

En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent les combinaisons linéaires. Dans ce chapitre, qui est un peu l'axe de tout le reste du document, nous allons donner essentiellement les définitions et les résultats élémentaires de base.

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Définitions : Application linéaire, Noyau, image et rang d'une application linéaire.

2.1 Définitions

Definition 2.1 Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{k} et f une application de E dans E' . On dit que f est linéaire, si :

1. $f(v + w) = f(v) + f(w), \forall v, w \in E,$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}.$

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{k}}(E, E')$ ou, plus simplement, $\mathcal{L}(E, E')$.

Si une application linéaire f de E dans E (même espace de départ et d'arrivée). on dit que f est un endomorphisme de E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\text{End}_{\mathbb{k}}(E)$ ou, plus simplement $\text{End}(E)$.

Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 2.1 1. Si f est linéaire, on a : $f(0) = 0$. Il suffit de faire $\lambda = 0$ dans $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

2. D'après 1) et 2), une application $f : E \rightarrow E'$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et pour tout $x, y \in E$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple 2.1 Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle injection canonique de F dans E , l'application $i : F \rightarrow E$ définie par,

$$\forall x \in F, i(x) = x,$$

Alors i est une application linéaire.

Exemple 2.2

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - z),$$

est une application linéaire.

Si $v = (x, y, z)$ et $w = (x', y', z')$, on a :

$$\begin{aligned} f(v + w) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= (2(x + x') + (y + y'), y + y' - z - z') \\ &= (2x + y, y - z) + (2x' + y', y' - z') \\ &= f(v) + f(w), \\ f(\lambda v) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z) \\ &= \lambda(2x + y, y - z) \\ &= \lambda f(v). \end{aligned}$$

Comme on peut s'en rendre compte par cet exemple, la linéarité de f tient au fait que les composantes x, y, z dans l'espace d'arrivée (ici \mathbb{R}^2) apparaissent toutes à la puissance 1. plus précisément chaque composante dans l'espace d'arrivée est un polynôme homogène de degré 1 en x, y, z . Nous verrons cela d'une manière plus précise dans la suite.

Ainsi, par exemple, l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x^2 - y, y + z) \end{aligned}$$

n'est pas linéaire (ni 1), ni 2) de la définition 2.1 ne sont satisfaites à cause du terme au carré).

Exemple 2.3 Soient $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ respectivement continues et continues à dérivée continue. L'application :

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est une application linéaire, puisque :

$$\begin{aligned} D(f + g) &= (f + g)' = f' + g' = Df + Dg \\ D(\lambda f) &= (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df \end{aligned}$$

si $\lambda \in \mathbb{R}$, et f et $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Exemple 2.4 Soit $v_0 \neq 0_E$ un vecteur de E , l'application translation définie par

$$\begin{aligned} t : E &\rightarrow E \\ v &\mapsto v + v_0 \end{aligned}$$

n'est pas linéaire (noter, par exemple, que $t(0) = v_0 \neq 0_E$).

Exemple 2.5 Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie n et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E . Alors l'application f définie par,

$$\begin{aligned} t : \mathbb{k}^n &\rightarrow E \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto f((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit donc que tout \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{k}^n .

Proposition 2.1 i) Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{k} . $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.

ii) Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

iii) Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Preuve. i) Soient $x \in E, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{k}$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\ &= g(\alpha f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \alpha g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= \alpha(g \circ f)(x). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

ii) Supposons que $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soient $x \in F, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{k}$. Soient $a \in E$ et $b \in E$, tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme f est linéaire, alors on a $f(a + b) = x + y$, donc on a

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

On a aussi

$$f^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(\alpha f(a)) = f^{-1}(f(\alpha a)) = \alpha a = \alpha f^{-1}(x).$$

Donc f^{-1} est linéaire.

iii) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n , alors d'après l'exemple précédent, E et F sont isomorphes à \mathbb{k}^n . Donc si $\varphi : E \rightarrow \mathbb{k}^n$ et $\psi : F \rightarrow \mathbb{k}^n$ sont deux isomorphismes d'espaces vectoriels, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. \square

Proposition 2.2 Soient E et E' deux \mathbb{k} -espaces vectoriels. Pour f et g deux éléments de $L_{\mathbb{k}}(E, E')$ et pour α élément de \mathbb{k} , on définit $f + g$ et $\alpha \cdot f$, par

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Alors $(L_{\mathbb{k}}(E, E'), +, \cdot)$ est un \mathbb{k} -espace vectoriel.

