Des exercices avec correction

TABLE DES MATIERES

I-Systeme de grandeurs [System of quantities]

Enoncés

Exercice1: *Unité de grandeurs dérivées*

On rappelle tout d'abord que le système international d'unités (SI) repose sur quatre grandeurs fondamentales : la longueur (unité le mètre, m), la masse (unité le kilogramme, kg), le temps (unité la seconde, s) et l'intensité électrique (unité l'ampère, A). Les unités des grandeurs dérivées peuvent toujours s'exprimer à l'aide de quatre unités de base, mais il est parfois plus commode de leur donner un nom spécifique (dans l'exemple du potentiel, le volt V).

Exprimer le volt en fonction des unités m, kg, s, A.

Exercice2: H*omogénéité d'une formule*

Homogénéité d'une formule est le fait que les deux membres de l'égalité ont la même unité. Dans beaucoup d'exercices, la vérification de l'homogénéité des résultats est un outil précieux pour vérifier qu'aucune erreur grossière n'a été commise.

La vitesse de la lumière c est mise en évidence dans l'équation de propagation des ondes électromagnétiques par l'expression :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Où ε est la permittivité électrique et µ la perméabilité magnétique du milieu de propagation de l'onde. Cet exercice est destiné à vérifier l'homogénéité de cette formule.

Sachant que :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\quad\quad$ $\vec{E} = -grad \quad v$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ l'équation de Maxwell : $rot(\vec{H}) = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Donner l'unité de ε en fonction des unités SI

La perméabilité magnétique µ est définie par $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Sachant que la force électromotrice d'induction e crée dans un circuit est donnée par :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\left\{\iint_s \vec{B}d\vec{S}\right\}}{dt}$$

Donner l'unité de µ

Exercice3:

Déterminer la dimension dans le système SI :

1. d'une force F sachant la relation du principe fondamentale de la dynamique :

$$F = m\gamma$$

2. De la charge électrique Q sachant que la dérivée temporelle de la charge est homogène à un courant.

3. De la permittivité du vide ε_0 sachant que cette constante apparait dans la loi de coulomb (ou r est une distance) :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$$

4. De la perméabilité du vide μ_0 sachant que cette constante apparait dans (ou L, r des distances, I un courant):

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{LI^2}{r}$$

5. De l'inverse du produit $\varepsilon_0\,\mu_0$ et conclure.

Exercice 4 : (extrait du CC1 GEGM S3 2013/2014)

I- Exprimer les dimensions suivantes dans le système de base international:

- d'une masse volumique : ρ
- d'une vitesse : ν
- d'une accélération : a
- d'une puissance P
- d'une force : F
- d'une pression : p
- d'une énergie : E.

II - L'intensité acoustique en un point situé près d'une source sonore peut être calculée à partir de deux relations différentes :

Soit la relation (1) : $I = \frac{p^2}{\rho v}$

avec :

- p : pression acoustique efficace au point considéré
- ρ : masse volumique du milieu où se trouve le point considéré
- ν : vitesse de propagation du son dans le milieu où se trouve le point considéré

soit la relation (2) : $I = \frac{P}{S}$ avec :

- P : puissance;
- S : Surface.

Montrer que la dimension de I est la même dans chacune des deux relations (1) et (2).

Exercice 5 : (extrait du CC GEGM S3 2014/2015)

Etablir les dimensions et les unités des grandeurs suivantes :
Vitesse v, Accélération, Force, Vitesse angulaire $\dot{\theta}$, Accélération angulaire $\ddot{\theta}$, Travail, Energie cinétique, Puissance, Constante de pesanteur g, Constante de gravitation universelle G ;

Vérifier la validité des relations suivantes :

- ☐ $v = \sqrt{\frac{g}{k}}$ (k est le nombre d'onde, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde) ;
- ☐ 3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{d^3} = \frac{2\pi}{GM}$ (T est une période, d est une distance, M est une masse)

Exercice 6 : (extrait du CC GEGM S3 2014/2015)

La période T d'un satellite terrestre circulaire peut dépendre, à priori, de M la masse de la Terre, du rayon R du cercle décrit et de la constante de la gravitation universelle G. On peut faire l'hypothèse que la période T a pour expression : $T = K\, M^a\, R^b\, G^c$ où K est une constante sans dimension.

