i,\sigma(i)} = 0$ puisque $\mathbf{A}$ est triangulaire supérieure et $i > \sigma(i)$. Donc, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) \neq 1$.

Supposons que $\sigma(1) = 1$ mais $\sigma(2) \neq 2$. Alors il doit y avoir un $i \neq 2$ tel que $\sigma(i) = 2$. Mais $i \neq 1$ puisque nous avons déjà $\sigma(1) = 1$. Donc, $i \geq 3$. Ceci donne encore $a_{i,\sigma(i)} = 0$, puisque $i > \sigma(i)$. Donc, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) \neq 2$.

Nous pouvons continuer de cette manière pour montrer que si $\sigma(i) = i$ et $\sigma(i+1) \neq i+1$, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$. Ainsi, le seul terme de $\det(\mathbf{A})$ qui être non nul est celui pour lequel $\sigma(i) = i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, ce qui implique que $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

En utilisant un argument semblable, on peut conclure que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (une matrice où tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls) est aussi donné par le produit des éléments sur la diagonale.

Exercice 4.3 *1. Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :*

$$a. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ b. \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \ et\ c. \begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ 3 & 1+i \end{bmatrix}.$$

Solution. a. 4, b. adf, c. $(2-i)(1+i) = 3+i$. □

4.1.5 Propriétés fondamentales

Proposition 4.1 *Soient A, $B \in S^{n\times n}$, S un anneau. Alors*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

Une conséquence immédiate et utile de la proposition précédente est que

$$\det\left(\mathbf{A}^k\right) = \det(\mathbf{A})^k$$

pour tout entier naturel k.

Exemple 4.5 *Soient* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *telles que* $\det(\mathbf{A}) = 3$ *et* $\det(\mathbf{B}) = -2$. *Alors* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = -6$.

Exemple 4.6 *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors $\det\left(\mathbf{A}^{100}\right) = \det(\mathbf{A})^{100} = (-1)^{100} = 1$.

Le déterminant satisfait aussi aux propriétés suivantes :

- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en ajoutant un multiple d'une ligne de $\mathbf{A}$ à une autre ligne de $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en échangeant deux lignes det $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
- $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.
- Si α est un scalaire et $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$, $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$.

Exemple 4.7 *Soit* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Notons que* $\det(\mathbf{A}) = 3$.

- $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A}) = 3$.
- *Notons que* $\mathbf{A}$ *est inversible. Donc,* $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{3}$.
- $\det(2\mathbf{A}) = 2^2 \det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 3 = 12$ *puisque* $\mathbf{A}$ *est* 2×2.
- $\det(-\mathbf{A}) = \det((-1)\mathbf{A}) = (-1)^2 \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 3$. *Notons que dans ce cas,* $\det(-\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

Exercice 4.4 *1. Démontrez que si* $\mathbf{A}$ *est inversible, alors* $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2. Démontrez que si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^4$, alors $\det(-\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

Solution. 1. Notons que, dans ce cas,

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

d'où $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2. $\det(-\mathbf{A}) = \det((-1)\mathbf{A}) = (-1)^4 \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$. □

4.1.6 Méthodes efficaces

En général, on préfère éviter de calculer le déterminant d'une matrice directement à partir de la définition. Dans cette section, nous étudions deux méthodes efficaces permettant le calcul du déterminant.

Calculer le déterminant à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{K}$ un corps. Rappelons que l'ajout d'un multiple d'une ligne de $\mathbf{A}$ à une autre ligne de A n'a aucun effet sur la valeur du déterminant et que l'échange de deux lignes modifie la valeur du déterminant par un facteur de -1. Si on n'utilise que ces deux types d'opérations afin de transformer $\mathbf{A}$ en une matrice $\mathbf{A}'$ triangulaire supérieure, alors $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \det\left(\mathbf{A}'\right)$, où p est le nombre d'échanges et $\det\left(\mathbf{A}'\right)$ est le produit des éléments sur la diagonale de $\mathbf{A}'$.