Preuve. Il suffit de vérifier que $L_{\mathbb{k}}(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de E'^E le \mathbb{k} -espace vectoriel de toutes les applications de E vers E' . \square

Théorème 2.1 Soient E et E' deux \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $L_{\mathbb{k}}(E, E')$ est de dimension finie et on a

$$\dim(L_{\mathbb{k}}(E, E')) = \dim(E) \times \dim(E').$$

Preuve. Soient $m = \dim(E), n = \dim(E'), (e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de E et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de E' . Pour $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, où pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$, on définit l'application $f_{ij} : E \rightarrow E'$ par,

$$\forall x \in E, \quad f_{ij}(x) = x_j e'_i \quad \text{où } x = \sum_{j=1}^m x_j e_j.$$

Alors, $B = \{f_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $L_{\mathbb{k}}(E, E')$. En effet,

Soit $f \in L_{\mathbb{k}}(E, E')$, alors pour chaque $j \in \mathbb{N}_m$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e'_i$.

Donc pour tout $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^m x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(x). \end{aligned}$$

Donc B est une partie génératrice finie de $L_{\mathbb{k}}(E, E')$.

Il est facile de vérifier que B est une partie libre, en remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e'_i & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

$\text{Card}(B) = \text{Card}(\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n) = m \times n$, donc $\dim(L_{\mathbb{k}}(E, E')) = m \times n$. □

2.2 Noyau, image et rang

Proposition 2.3 Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

i) L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , appelé image de f et noté $\text{Im } f$. Sa dimension est appelée rang de f et est notée

$$\text{rg } f = \dim(\text{Im } f).$$

ii) L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé noyau de f et noté $\ker(f)$.

Preuve. i) Soit A un sous-espace vectoriel de E . Alors, $f(A) \neq \emptyset$, car $0_F = f(0_E)$, donc $0_F \in f(A)$.

Si $x \in A$, $y \in A$ et $\alpha \in K$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ et } \alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x).$$

Comme $x + y \in A$ et $\alpha \cdot x \in A$, alors $f(x) + f(y) \in f(A)$ et $\alpha \cdot f(x) \in f(A)$.

ii) Soit, maintenant, B un sous-espace vectoriel de F . Alors $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, car $f(0_E) = 0_F$ et $0_F \in B$, donc $0_E \in f^{-1}(B)$.

Si $x \in f^{-1}(B)$, $y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \in K$, alors on a $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$ et comme B est un sous-espace vectoriel de F et f linéaire, alors $f(x + y) \in f(B)$ et $f(\alpha \cdot x) \in f(B)$, donc $x + y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \cdot x \in f^{-1}(B)$. Rappelons que

$$z \in f^{-1}(B) \iff f(z) \in B.$$

□

Remarque 2.2 Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

1.

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

$$x \in \ker(f) \iff f(x) = 0_F.$$

2.

$$\text{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$$

$$y \in \text{Im} f \iff \exists x \in E : y = f(x).$$

Proposition 2.4 Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

i) f est injective $\iff \ker(f) = \{0_E\}$.

ii) f est surjective $\iff \text{Im} f = F$.

Preuve. i) \implies) Supposons que f est injective et soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$ et comme f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$ et puisque f est injective, alors $x = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$.

\impliedby) Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $f(x) = f(y)$, a-t-on $x = y$?

Comme f est linéaire et $f(x) = f(y)$, alors on a $f(x - y) = 0_F$, donc $x - y \in \ker(f)$, puis comme $\ker(f) = \{0_F\}$, alors on a $x = y$ et par suite, f est injective.

ii) Trivial, car une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si, $f(E) = F$. □

Exemple 2.6 Soit :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Le noyau de D est formé par les polynômes constants. D'autre part, $\text{Im } D = \mathbb{R}[x]$, car si $P \in \mathbb{R}[x]$, $Q(x) := \int_0^x P(t)dt$ est un polynôme et on a $Q' = P$ c'est-à-dire $DQ = P$.

Exemple 2.7 Soit :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3(x, y, z) \longmapsto (x', y', z') \quad \text{où : } \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 3z \\ z' = 3x + 2y - 4z. \end{cases}$$

$\text{Ker } f$ est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

On trouve facilement $x = 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$; c'est-à-dire $\text{Ker } f$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, -1, 1)$.