Déterminer, par une analyse dimensionnelle, les valeurs de a, b et c sachant que la dimension d'une force est $[F] = Kg\, m\, s^{-2}$ En déduire l'expression de la formule de la période T.

Exercice 7 : (extrait CC Cycle Ingénieur EEA S1 2014/2015)

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau peut s'écrire sous la forme :

$$f = k\, R^{\alpha} \rho^{\beta} \tau^{\gamma}$$

où k est une constante sans dimension. R est le rayon de la goutte, ρ sa masse volumique. τ est la tension superficielle définie par une force par unité de longueur.
Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs des paramètres , β et γ .

Exercice 8 : (extrait CC Cycle Ingénieur EEA S1 2014/2015)

Un pendule simple est un fil sans masse, de longueur l au bout duquel est attaché un objet ponctuel de masse m. Soit T la période d'oscillation d'un tel pendule.
T peut dépendre, à priori, des paramètres g (la constante de pesanteur), l, m et θ, l'angle maximum de déviation par rapport à la verticale.
1- En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système, retrouver l'équation d'oscillation du pendule, ainsi celle de sa période, quand θ est petit.
2- Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'équation de la période trouvée.

Exercice 9 : (extrait du CC GEGM S3 2015/2016)

A - Soit un objet de masse m, considéré comme ponctuel, attaché par un fil inélastique de longueur l à un point fixe O dans l'espace. On sait que la seule force extérieure agissant sur le système (fil-mass) est son poids (g).

1. Construisez, à l'aide des paramètres du problème, un temps caractéristique de cet objet.
2. Comment variera la période du pendule si la longueur du fil passe de l à 2l ? nl ?

B- Trouver, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, la formule donnant la poussée d'Archimède, sachant que cette force est fonction du volume du corps immergé V, de la masse volumique ρ du fluide et de l'accélération de pesanteur g.

Exercice 10 : (extrait du CC du Cycle Ingénieur EEA S1 2015/2016)

I. Établir les équations aux dimensions en fonction des grandeurs masse, longueur, temps et Courant :

1. De la constante de Planck h sachant que l'énergie transportée par un photon est donnée par la relation :

$$E = h\,\vartheta$$

Où ϑ représente la fréquence du rayonnement correspondant

2. De la constante de Boltzmann k qui apparait dans l'expression de l'énergie cinétique d'une molécule d'un gaz monoatomique a la température T ; à savoir :

$$E_c = \frac{3}{2}\,kT$$

II. La formule suivante est-elle valide dimensionnellement!? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$p = \rho g h_1 + h_2 F$$

tels que : p : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h1 et h2 : hauteurs, F : une force.

Exercice 11 : (extrait du CC GEGM S3 2016/2017)

1. Complété le tableau suivant

Nom	Symbole	Dimension en SI
Charge électrique	Q	
Force	F	
Permittivité du vide ε_0	ε_0	
Capacité électrique	C	

On donne La loi de coulomb est:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$

2. Le psi est l'unité de mesure anglo-saxonne « pound per square inch » de la pression on donne les équations aux unités :
   - [inch] = 2,54 10^{-2} [mètre]
   - [pound] = 4448222 [Newton]

   Que vaut le psi dans SI

3. L'indice de réfraction de l'air affecte les longueurs d'onde des radiations électromagnétique par la relation :

   $$n \times \lambda_{air} = \lambda_{vide}$$

   Les formules d'Edlen permettent de calculer l'indice de réfraction de l'air.
   La première formule d'indice de réfraction de l'air dans les conditions standards.