Exemple 4.8

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right) \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -6.
\end{aligned}$$

Méthode des cofacteurs

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ et $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On définit $\mathbf{A}(i \mid j)$ par la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en enlevant la i-ième ligne i et la j-ième colonne de $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}(i \mid j)$ est parfois appelée le (i, j)-ième mineur de $\mathbf{A}$.

Exemple 4.9 *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\mathbf{A}(1 \mid 1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(2 \mid 2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}(3 \mid 1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

On peut calculer le déterminant d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ en utilisant la formule du cofacteur. Choisissons n'importe quel $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbf{A}(i \mid j))$$

On dit souvent que le côté droit est l'expansion du cofacteurs selon la i-ième lignee. (Cette formule peut être obtenue directement de la définition originale du déterminant.)

On peut aussi le faire selon la j-ième colonne :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbf{A}(i \mid j))$$

On peut simplifier la notation en utilisant $C_{\mathbf{A}}(i,j)$ pour dénoter $(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}(i \mid j))$. Le terme $C_{\mathbf{A}}(i,j)$ est un cofacteur de $\mathbf{A}$.

Ainsi, l'expansion en cofacteurs selon la i-ième ligne peut s'écrire sous la forme

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i,j),$$

et l'expansion selon la j-ième colonne sous la forme

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i,j).$$

Exemple 4.10 *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

On calcule $\det(\mathbf{A})$ *en effectuant l'expansion en cofacteurs selon la seconde ligne.*

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A}) = \textstyle\sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2,j} \det(\mathbf{A}(2 \mid j)) \\ &= -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 5(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\ &= 24 - 60 + 36 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, A n'est pas inversible.

Exemple 4.11 *L'expansion en cofacteurs peut s'avérer très utile lorqu'une matrice contient plusieurs éléments nuls. Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a}^\top \\ 0_{n-1} & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{a}^\top \in \mathbb{K}^{1\times(n-1)}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ *et* $\mathbf{0}_{n-1}$ *est le* $(n-1)$*-uplet nul. Selon la formule d'expension en cofacteurs selon la première colonne, on obtient*

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(\mathbf{A}(1 \mid 1)) = 1.\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}),$$

puisque $a_{i,1} = 0$ *pour tout* $i \geq 2$.

Exercice 4.5 *1. Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Déterminer $C_{\mathbf{A}}(2,3)$.

2. Calculez le déterminant de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

en utilisant la méthode des cofacteurs sur la deuxième colonne.

Solution. 1. Notons que

$$C_{\mathbf{A}}(2,3) = (-1)^{2+3} \det(\mathbf{A}(2 \mid 3)) = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6.$$

2. Notons que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2}(0) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -32 + (-1) = -33. \end{aligned}$$

□

4.2 Systèmes d'équations linéaires

4.2.1 Définitions et interprétations

Considérons un système linéaire de p équations en n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots\cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{4.1}$$

où les a_{ij} et les b_{ij} appartiennent à un corps K (commutatif).

On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

4.2.2 Interprétation en termes d'applications linéaires

Considérons $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$ munis de leurs bases canoniques respectives e et f. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que $Mat_{e\to f}(u) = A$ et x le vecteur de E tel que

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ est solution de } (4.1) \iff u(x) = b$$

Donc :

- Le système (4.1) est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$.

- Si u est injective et si le système (4.1) est compatible alors l'ensemble des solutions de (4.1) ne possède qu'un et un seul élément.

- Si u est surjective, le système (4.1) est compatible.

- Si u est à la fois surjective et injective alors l'ensemble des solutions de (4.1) ne possède qu'une et une seule solution.