Pour ce qui est de $\text{Im } f$, on a :

$(x', y', z') \in \text{Im } f$, si et seulement si, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système :

$$\{x + y - z = x'2x + y - 3z = y'3x + 2y - 4z = z'\}$$

Il s'agit donc de savoir pour quelles valeurs de x', y', z' ce système est compatible. En échelonnant, on trouve :

$$\begin{cases} x + y - z = x' \\ -y - z = y' - 2x' \\ -y - z = z' - 3x' \end{cases} \implies \begin{cases} x - y - z = x' \\ y + z = 2x' - y' \\ 2x' - y' + z' - 3x' = 0, \end{cases}$$

la condition de compatibilité est $2x' - y' + z' - 3x' = 0$ c'est-à-dire $x' + y' - z' = 0$. L'image de f est donc le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x' + y' - z' = 0$.

Proposition 2.5 Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\{v_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

1. Si f est injective et la famille de $E \{v_i\}_{i \in I}$ est libre, alors la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ de E' est libre.
2. Si f est surjective et la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est génératrice de E alors la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice de E' .

En particulier si f est bijective l'image d'une base de E est une base de E' .

Preuve. 1. Supposons la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ libre et soit f injective. Pour toute famille extraite $\{v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_q}\}$, la relation

$$\lambda_1 f(v_{\alpha_1}) + \dots + \lambda_q f(v_{\alpha_q}) = 0$$

implique $f(\lambda_1 v_{\alpha_1} + \dots + \lambda_q v_{\alpha_q}) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 v_{\alpha_1} + \dots + \lambda_q v_{\alpha_q} \in \text{Ker } f$. Or $\text{Ker } f = \{0\}$, donc

$$\lambda_1 v_{\alpha_1} + \dots + \lambda_q v_{\alpha_q} = 0$$

et puisque la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est libre, on a $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_q = 0$. Donc la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est libre. 2. Soit $y \in E'$ quelconque; puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'autre part la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est génératrice, donc x est de la forme

$$x = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \dots + \lambda_p v_{\alpha_p}$$

d'où : $f(x) = \lambda_1 f(v_{\alpha_1}) + \dots + \lambda_p f(v_{\alpha_p})$. y est donc combinaison linéaire d'éléments de la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ et, puisqu'il est choisi arbitrairement dans E' , la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice.

□

Théorème 2.2 Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.

Preuve. En effet, s'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow E'$, l'image par f d'une base de E est une base de E' , donc E et E' ont même dimension. Réciproquement, supposons que $\dim E = \dim E'$ et soient $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases respectivement de E et E' . Considérons l'application $f : E \rightarrow E'$ construite de la manière suivante :

- pour $k = 1, \dots, n$ on pose : $f(e_k) = e'_k$;
- si $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ on pose : $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k e'_k$,

(en d'autres termes, on définit f sur la base de E et on la prolonge par linéarité sur E tout entier). On vérifie facilement que f est linéaire et bijective (la vérification est laissée en exercice). □

Remarque 2.3 Comme on le voit de la démonstration, l'isomorphisme de E sur E' dépend du choix des bases dans E et dans E' et en général il n'y a pas d'isomorphisme canonique.

Proposition 2.6 Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

- a) Pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G + \text{ker}(f).$$

- b) f est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

c) Pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H \cap \text{Im } f.$$

d) f est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H.$$

Preuve. a) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(G)) &\iff f(x) \in f(G) \\ &\iff \exists a \in G : f(x) = f(a) \\ &\iff \exists a \in G : f(x - a) = 0 \\ &\iff \exists a \in G : x - a \in \ker(f) \\ &\iff \exists a \in G, \exists b \in \ker(f) : x = a + b \\ &\iff x \in G + \ker(f). \end{aligned}$$

b) \implies) Si on suppose que f est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$, donc, d'après a), pour tout sous-espace vectoriel G de E ,

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

\impliedby) Si on suppose que pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a $f^{-1}(f(G)) = G$, alors en particulier, on a

$$f^{-1}(f(\{0_E\})) = \{0_{E^3}\}.$$

Or $f(\{0_E\}) = \{f(0_E)\} = \{0_F\}$, donc

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}.$$

c) \subset) Soit $y \in f(f^{-1}(H))$. alors il existe $x \in f^{-1}(H)$, tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(H)$, alors $f(x) \in H$, donc $y \in H \cap \text{Im } f$.