   $$(n_s - 1) \times 10^8 = 8342{,}13 + \frac{2406030}{(130 - \sigma^2)} + \frac{15997}{(39{,}8 - \sigma^2)}$$

   Où n_s est l'indice de réfraction dans des conditions d'air standards, c'est-à-dire pour une température (T=15°C) et pour une pression (P=101325 Pa) et $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre (en μm^{-1}) dans le vide de la radiation considérée.
   La deuxième formule donne l'indice de réfraction de l'air dans les conditions d'utilisation.

   $$(n_{tp}) = (n_{tp-1} - 1) \times \left[\frac{1{,}04126 \times 10^{-5} \times P}{1 + 0{,}003671 \times T}\right]$$

   Où n_{tp} est l'indice de réfraction de l'air à la température T (en °C) et la pression P (en Pa)
   3-1 Quelle est la dimension de l'indice de réfraction n ?

3-2 Donner la dimension de l'unité des nombres figurant dans les deux expressions de l'indice de réfraction.

8342,13	
2406030	
130	
15997	
39,8	
1,04126	
1	
0,003671	

Exercice 12 : (extrait du CC du Cycle Ingénieur EEA S1 2016/2017)

a) *Une particule de masse M tourne en décrivant un cercle de rayon r à une vitesse v. Pour cela, elle doit subir une accélération centripète (a en $m.s^{-2}$). Trouvez une équation satisfaite par a sachant qu'elle ne dépend que de v et r.*

b) *La force de frottement agissant sur un corps est proportionnelle au carré de sa vitesse. Formulez cette loi par une équation et donnez les dimensions de la constante de proportionnalité*

c) *Donnez les unités SI des coefficients A, B et C dans l'équation suivante:*

$$v = At^2 - Bt + \sqrt{C}$$

où v est une vitesse et t un temps.

Exercice 13: (extrait du CC DEUST GEGM S1 2017/2018)

A. Déterminer la dimension, à partir des grandeurs de base de la conductivité électrique γ en un point d'un conducteur vérifiant « la forme locale de la loi d'Ohm » : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ sachant que le vecteur densité du courant $\vec{J}$ peut aussi être exprimé en fonction de la densité volumique de charges mobiles ρ et de la vitesse $\vec{v}$ d'un porteur, par la relation $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

B. Vérifier l'homogénéité des équations suivantes :

- Constante de temps du dipôle RC $\tau = RC$
- constante de temps du dipôle RL $\tau = \frac{L}{R}$
- Période d'un oscillateur électrique $T = 2\pi\sqrt{LC}$

C. A l'aide d'une analyse dimensionnelle rapide, pour chacune des expressions littérales suivantes, entourer le résultat susceptible d'être juste et barrer celui qui ne l'est pas.

1. Hauteur maximale atteinte par un projectile de masse m lancé verticalement à la vitesse v, g étant l'accélération de la pesanteur :

$h = \frac{mv^2}{g}$	$h = \frac{v^2}{2g}$	$h = \frac{v^2}{mg}$

2. Portée horizontale x du tir d'un projectile de masse m dont la vitesse initiale v fait un angle α avec l'horizontale :

$x = \frac{mv^2\sin(2\alpha)}{g}$	$x = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g}$	$x = \frac{v^2\tan(2\alpha)}{2g}$

3. Altitude h d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R, connaissant la période T et l'accélération de la pesanteur g au niveau du sol :

$h = \sqrt[3]{\frac{T^2R^2g}{4\pi^2}} - R$	$h = \sqrt[3]{\frac{T^2R^2g}{4\pi^2}} - R$	$h = \sqrt[3]{\frac{T^4Rg^2}{4\pi^2}} - R$

4. Tension U au sein d'un circuit électrique (avec E une tension, R_1, R_2, R_3 des résistances électriques :

$U = \frac{R_1R_2E}{R_1R_2 + R_3(1 + R_2)}$	$U = \frac{R_1E}{R_1R_2 + R_3(1 + R_2)}$	$U = \frac{R_1R_2E}{R_1R_2 + R_3(R_1 + R_2)}$