4.2.3 Expression matricielle et rang d'un système

Definition 4.3 *Soient :*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K) \quad et \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

Le système (4.1) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

*On appelle **rang** du système le rang de la matrice A.*

4.2.4 Expression vectorielle

Notons $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A :

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \in K^p, \dots, \vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \in K^p$$

On a :

$$x_1\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 \end{pmatrix}, \dots, x_n\vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

Si donc

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in K^p,$$

le système peut s'écrire :

$$x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n = \vec{b} \tag{4.2}$$

Résoudre le système signifie déterminer les coefficients de la décomposition du vecteur $\vec{b} \in K^p$ sur les vecteurs $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ de K^p : donc, pour que le système soit compatible il faut et il suffit que $\vec{b}$ appartienne à l'espace engendré par les vecteurs $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$.

4.2.5 Systèmes de Cramer

Definition 4.4 *On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.*

Il s'agit donc d'un système de n équations en n inconnues de rang n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \tag{4.3}$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$AX = B \tag{4.4}$$

Comme A est inversible, en multipliant par A^{-1} à gauche, on trouve :

$$X = A^{-1}B \tag{4.5}$$

Réciproquement, $X = A^{-1}B$ satisfait l'équation (4.4). Aussi :

un système de Cramer admet toujours une et une seule solution donnée par (4.5).

La solution peut être exprimée aussi par les formules de Cramer. Considérons l'interprétation vectorielle du système (4.2) ; la solution $(x_1, \ldots, x_n)$ est telle que :

$$x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n = \vec{b}$$

Or : Pour $k \neq i$ les déterminants de cette somme sont nuls (deux colonnes égales). Il reste le terme avec $k = i$, c'est-à-dire x_i dét A. Ainsi :

$$\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\| = x_i \det A$$

d'où :

$$x_i = \frac{\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\|}{\det A}$$

On peut résumer les résultats dans le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Théorème de Cramer) *Un système de Cramer :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{(avec } A = (a_{ij}) = \|\overrightarrow{c_1}, \ldots, \overrightarrow{c_n}\|, \quad \det A \neq 0)$$

admet toujours une et une seule solution, quel que soit le vecteur $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, *solution donnée par les formules de Cramer :*

$$x_i = \frac{\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\|}{\det A}$$

$$\begin{aligned} &det \left\| \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\| \\ &= \det \|\overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k \overrightarrow{c_k}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n}\| \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k \ det \ \|\overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \overrightarrow{c_k}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n}\| \end{aligned}$$

Exemple 4.12 *Soit le système :*

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -46$$

Le système est donc de Cramer. Les formules de Cramer donnent :

$$x = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5, \ y = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1 z = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Exemple 4.13

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = -7 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n = p = 3$ ((S) est un système de cramer).

$$x = \frac{-1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9/7.$$

$$y = \frac{-1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5/7.$$

$$z = \frac{-1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1/7.$$

4.2.6 Cas où $n = p$ et $r < n$

Si on considère maintenant un système de n équations à n inconus, mais $\operatorname{rg} A < n$, c'est à dire

$$\det A = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice M de A sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible, c'est à dire $\det M \neq 0$ contenue dans A et d'ordre r c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à M deviennent des inconnus principales et les $(n - r)$ autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = b_2\,(a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r & = b_n\,(a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution $(x_1, \ldots, x_r)$ qui dépend de $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$. Si cette solution vérifie les $(n-r)$ équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre $(x_1, \ldots, x_r)$ ne vérifie pas une seule équation parmis les $(n - r)$ équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

Exemple 4.14

$$(S):\begin{cases}3x-y+2z=3\\2x+2y+z=2\\x-3y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&2&1\\1&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\det A=0$, (S) *n'est pas un système de Cramer, comme* $|A'|=\begin{vmatrix}3&-1\\2&2\end{vmatrix}=8\neq0$. *Alors* $rgA=2$ *et on considère* x,y *les inconnus et* z *paramètre, alors on obtient le système :*

$$\begin{cases}3x-y=3-2z\\2x+2y=2-z\end{cases}$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution (x,y) dépendante de z.

$$x=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}3-2z&-1\\2-z&2\end{vmatrix}=1-\frac{5}{8}zy=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}3&3-2z\\2&2-z\end{vmatrix}=\frac{1}{8}z$$

Reste à voir si (x,y) vérifie $x-3y+z=1$ (équation réstante) on a :

$$1-\frac{5}{8}z-\frac{3}{8}z+z=1\Rightarrow1=1\ (\mathit{vraie}\ \forall z\in\mathbb{R})$$

donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1-\frac{5}{8}z,\frac{1}{8}z,z):z\in\mathbb{R}.$$

4.2.7 Cas où $n\neq p$

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédement. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $\det M\neq0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.