\supset) Soit $y \in H \cap \text{Im } f$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in H \cap \text{Im } f &\implies y \in H \text{ et } y \in \text{Im } f \\ &\implies y \in H \text{ et } \exists x \in E, : y = f(x) \\ &\implies x \in f^{-1}(H) \quad \text{ar } f(x) \in H \\ &\implies f(x) \in f(f^{-1}(H)) \\ &\implies y \in f(f^{-1}(H)). \end{aligned}$$

d) \implies) Supposons que f est surjective, alors $\text{Im } f = F$, donc pour tout sous-espace H de E , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H \cap F = H.$$

\Leftarrow) Supposons que pour tout sous-espace vectoriel H de F . on a

$$f(f^{-1}(H)) = H,$$

alors en particulier, on aura $f(f^{-1}(F)) = F$. Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, par suite, f est surjective. \square

Dans le cas où les espaces E et E' sont de dimension finie, les dimensions du noyau et de l'image de f sont liées par la relation donnée dans le théorème suivant, l'un des plus importants en Algèbre Linéaire :

Théorème 2.3 (Théorème du rang) Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. On a alors :

$$\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f).$$

Preuve. Supposons $\dim E = n$, $\dim \text{Ker } f = r$ et montrons que $\dim(\text{Im } f) = n - r$. Soit $\{w_1, \dots, w_r\}$ une base de $\text{Ker } f$, et $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ une famille de vecteurs telle que $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$ soit une base de E . Soit $\mathcal{B} = \{f(v_1), \dots, f(v_{n-r})\}$. Montrons que \mathcal{B} est une base de $\text{Im } f$.

- \mathcal{B} engendre $\text{Im } f$. Soit $y = f(x) \in \text{Im } f$. Comme $x \in E$, x est de la forme $x = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + \dots + b_{n-r} v_{n-r}$. On a donc :

$$\begin{aligned} y &= a_1 f(w_1) + \dots + a_r f(w_r) + b_1 f(v_1) + \dots + b_{n-r} f(v_{n-r}), \\ &= b_1 f(v_1) + \dots + b_{n-r} f(v_{n-r}) \end{aligned}$$

ce qui montre que \mathcal{B} engendre $\text{Im } f$.

- \mathcal{B} est libre. Supposons que $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = 0$; on aura

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = 0,$$

donc :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \in \text{Ker } f.$$

Par conséquent, il existe $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{k}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - a_1 w_1 - \dots - a_r w_r = 0.$$

Puisque la famille $\{v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_r\}$ est libre, les coefficients de cette combinaison linéaire sont tous nuls; en particulier : $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{n-r} = 0$, c'est-à-dire \mathcal{B} est libre. \square

Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il faut montrer qu'elle est injective et surjective; cependant, dans le cas de dimension finie, si la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée sont les mêmes, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés - soit l'injectivité, soit la surjectivité, on donc ce corollaire important.

Corollaire 2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, E, E' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie (en particulier, par exemple, si $f \in \text{End } E$, avec E de dimension finie). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Preuve. Il suffit, bien entendu de montrer que 1. est équivalent à 2. Comme on l'a vu, f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$. Puisque $\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{ker } f)$, f est injective si et seulement si $\dim E = \text{rg } f$, c'est-à-dire $\dim E = \dim(\text{Im } f)$. Or, par hypothèse, $\dim E = \dim E'$, donc f est injective si et seulement si $\dim(\text{Im } f) = \dim E'$. Puisque $\text{Im } f \subset E'$ cela équivaut à $\text{Im } f = E'$, c'est-à-dire f surjective. \square

Remarque 2.4 Ce résultat est faux en dimension infinie, un contre-exemple : l'application :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est surjective et non injective.

Théorème 2.4 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u$.
- ii) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$.
- iii) $\text{ker } u = \text{ker } u^2$.
- iv) $\text{ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$.

Preuve. $i) \implies ii)$ Supposons que $E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u$ et montrons que $\text{Im } u = \text{Im } u^2$. Pour cela, remarquons d'abord que tout $u \in L_K(E)$, on a $\text{Im } u^2 \subseteq \text{Im } u$. Donc, il suffit de montrer que $\text{Im } u \subseteq \text{Im } u^2$. Pour cela, soit $y \in \text{Im } u$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$. Puisque $E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u$, alors $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in \text{ker } u$, donc $y = u^2(x)$, par suite, $y \in \text{Im } u^2$.

