CHAPITRE 3

MATRICES

Dans le cas où $\mathcal{L}_{\Bbbk}(E, E')$ est de dimension finie, disons de dimension r, moyennant le choix d'une base on peut associer à toute application linéaire f un r-uplet d'éléments de $\Bbbk$, les composantes de f. Pour des raisons que nous verrons par la suite, ces composantes sont rangées non pas sur une ligne mais sur un tableau ayant un certain nombre de lignes et de colonnes, que l'on appelle matrice associée à l'application linéaire f.

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Matrices associées aux applications linéaires.
— Produit de deux matrices.
— Matrice de l'inverse d'une application.
— Calcul de l'inverse d'une matrice.
— Changement de base.
— Rang d'une matrice.

Definition 3.1 *On appelle matrice de type (p, n) à cœefficients dans $\Bbbk$ un tableau A de pn éléments de $\Bbbk$ rangés sur p lignes et n colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{ou, enabrégé} : A = (a_{ik})\,, \text{ou aussi} : A = \|a_{ik}\|\,.$$

L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$. Si $n = p$, $\mathcal{M}_{n,n}(\Bbbk)$ est noté : $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$.

Exemple 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 0 & 1+i & i \\ -i & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

Remarquons que dans la notation que nous venons d'adopter, a_{ik} désigne l'élément de la i-ème ligne et de la k-ème colonne.

Une autre notation que nous emploierons aussi dans la suite, est la «notation par colonnes» :

$$A = \|c_1, \dots, c_n\|\,, \quad \text{où} \quad c_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix} \quad \text{est la } k^{\text{ème}} \text{ colonne}$$

Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$ on définit les lois :

- addition : si $A = (a_{ik})\,, B = (b_{ik})$, on note $C = A + B$ la matrice (c_{ik}) telle que :

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad \forall i, k$$

- produit par un scalaire : si $A = (a_{ik})$ et $\lambda \in \Bbbk$ on note λA la matrice (λa_{ik}) c'est-à-dire la matrice obtenue en multipliant tous les éléments par λ.

Exemple 3.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 15 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que, muni de ces lois, $\mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$ est un espace vectoriel sur $\Bbbk$. L'élément neutre est la matrice dont tous les éléments sont nuls, dite matrice nulle, notée 0 . L'opposée de la matrice (a_{ik}) est la matrice $(-a_{ik})$.

Proposition 3.1 *On a :*

$$\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk) = pn$$

Preuve. On vérifie facilement que les pn matrices, dites *matrices élémentaires*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i}^{\text{ème}} \text{ ligne}, \ldots$$

$$E_{pn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$ dite base canonique. □

3.1 Matrices d'un application linéaire

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$, de dimension n et p respectivement, et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Choisissons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et une base $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ de E'. Les images par f des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ se décomposent sur la base $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$:

$$\begin{gathered} f(e_k) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \\ f(e_k) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p2}\varepsilon_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p. \end{gathered}$$

Definition 3.2 *On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ la matrice notée $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ dans la base $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$:*

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On utilisera aussi la notation : $\|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j}$.

S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on écrira aussi $M(f)$ à la place de $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$, mais il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de E et E'.

Dans le cas où f est un endomorphisme, on peut choisir la même base dans E considéré comme espace de départ et d'arrivée. Dans ce cas, on notera $M(f)_{e_i}$ au lieu de $M(f)_{e_i,e_j}$.

Proposition 3.2 *Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ de dimension n et p respectivement, $\{e_i\}$ et $\{\varepsilon_j\}$ des bases de E et E'. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathcal{L}_K(E,E') & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(K) \\ & f & \longmapsto & M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels c'est-à-dire :

$$\begin{cases} M(f+g) = M(f) + M(g) \\ M(\lambda f) = \lambda M(f), \end{cases}$$

et M est bijective.

En particulier : $\dim_{\Bbbk} \mathcal{L}(E,E') = np$.