CORRIGES

Exercice 1:

$$Tension = fct(Temps, Courant, Mêtre, Poids)$$

$$V = f(s, I, m, Kg)$$

$$Peq = I\,.V = \frac{\delta W}{\delta t(s)}$$

Puissance électrique

Courant (A)

Tension

Temps

Travail

$$\delta W = \vec{F}\,.\delta l$$

Force

Déplacement

Principe fondamental de la dynamique. (PFD)

$$\vec{F} = m\,.\vec{\gamma}$$

Masse (Kg)

L'accélération

$$\gamma = \frac{dl}{d^2t} = \frac{m}{s^2} = m\,.s^{-2}$$

$$[\vec{F}] = kg\,.m\,.s^{-2}$$

$$[V] = \frac{1}{\mathrm{I}}\,.\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{1}{\mathrm{I}}\,.\frac{\delta(\vec{F}\,.\delta l)}{\delta t}$$

$$V = \frac{1}{\mathrm{I}}\,.\frac{\delta(\vec{F}\,.\delta l)}{\delta t} = A^{-1}.\frac{Kg\,.m\,.s^{-2}.m}{s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = A^{-1}.Kg\,.m^2.s^{-3}}}$$

Exercice 2:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon.\mu}}$$

Vitesse de la lumière

Permittivité électrique

Perméabilité magnétique

$[\varepsilon] = ?$

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E}$$

L'excitation électrique

Champ électrique

avec

$$\vec{E} = -grad(V)$$

Potentiel

Sachant que l'équation de la puissance électrique est :

$$Peq = I.V = \frac{\partial W}{\partial t}$$

$m = masse\ [Kg]$

$\vec{\gamma} = l'acceleration\ [m.s^{-2}]$

$F = m.\vec{\gamma}$

et

$$V = \frac{1}{I}.\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{1}{I}.\frac{\vec{F}.\delta l}{\delta t}$$

A

s

m

On a alors

$$\boldsymbol{V = A^{-1}.Kg.m^2.s^{-3}}$$

On peut déduire alors la dimension de [E] :

$$\vec{E} = -gradV = -\left| \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} \\ \frac{dV}{dy} \\ \frac{dV}{dz} \end{array} \right. => \boxed{[E] = \frac{[V]}{\boldsymbol{m}}}$$

Sachant que

$$rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t}$$

et

Surface

$$[j] = ? \rightarrow I = \iint j \, . dS$$

Densité de courant surfacique

De plus l'homogénéité de $\vec{j}$ et de $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ implique que

$$[j] = A \, . m^{-2} = \left[\frac{\delta D}{\delta t}\right]$$

alors

$$\boxed{[\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{A} \, . \boldsymbol{m}^{-2} . \boldsymbol{s}} \Longrightarrow \boxed{[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{[\vec{D}]}{[\vec{E}]}}$$

$$\boxed{[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{A \, . m^{-2} . s}{m \, . Kg \, . s^{-3} . A^{-1}} = \boldsymbol{A}^{2} . \boldsymbol{m}^{-3} . \boldsymbol{Kg}^{-1} . \boldsymbol{s}^{4}}$$

$[\mu] = ?$

$$\vec{B} = \mu \, . \vec{H}$$

L'excitation magnétique

Champ magnétique

Induction magnétique

On utilisant l'équation

Flux magnétique

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \, . \, \vec{dS}$$

Tension induite

Elément de surface

On a

$$[e] = \frac{[B].m^2}{s}$$

$$[\vec{B}] = \frac{[e].s}{m^2} = \frac{m^2.Kg\,.s^{-3}.A^{-1}.s}{m^2}$$

$$\boxed{[\vec{\boldsymbol{B}}] = \boldsymbol{Kg\,.s^{-2}.A^{-1}}}$$

Et sachant que

$$rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\overrightarrow{\delta D}}{\delta t}$$