$ii) \implies iii)$ Supposons que $\text{Im}(u) = \text{Im } u^2$ et montrons que $\text{ker } u = \text{ker } u^2$. Pour cela, remarquons aussi que tout $u \in L_K(E)$, on a $\text{ker } u \subseteq \text{ker } u^2$. Donc, il suffit de montrer que $\text{ker } u^2 \subseteq \text{ker } u$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\text{ker } u) + \dim(\text{Im } u) = \dim(\text{ker } u^2) + \dim(\text{Im } u^2).$$

Puisque $\text{Im } u = \text{Im } u^2$ alors $\dim(\text{ker } u) = \dim(\text{ker } u^2)$, par suite, on aura $\text{ker } u = \text{ker } u^2$.

$iii) \implies iv)$ Supposons que $\text{ker } u = \text{ker } u^2$ et montrons que $\text{ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$. Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in \text{ker } u \cap \text{Im } u &\Leftrightarrow u(y) = 0 \text{ et } \exists x \in E : y = u(x) \\ &\Rightarrow u^2(x) = u(y) = 0 \quad \Rightarrow x \in \text{ker } u^2 \\ &\Rightarrow x \in \text{ker } u \quad \Rightarrow u(x) = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$



$iv \Rightarrow i$) Trivial, car on sait que

$$E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(E) \\ \text{et} \\ \ker u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}. \end{cases}$$

□

2.3 Exercices

Exercice 1.

Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 2.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
Déterminer l'image par u du vecteur x . (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de E et une base de F .
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 4.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et} \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) \end{aligned}$$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$.

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 5.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et tel que $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de a .
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Exercice 6 .

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f . En déduire la dimension de $\text{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 7.

Soit u une application linéaire de E dans E , E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes (a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2 \dim(\text{Im}(u))$ (b) $\text{Im}(u) = \ker(u)$

Exercice 8.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E .

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Exercice 9.

Soit $u : E \rightarrow E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$ Montrer que est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E , montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Exercice 10.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Exercice 11.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) = f(\ker(f^2)).$$

Exercice 12.

Soient f et g deux endomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f).$$

Exercice 13.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$.

Exercice 14.

Soit u un endomorphisme de E , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$.
- (ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$.

2.4 Solutions

Exercice 1.

1. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^4 . Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$$

donc

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y'), (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda(z + t) + \lambda'(z' + t'), \lambda(x + y + z + t) \\ &\quad + \lambda'(x' + y' + z' + t')) \\ &= \lambda(x + y, z + t, x + y + z + t) + \lambda'(x' + y', z' + t', x' + y' + z' + t') \\ &= \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

f est linéaire.

On a :

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (x + y, z + t, x + y + z + t) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

On pose $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a, b) est une base de $\ker(f)$.

3. Première méthode

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ f(e_1) &= (1, 0, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (0, 1, 1); f(e_4) = (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_3))$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $\text{Im}(f)$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(\mathbb{R}^4) \\ &\Leftrightarrow 2 + \dim(\text{Im}(f)) = 4 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2. \end{aligned}$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $\text{Im}(f)$, par exemple $f(e_1)$ et $f(e_3)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Exercice 2.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ u(\lambda x + \mu y) &= (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) \\ &\quad + \lambda x_3 + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &\quad + \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3]) \\ &= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &\quad + \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ x &= \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(2, -1, 2). \end{aligned}$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(\mathbb{R}^3) \\ \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(u)) &= 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2 \end{aligned}$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2, -1, -2)$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4, 0, 4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\text{Im}(u)$ qui est de dimension 2, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

3. $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Il est presque évident que

$$u(e_1) + u(e_3) = a.$$

Sinon on calcule $\alpha a + \beta u(e_1) + \gamma u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha = 1, \beta = -1$ et $\gamma = -1$ est une solution non nulle.