Preuve. On a en effet :

$$\begin{aligned} M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} &= \|(f+g)(e_1),\ldots,(f+g)(e_n)\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|f(e_1)+g(e_1),\ldots,f(e_n)+g(e_n)\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|f(e_1),\ldots,f(e_n)\|_{\varepsilon_j} + \|g(e_1),\ldots,g(e_n)\|_{\varepsilon_j} \end{aligned}$$

d'après la définition de l'addition des matrices, c'est-à-dire :

$$M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} + M(g)_{e_i,\varepsilon_j}.$$

De même, si $\lambda \in \Bbbk$:

$$\begin{aligned} M(\lambda f)_{e_i,\varepsilon_j} &= \|(\lambda f)(e_1),\ldots,(\lambda f)e_n\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|\lambda f(e_1),\ldots,\lambda f(e_n)\|_{e_j} = \lambda \|f(e_1),\ldots,f(e_n)\|_{\varepsilon_j} \end{aligned}$$

Donc M est linéaire.

D'autre part M est surjective. Soient, en effet :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(K)$$

et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ définie de la manière suivante. On pose d'abord :

$$\begin{gathered} f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p \end{gathered}$$

On prolonge, ensuite, f par linéarité sur E, c'est-à-dire, si :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E,$$

on pose :

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n).$$

Il est facile de vérifier que f est linéaire et que $A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$. Enfin M est injective. Soit en effet $f \in \operatorname{Ker} M$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci signifie que $f(e_1) = 0, \ldots, f(e_n) = 0$. Donc, si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$, on aura $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$, c'est-à-dire $f = 0$. D'après la proposition 2.4, f est injective. □

Exemple 3.3 *Soit E de dimension n et :*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Considérons une base $\{e_i\}$. On a : $id_E(e_i) = e_i$. Donc :

$$M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}\right)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \textit{ est l'élément unité de } \mathbb{k})$$

Cette matrice est notée I_n ou simplement I et est appelée matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

$f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \quad f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots +$

Exemple 3.4 *Soit $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x - y, z - y) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = \epsilon_1 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (-1,-1) = -\epsilon_1 - \epsilon_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,1) = \epsilon_2 \end{aligned}$$

donc

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5 *On considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} w: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & a_1x_1 + ... + a_nx_n \end{array}$$

En munissant $\mathbb{R}^n$ *de la base canonique* $\{e_1, ..., e_n\}$ *et* $\mathbb{R}$ *de la base canonique* $\{1\}$*, on a :*

$$\begin{aligned} &f(e_1) = f(1, ..., 0) = a_1 = a_1\epsilon_1 \\ &f(e_2) = f(0, 1, ..., 0) = a_2 = a_2\epsilon_2 \\ &.......... \\ &f(e_n) = f(0, 0, ..., 1) = a_n = a_n\epsilon_n \end{aligned}$$

Alors

$$M(w)_{e_i,\varepsilon_j} = (a_1, ..., a_n).$$

3.2 Produit de deux matrices

Au paragraphe précédent, nous avons défini sur les matrices les opérations d'addition et de produit par un scalaire. En vertu de la proposition 3.2, ces opérations correspondent aux opérations analogues sur les applications linéaires, c'est-à-dire on a :

$$\begin{gathered} M(f+g) = M(f) + M(g) \\ M(\lambda f) = \lambda M(f). \end{gathered}$$

Nous allons maintenant définir une nouvelle opération, le produit de matrices. Comme nous le verrons (cf. proposition 3.5), elle correspond à la composition des applications, en ce sens que :

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g).$$

Tout d'abord, remarquons que la composition des applications ne peut se faire pour tout couple d'applications, mais uniquement si l'espace d'arrivée de g est inclus dans l'espace de départ de f. Cette situation va se retrouver sur les matrices : le produit ne peut s'effectuer qu'entre matrices d'un certain type.