Si la solution vérifie les équation restantes alors le système globale admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

Exemple 4.15

$$(S):\begin{cases}3x-y=4\\2x+2y=3\\x-5y=-5\end{cases}\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix}$$

On a $\operatorname{rg}A\leq2$ choisissons

$$M=\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det M=8\neq0\Rightarrow rgM=2$$

on prend le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/8 \\ y = 1/8 \end{cases}$$

on a l'équation réstante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

4.3 Exercices

Exercice 1
Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \ \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 2\cos^2 x \\ 1 & -\cos 2x & 2\sin^2 x \\ \cos x \sin x & \cos x \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}$$

Exercice 2
Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60$$

Exercice 3
Les nombres $119, 153$ et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

est divisible par 17.

Exercice 4

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons les polynômes $P_a = (X-a)^2$, $P_b = (X-b)^2$ et $P_c = (X-c)^2$. Déterminer pour quelles valeurs de (a,b,c) la famille $\mathcal{P} = (P_a, P_b, P_c)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 5

Montrer que

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} \\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a) \end{aligned}$$

Exercice 6

Soient

$$P_1 = 2X^2 - X + 1,\ P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X^2 - 1$$

Montrer que la famille $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7

Á quelle condition sur le réel a la famille $e = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = (a,1,1) \quad e_2 = (1,a,1) \quad e_3 = (1,1,a)$$

forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes :

$$1. \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = 8 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 3y + 5z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + 2y + 6z = 2 \\ 7x + 3y + 9z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice 9
Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leur ensemble solution :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}, \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Exercice 10
Discuter, suivant la valeur de m, la dimension de l'espace des solutions des systèmes suivants :
1.
$$\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+mz=0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$$

4.4 Solutions

Exercice 1
1. Une colonne de Δ_1 est nulle donc $\Delta_1 = 0$.
2. Les deux premières colonnes de Δ_2 sont proportionnelles, donc $\Delta_2 = 0$.
3. La première colonne de Δ_3 est somme des deux autres donc $\Delta_3 = 0$.
4. Δ_4 étant diagonale, le déterminant Δ_4 est égal au produit de ces termes diagonaux. Un de ceux-ci étant nul, il en est de même de Δ_4.
5.
$$\Delta_5 \overset{C_3 \to C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

et les première et troisième colonnes de Δ_5 sont proportionnelles. Il vient $\Delta_5 = 0$.
6. La dernière colonne de Δ_6 est somme des deux autres donc $\Delta_6 = 0$.
Exercice 2
Facile par permutations des colonnes.
Exercice 3

Notons Δ ce déterminant. On a :

$$\begin{aligned} 1000\Delta &= \begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 50 & 3 \\ 200 & 80 & 9 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 119 & 10 & 9 \\ 153 & 50 & 3 \\ 289 & 80 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 17 \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où a, b et c désignent respectivement le quotient de $119, 153$ et 289 par 17. On obtient : $\Delta = 17m$ avec

$$m = \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}$$

qui est un entier. Comme 17 est premier avec 1000 , appliquant le lemme de Gauss, 17 divise Δ.

Exercice 4

La matrice de la famille $\mathcal{P}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilisant les déterminants de Vandermonde, on trouve

$$\det M = -2(b-a)(c-a)(c-b).$$

La famille $\mathcal{P}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si les scalaires a, b et c sont deux à deux distincts.