$(a, u(e_1), u(e_2))$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} u(x) &= ux_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(2e_1 + e_2 + 3e_3) + x_2(e_2 - 3e_3) + x_3(-2e_2 + 2e_3) \\ &= 2x_1e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (3x_1 - 3x_2 + 2x_3)e_3 \\ &= (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

2. $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 2 \times 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$

Soient x et y deux vecteurs de E , alors $u(x) = 2x$ et $u(y) = 2y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(2x) + \mu(2y) = 2(\lambda x + \mu y).$$

Donc $\lambda x + \mu y \in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$$

Soient x et y deux vecteurs de F , alors $u(x) = -x$ et $u(y) = -y$

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(-x) + \mu(-y) = -(\lambda x + \mu y).$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 .

3.

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow u(x) = 2x \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 2(x_1, x_2, x_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1, 1, 0) = x_1(e_1 + e_2)$.

$e_1 + e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E .

$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow (2x_1, 3x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = -(x_1, x_2, x_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (0, x_3, x_3) = x_3(0, 1, 1) = x_3(e_2 + e_3)$.

$e_2 + e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F .

4.

$$\dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2.$$

Donc il n'y a pas somme directe.

Exercice 4.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1} , alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda'(-u') = -(\lambda u + \lambda' u').$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1} ,

La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Soient u, u' deux vecteurs de E_1 , alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'.$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1 ,

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_2) &= f(e_1) - f(e_2) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 \\ &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1} , donc la dimension de E_{-1} est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

5.

$$\begin{aligned} \dim(E_{-1} + E_1) &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) \\ &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3.$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3.$$

Remarque : cela entraîne que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3.$$

6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1 , e_2 et e_3 . Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$). Tous les vecteurs de \mathbb{R}^3 s'écrivent de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_2) &= f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) \\ &= -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2 \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_3) &= f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) \\ &= -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3 \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1 + e_2 + e_3) &= f(f(e_1 + e_2 + e_3)) \\ &= f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Exercice 5.

1. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(\mathbb{R}^2) \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2.$$

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) \\ &= x_1(e_1 + e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 \\ &= (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u(e_2) &= au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$.

Exercice 6.

1.

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 1$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\text{im}(f)) = 1.$$

2. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3, \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) &\Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

On pose $a = (-1, 1, 0, 0)$, $b = (-1, 0, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 0, 1)$.

(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 7.

Supposons (a)

Si $y \in \text{Im}(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in \text{Ker}(u)$

Donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

$\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2 \dim(\text{Im}(u)) = n \Leftrightarrow 2 \text{rg}(u) = n$$

Pour tout $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $u^2 = 0_E$.

Exercice 8.

Si u est injective alors si

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E.$$

car u est injective, ce qui montre que $\ker(u) = \{0_E\}$.

Si $\ker(u) = \{0_E\}$ alors

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E.$$

car $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Exercice 9.

1. $(u - \lambda \text{id}_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

$$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda.$$

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ , on a $u(x_1) = \lambda x_1$ et $u(x_2) = \lambda x_2$

Soient α_1 et α_2 deux réels.

$$\begin{aligned} u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) \\ &= \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2). \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$

Pour tout x_1 et x_2 dans F . Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$

Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$

Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F).$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E .

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$ Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda.$$

Exercice 10.

1. Supposons que u soit surjective, alors $\text{Im}(u) = F$ par conséquent $\dim(\text{Im}(u)) = p$ et d'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(E) \\ \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + p &= n \\ \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) &= n - p < 0. \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas surjective.

2. Supposons que u soit injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$ par conséquent $\dim(\ker(u)) = 0$ et d'après le théorème du rang, comme $\text{Im}(u) \subset F$ entraîne que $\dim(\text{Im}(u)) < p$

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) &= \dim(E) \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) &= n \\ \Leftrightarrow n &= \dim(\text{Im}(u)) < p. \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas injective.

Exercice 11.

Soit $y \in \ker(f) \cap \text{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$ On a montré que

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in \text{Im}(f)$ et comme

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$$

on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \text{im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) = f(\ker(f^2)).$$

Exercice 12.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$

Donc $y \in \text{Im}(g)$,

On a donc $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$, on a montré que

$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap \text{Im}(f)$$

Soit $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$

$y \in \text{Im}(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$

$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g(f(x))$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Exercice 13.

1. Soit $x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que

$$\ker(u) \subset \ker(u^2).$$

2. Soit $y \in \text{im}(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in \text{im}(u)$.

Exercice 14.

Supposons que $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u(u(x)) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap \text{im}(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraîne que $u(u(x)) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que

$$\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}.$$