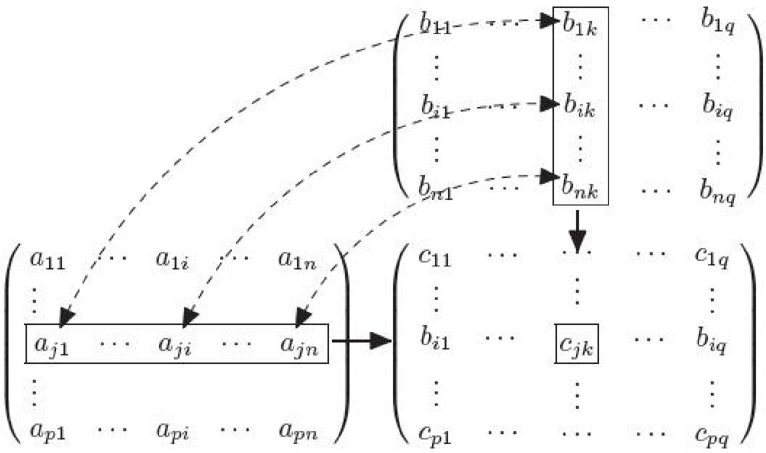
Definition 3.3 *On appelle produit de matrices l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,q}(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(K) \\ (a_{ji}), (b_{mk}) & \longmapsto & (c_{jk}) \end{array}$$

où :

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + ... + a_{jn}b_{nk}.$$

En d'autres termes, l'élément c_{jk} de la j^{ème} ligne et k^{ème} colonne du produit $C = AB$ est la somme des produits des éléments de la jéme ligne de A par les éléments de même rang de la k^{ème} colonne de B. Brièvement, on dit que le produit de deux matrices s'effectue «lignes par colonnes». Voici le schéma de cette définition.



Remarque 3.1 *Le produit AB ne peut s'effectuer que si le nombre des colonnes de A est égal au nombre des lignes de B.*

Exemple 3.6 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{array}{ccc} & \times & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{C=AB} \end{array}$$

Exemple 3.7 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\begin{array}{cc} & \times \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}}_{AB} \end{array}$$

Les remarques suivantes sont importantes :

Remarque 3.2 *1. On peut avoir $AB = 0$ sans que A ou B soient nulles.*

2. $AB = AC$ avec $A \neq 0$ n'implique pas nécessairement $B = C$ (c'est-à-dire, en général on ne peut pas "simplifier" par A, même si $A \neq 0$).

3. En général on a $AB \neq BA$ (c'est-à-dire : la multiplication entre matrices n'est pas commutative).

Exemple 3.8 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits, on trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ce qui montre 1.)}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc } BA \neq AB \text{(ce qui montre 3.)}$$

et $AB = AC$ (ce qui montre 2. puisque on a $B \neq C$).

Proposition 3.3 *La multiplication est associative, c'est-à-dire :*

$$A(BC) = (AB)C, \quad (\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}, \forall B \in \mathcal{M}_{n,q}, \forall C \in \mathcal{M}_{q,m}).$$

La multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition, c'està-dire :

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + D)B = AB + DB, \quad (\forall A, D \in \mathcal{M}_{p,n}, \forall B, C \in \mathcal{M}_{n,q})$$

Preuve. Laissée comme exercice. □

Remarquons enfin que la multiplication est une loi interne sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n, c'est-à-dire elle est une application :

$$\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K).$$

On vérifie immédiatement que la matrice I_n est l'élément neutre de la multiplication, c'est-à-dire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$: $\quad I_nA = AI_n = A$.

3.3 Matrice d'un vecteur

Definition 3.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension $n, \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ un vecteur de E. On appelle matrice de x dans la base $\{e_i\}$ la matrice colonne des composantes de x dans la base $\{e_i\}$:*

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(notée aussi $M(x)$).

Remarque 3.3 *Cette définition est cohérente avec la définition de matrice associée à une application linéaire. En effet, on peut identifier tout vecteur de E à une application linéaire de K dans E : à tout x de E on associe l'application linéaire*

Si l'on écrit la matrice de f dans la base $\varepsilon = 1$ de K et $\{e_i\}$ de E, on a :

$$f(\varepsilon) = x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

donc :

$$M(f)_{\varepsilon, e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{k} & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda x. \end{array}$$