Exercice 5

On développe suivant la première ligne et on reconnaît les formules d'addition :

$$\begin{aligned} &\Delta = \cos(a-b)[\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)] \\ &- \cos(b-c)[\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)] \\ &+ \cos(c-a)[\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b)] \\ &= \cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) \\ &+ \cos(c-a)\sin(c-a) = \tfrac{1}{2}(\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)) \end{aligned}$$

puis on utilise les deux formules

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

et

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}:$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}(2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin 2(c-a))\\ &= \sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin(c-a)\cos(c-a)\\ &= \sin(a-c)(\cos(a+c-2b)-\cos(c-a))\\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)\end{aligned}$$

Exercice 6

Notant $e=(X^2,X,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\operatorname*{Mat}_{e}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

qui est inversible. La famille $\mathcal{P}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7

La famille e forme une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} \neq 0.$$

Ce déterminant vaut : $(a-1)^2(a+2)$.

La famille e est donc libre si et seulement si $a\neq 1$ et $a\neq -2$.

Exercice 8

1. En remontant, on trouve successivement : $z=4; y=2; x=-1$.

2.

$$\begin{cases} x-y+2z=1\\ 2x-3y+z=4\\ x-3y-4z=5\end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=1\\ -y-3z=2\\ -2y-6z=4\end{cases}$$

Les deux dernières équations sont équivalentes. Le système est de rang 2 et compatible. En prenant z comme paramètre, l'ensemble des solutions est $\{(-5z-1,-3z-2,z)\mid z\in\mathbb{K}\}$.

3. Système de Cramer : $\left\{\left(-\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

4. Système de rang 2 et compatible. $\{(2,-3z,z)\mid z\in\mathbb{K}\}$.

5. Système de Cramer : $\{(-2,1,2)\}$.

6. Système de rang 2 mais pas compatible. Pas de solution.

7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0\\ x+y+2z=0\end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x-y+3z=0\\ 3x+5z=0\end{cases}$. Le système est de rang 2, donc compatible. En prenant z comme paramètre, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}z,z\right)\mid z\in\mathbb{K}\right\}$.

8. Le système est clairement de rang 1 et compatible (on a trois fois la même équation).

L'ensemble des solutions est le plan d'équation $x + y - z = 1$.

Exercice 9

Premier système : Matrice de rang 3 (inversible) donc une unique solution $(0, 0, 0)$.

Deuxième système : Matrice de rang 2, système non compatible, pas de solution.

Troisième système : Matrice de rang 2, système non compatible, pas de solution.

Exercice 10

1. Si $m = 1$ ou $m = -1$, alors le système est de rang 1. L'espace des solutions est de dimension 2. Sinon le système est de rang 2 et l'espace des solutions est de dimension 1. Dans ce dernier cas, l'ensemble des solutions est $\{(x, 0, -x), x \in \mathbb{R}\}$.

2. Si $m = 1$, alors le système est de rang 1. L'espace des solutions est de dimension 2. Si $m = -2$, alors le système est de rang 2. L'espace des solutions est de dimension 1. Sinon le système est de Cramer. L'espace des solutions est de dimension 0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Cheung et M. Lemire : Algèbre Linéaire et Applications, (2018) .

[2] B. Gostiaux : Cours de mathématiques spéciales Tome 1 Algèbre, 1^{re} édition, Presses Universitaires de France, Paris, (1993) ISBN 213 045835 1

[3] J. Grifone : Algèbre linéaire 4^{e} édition, Cépaduès Éditions, Toulouse-France. (2011) ISBN : 978.2.85428.962.6.

[4] M. Houimdi : Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, Cours et exercices corrigés, Édition Ellipses, (2021) ISBN-102340045576

[5] I. Medjadj : Cours d'Algèbre I et II Avec Exercices Corrigés, U.S.T.O.M.B., Oran, (2018).

[6] J. L. Ovaert et L. Chambadal : Cours de mathématiques Tome 2 Algèbre II, Gauthier-Villars Éditeur, (1972).

[7] A. Soyeur, F. Capaces et E. Vieillard-Baron : Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI, (2011).