Proposition 3.4 *Soient E, F deux espaces vectoriels sur $K, \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ deux bases de E et F respectivement. Pour toute application $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et pour tout $x \in E$, on a :*

$$M(f(x))_{\varepsilon_j} = M(f)_{e_i, \varepsilon_j} M(x)_{e_i},$$

ou plus brièvement :

$$M(f(x)) = M(f)M(x).$$

Preuve. Soit

$$M(f)_{e_i, \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix},$$

ce qui veut dire que : $f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{pj}\varepsilon_p = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right)}_{y_k} \varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} y_k\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Donc :

$$M(f(x))_{\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix},$$

avec

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \cdot M(x)_{e_i} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \cdot M(x)_{e_i} = M(f(x))_{\varepsilon_j}.$$

□

Exemple 3.9 *Soit le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique. Déterminer l'image du vecteur $x = (3,2)$ par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$.*

On a :

$$M(f(x)) = M(f) \cdot M(x) = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

3.4 Produits de matrices

Proposition 3.5 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur K, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$, $\{\eta_1, \ldots, \eta_q\}$ des bases de E, F et G respectivement. Si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$ (c'est-à-dire : $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} G$), on a :*

$$M(f \circ g)_{e_i,\eta_k} = M(f)_{\varepsilon_j,\eta_k} M(g)_{e_i,\varepsilon_j}$$

ou, plus brièvement :

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

Preuve. Soit $x \in E$ arbitraire. En utilisant le résultat de la proposition 3.4, on a :

$$M(f \circ g)M(x) = M((f \circ g)(x)) = M(f(g(x))) = M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x)$$

d'où, puisque x est arbitraire :

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

□

Exemple 3.10 *Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la matrice de l'application h qui est la composée de la rotation g autour de O d'angle θ, suivie de la projection f sur la première bissectrice parallèlement à la seconde bissectrice.*

On a :

$$\begin{aligned} M(h) &= M(f \circ g) = M(f)M(g) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta & -\sin\theta + \cos\theta \\ \cos\theta + \sin\theta & -\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 3.5 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite inversible s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :*

$$AA' = A'A = I.$$

A' est dite inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple 3.11 *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible : son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

comme on le vérifie immédiatement en effectuant les produits AA^{-1} et $A^{-1}A$.

Il existe des matrices non inversibles, par exemple la matrice nulle. Mais la matrice nulle n'est pas la seule matrice non inversible. Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existait une matrice

$$A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

telle que $AA' = I$, on aurait :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{c'est-à-dire :} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui, évidemment, est impossible.

3.5 Matrice de l'inverse d'une application

En fait, les matrices inversibles sont les matrices qui représentent les applications linéaires bijectives. On a en effet :

Proposition 3.6 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n sur K, $\{e_i\}$ une base de E, $\{\varepsilon_j\}$ une base de F. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective (c'est-à-dire est un isomorphisme) si et seulement si $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ est inversible. De plus :*

$$M(f)^{-1}_{e_i,\varepsilon_j} = M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i}$$

ou, d'une manière plus concise :

$$M\left(f^{-1}\right) = M(f)^{-1}.$$

Preuve. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$; d'où $M\left(f^{-1} \circ f\right)_{e_i,e_i} = M\left(\mathrm{id}_E\right)_{e_i,e_i}$ Donc, d'après la proposition 3.19 :

$$M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = I$$

De même, on voit que

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i} = I.$$

□

3.6 Calcul de l'inverse d'une matrice

Il existe différentes méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice, sur lesquelles nous reviendrons. Pour le moment, on peut retenir la suivante qui est d'ailleurs d'un usage courant.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk), x$ et $x' \in K^n$ et X, X' les matrices colonnes qui représentent x et x' dans la base canonique de $\Bbbk^n$. Considérons l'équation matricielle :

$$X' = AX \tag{3.1}$$

Si A est inversible, en multipliant les deux membres à gauche par A^{-1} on obtient $A^{-1}X' = (A^{-1}A)\, X$, c'est-à-dire :

$$X = A^{-1}X'$$

Donc A^{-1} est la matrice du système obtenu en résolvant le système (3.1) en les composantes x_i de x.

Exemple 3.12 *Calculer l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ecrivons l'équation matricielle (3.1) avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x'_1 & = x_1 + 2x_2 \\ x'_2 & = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

En résolvant en x_1 et x_2, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = 3x'_1 - 2x'_2 \\ x_2 = -x'_1 + x'_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X',$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.6 *L'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ *est noté* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ *et est dit groupe linéaire.*

3.7 Changement de base

La matrice qui représente une application linéaire a été construite à l'aide d'un choix des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment sont reliées deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes.

3.7.1 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E. Les vecteurs e'_i s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs e_i :

$$\begin{aligned}
e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\
e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n
\end{aligned}$$

Definition 3.7 *On appelle matrice de passage de la base* $\{e_i\}$ *à la base* $\{e'_i\}$ *la matrice notée* $P_{e_i \longrightarrow e'_i}$ *dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* e'_i *dans la base* $\{e_i\}$ *:*

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = \|e'_1, \ldots, e'_n\|_{e_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

On a, bien entendu :

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = M\,(id_E)_{e'_i, e_i}$$

On en déduit immédiatement (propositions 3.5 et 3.6) :

Proposition 3.7 *1. Propriété transitivité :*

$$P_{e_i \to e_{i'}} P_{e_{i'} \to e_{i"}} = P_{e_i \to e_{i"}}$$

2. Les matrices de passage sont inversibles et on a :

$$\left(P_{e_i \to e'_i}\right)^{-1} = P_{e'_i \longrightarrow e_i}.$$

3.7.2 Changement de base sur les composantes d'un vecteur

Soit $x \in E$, de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\{e_i\}$ et de composantes $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans la base $\{e'_i\}$. Il est facile de déterminer les relations entre les x_i et x'_i à l'aide de la matrice de passage $P_{e_i \longrightarrow e'_i}$.

Notons

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(x)_{e_i}, \quad X' := \begin{pmatrix} x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M(x)_{e'_i} \quad \text{et} \quad P = P_{e_i \to e'_i}$$

On a :

$$PX' = M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}\right)_{e'_i, e_i} \times M(x)_{e'_i} = M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}(x)\right)_{e_i} = M(x)_{e_i} = X$$

c'est-à-dire $PX' = X$, d'où $X' = P^{-1}X$.

Nous avons donc démontré la relation importante :

Proposition 3.8 *Soient $x \in E, \{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ deux bases de E, $P = P_{e_i \to e'_i}$ et $X = M(x)_{e_i}$, $X' = M(x)_{e'_i}$. Alors :*

$$X' = P^{-1}X.$$

Remarque 3.4 *On dit que les composantes d'un vecteur x se transforment d'une manière "contravariante" pour exprimer le fait que si les bases sont transformées par la matrice P, les composantes de x sont transformées par la matrice P^{-1}.*

Exemple 3.13 *Soit $\mathbb{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\{e_1, e_2\}$ et la base $\{e'_1, e'_2\}$ définie par :*

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 \\ e'_2 = 3e_1 + 2e_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$. On a deux méthodes pour calculer les composantes de x dans la base $\{e'_1, e'_2\}$.

1$^{\text{ère}}$ **méthode (méthode matricielle)**

On a :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En appliquant la relation de la proposition 3.25, on trouve :

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$x = -5e'_1 + 4e'_2.$$

$2^{\text{ème}}$ **méthode (calcul direct)**
On exprime e_1 et e_2 en fonction de e'_1 et e'_2 en résolvant le système (3.2).
On a :

$$\begin{cases} e_1 = 2e'_1 - e'_2 e_2 & = -3e'_1 + 2e'_2 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de x, on trouve :

$$x = 2e_1 + 3e_2 = 2\left(2e'_1 - e'_2\right) + 3\left(-3e'_1 + 2e'_2\right) = -5e'_1 + 4e'_2.$$

3.7.3 Changement de base sur la représentation matricielle d'une application linéaire.

Proposition 3.9 *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E et $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ $\left\{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p\right\}$ deux bases de F. Notons :*

$$A = M(f)_{e_i, \varepsilon_j} \quad A' = M(f)_{e'_i, \varepsilon'_j}, \quad P = P_{e_i \to e'_i}, \quad Q = P_{\varepsilon_j \longrightarrow \varepsilon'_j}$$

On a alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve. Soit $x \in E$ un vecteur arbitraire. D'après la proposition 3.8, on a :

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = Q^{-1}M(f(x))_{\varepsilon_j} = Q^{-1}M(f)_{e_i, \varepsilon_j}M(x)_{e_i} = Q^{-1}AX$$

où on a posé $X = M(x)_{e_i}$. D'autre part, si $X' = M(x)_{e'_i}$:

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = M(f)_{e'_i, \varepsilon'_j}M(x)_{e'_i} = A'X' = A'P^{-1}X$$

Donc :

$$A'P^{-1}X = Q^{-1}AX$$

Comme x est arbitraire, cela implique que $A'P^{-1} = Q^{-1}A$, d'où : $A' = Q^{-1}AP$. □

Corollaire 3.1 *Soit $f = E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E et $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E. Notons :*

$$A = M(f)_{e_i}, \quad A' = M(f)_{e'_i} \quad \text{et} \quad P = P_{e_i \longrightarrow e'_i}.$$

On a alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Definition 3.8 *Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :*

$$A' = P^{-1}AP.$$

Il est clair que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme en des bases différentes.

Exemple 3.14 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique $\{e_i\}$ est représenté par la matrice :*

$$A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice A' qui représente f dans la base $\{e'_i\}$ où :

$$\begin{cases} e'_1 = (1, 0, -1) \\ e'_2 = (0, 1, \quad 1) \\ e'_3 = (1, 0, \quad 1) \end{cases}.$$

On a $A' = P^{-1}AP$ avec

$$P = \|e'_1, e'_2, e'_3\|_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 3.7: $P^{-1} = P_{e'_i \longrightarrow e_i} = \|e_1, e_2, e_3\|_{e'_i}$.

Il s'agit donc d'exprimer e_1, e_2, e_3 dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Or :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_3 \end{cases}$$

En résolvant en e_1, e_2, e_3 :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_3) \end{cases}$$

donc

$$P^{-1} = \|e_1, e_2, e_3\|_{e'_i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit $A' = P^{-1}AP$, on trouve :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.5 *Puisque $A' = M(f)_{e'_i}$, ceci veut dire que :*

$$f(e'_1) = 2e'_1 \quad , \quad f(e'_2) = 2e'_2 \quad , \quad f(e'_3) = 4e'_3$$

comme d'ailleurs on le vérifie directement. On a, en effet :

$$f(e'_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3)$$

Or $f(e_1) = 3e_1 + e_3$ (cf. la première colonne de la matrice A) ; de même $f(e_3) = e_1 + 3e_3$.
Donc : $f(e'_1) = 2e_1 - 2e_3 = 2e'_1$, etc.

3.8 Rang d'une matrice

Comme nous l'avons vu (proposition 2.3), on appelle rang d'une application linéaire f la dimension de $\operatorname{Im} f$. Puisque $\mathcal{L}_K(E,F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(K)$, il faut s'attendre à ce que l'on puisse calculer le rang de f à l'aide de la matrice associée à f. C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe.

Definition 3.9 *1. Soit $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\{v_i\}_{i\in I}$.*
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K), A = \|c_1, \ldots, c_n\|$ où l'on a noté c_i les vecteurs colonnes de A (notons que $c_i \in K^p$). On appelle rang de la matrice A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A :

$$\operatorname{rg}\|c_1, \ldots, c_n\| = \operatorname{rg}\{c_1, \ldots, c_n\} = \dim \operatorname{Vect}\{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Proposition 3.10 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ deux bases quelconques de E et F respectivement, et $A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$. On a alors :*

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A.$$

En particulier : deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang. En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Preuve. En effet :

$$A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j}$$

donc

$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}) = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f.$$

□

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ et ${}^tA$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. Par exemple, si :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

${}^tA$ est dite transposée de A.

Proposition 3.11 *Pour toute matrice A, on a :*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}({}^tA).$$

Exemple 3.15 *Calculer le rang de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la définition, il faudrait calculer le rang des vecteurs colonnes en échelonnant la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais d'après la proposition 3.11, cela revient à calculer le rang des vecteurs lignes (c'est-à dire à échelonner la matrice elle-même), ce qui est plus simple a priori. On voit, d'ailleurs, que la troisième ligne est la somme des deux premières lignes qui sont indépendantes entre elles. Donc $\operatorname{rg} A = 2$.

3.9 Exercices

Exercice 1.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 2.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - 2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Exercice 3.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = \text{vect}(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $\text{Im}(u) = \ker(u - Id)$
7. Montrer que $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

3.10 Solutions

Exercice 1.

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. $A^3 - A^2 + A - I = O \Leftrightarrow A\left(A^2 - A + I\right) = I$ donc $A^{-1} = A^2 - A + I$
3. $A^3 = A^2 - A + I$ donc

$$A^4 = A\left(A^2 - A + I\right) = A^3 - A^2 + A = \left(A^2 - A + I\right) - A^2 + A = I$$

Exercice 2. On a :

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ (A-2I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ (A-2I)^3 &= (A-2I)(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$A^3 - 3 \times 2A^2 + 3 \times 2^2 A - 2^3 I = 0$$

Car A et I commutent.
Ce qui équivaut à

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0$$

Soit encore

$$A^3 - 6A^2 + 12A = 8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A\left(\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I\right) = I$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I$$

Exercice 3.

1. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u - Id) \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $x = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)$

On pose $a=(1,1,0)$ et $b=(-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $\ker(u-Id)$, c'est une base de $\ker(u-Id)$.

3. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3) &\in \ker(u) \Leftrightarrow AX=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=2x_3 \\ 2x_1-2x_3+4x_3=0 \\ x_1-2x_3+3x_3=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=2x_3 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-x_3 \\ x_2=2x_3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc $x=(-x_3,2x_3,x_3)$, si on pose $c=(-1,2,1)$ alors $\ker(u)=\operatorname{Vect}(c)$

4.

$$\begin{aligned} \det(a,b,c) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2-(-2+1)=-1\neq 0 \end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $u(a)-a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u(a)=a$, de même $u(b)=b$ et $u(c)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. D'après la matrice de u dans la base β', $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Vect}(a,b)=\ker(u-Id)$

7. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker u)+\dim(\operatorname{Im} u)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Il reste à montrer que l'intersection de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$ est le vecteur nul.

$$\begin{aligned} x &\in \ker(u)\cap\operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in\operatorname{Im}(u) \\ x\in\ker(u) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in\ker(u) \\ x\in\ker(u-Id) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x)=x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

On a donc $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^3$

Exercice 4.

1.

$$\begin{aligned}
u(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P + \beta Q)' \\
&= \alpha P + \beta Q + (1 - X)\left(\alpha P' + \beta Q'\right) \\
&= \alpha\left(P + (1 - X)P'\right) + \beta\left(Q + (1 - X)Q'\right) = \alpha u(P) + \beta u(Q)
\end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 2$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\begin{aligned}
&u(1) = 1 + (1 - X) \times 0 = 1 \\
&u(X) = X + (1 - X) \times 1 = 1 \\
&u\left(X^2\right) = X^2 + (1 - X) \times 2X = 2X - X^2 \\
&A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. $P \in \ker(u)$

$$\begin{aligned}
u(P) &= 0 \Leftrightarrow u\left(aX^2 + bX + c\right) = au\left(X^2\right) + bu(X) + cu(1) \\
&= a\left(2X - X^2\right) + b + c = 0 \\
&\Leftrightarrow -aX^2 + 2aX + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases} \\
P &= bX - b = b(X - 1)
\end{aligned}$$

Donc $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X - 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(u) &= \operatorname{Vect}\left(u(1), u(X), u\left(X^2\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(1, 1, 2X - X^2\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, 2X - X^2\right)
\end{aligned}$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de $\operatorname{Im}(u)$ donc une base de $\operatorname{Im}(u)$.