et

$$rot(H) = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} Hx \\ Hy \\ Hz \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{m}}$$

on a alors

$$\frac{[H]}{m} = [\vec{j}] \rightarrow \boxed{\text{Homogénéité, même unité}}$$

$$[\vec{j}] = \boldsymbol{A\,.m^{-2}} = \frac{[H]}{m}$$

$$\boxed{[H] = A\,.m^{-1}}$$

$$\boxed{[\mu] = \frac{[\vec{B}]}{[\vec{H}]} = \frac{Kg\,.s^{-2}.A^{-1}}{A\,.m^{-1}} = \boldsymbol{m\,.Kg\,.s^{-2}.A^{-2}}}$$

$$[\mu][\varepsilon] = [m\,.\cancel{Kg}\,.s^{-2}.\cancel{A^{-2}}][m^{-3}.\cancel{Kg^{-1}}.s^{4}.\cancel{A^{2}}] = m^{-2}s^{2} = \left(\frac{s}{m}\right)^{2}$$

$$[c] = \frac{1}{\sqrt{[\mu][\varepsilon]}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{m}\right)^{2}}} = \frac{1}{\frac{s}{m}} = m\,.s^{-1}$$

Vitesse

Exercice 3:

$$\vec{F} = m\,.\vec{\gamma}$$

Force

Masse

L'accélération

A .

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\frac{Q^2}{r^2}$$

Permittivité électrique du vide

Distance

Charge électrique

$$[F] = \frac{[Q]^2}{[\varepsilon_o][r^2]}$$

$$[\varepsilon_o] = [Q]^2[F]^{-1}[r]^{-2}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} => Q = \int I\,dt => [Q] = [I][t] = A\,.s$$

$$[\varepsilon_o] = Kg^{-1}m^{-1}s^2m^{-2}A^2s^2 = A^2Kg^{-1}m^{-3}s^4$$

B.

$$F = \frac{\mu_o}{4\pi}.\frac{LI^2}{r} <=> [\mu_o] = [F][r][L]^{-1}[I]^{-2} = Kg.m.s^{-2}.A^{-2}$$

$$[\varepsilon_o].[\mu_o] = A^2Kg^{-1}m^{-3}s^4\,.Kg.m.s^{-2}.A^{-2} = m^{-2}s^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_o].[\mu_o]}} = m^{-1}.s$$

Vitesse

Vitesse de la lumière

Exercice 4:

1)

Masse volumique	$\frac{masse}{volume}$ $\quad Kg.m^{-3}$
Vitesse	$\frac{longeur}{durée}$ $\quad m.s^{-1}$
Accélération	$\frac{vitesse}{durée}$ $\quad m.s^{-2}$
Energie	$force\ x\ déplacement$ $\quad Kg.m^{2}.s^{-2}$
Puissance	$\frac{energie}{durée}$ $\quad Kg.m^{2}.s^{-3}$
Force	$masse\ x\ accélération$ $\quad Kg.m.s^{-2}$
Pression	$\frac{force}{surface}$ $\quad Kg.m^{-1}.s^{-2}$

2.1)

$$I = \frac{P^2}{\rho.v}$$

L'intensité acoustique

Vitesse de propagation

Pression acoustique

$$[I] = \frac{[P]}{[\rho][v]} = \frac{Kg^{-2}m^{-2}s^{-4}}{Kg.m^{-3}.m.s^{-1}} = Kg.s^{-3}$$

2.2

$$I = \frac{P}{S}$$

Surface

Puissance

$$[I] = \frac{[P]}{[S]} = \frac{Kg.m^{2}.s^{-3}}{m^{2}} = Kg.s^{-3}$$

Exercice 5:

Etablir les dimensions et les unités des grandeurs suivantes dans le système de base international :

Vitesse v	$m.s^{-1}$
Accélération a	$m.s^{-2}$
Force F	$Kg.m.s^{-2} \quad (\vec{F} = m.\vec{a})$
Vitesse angulaire $\dot{\theta}$	$s^{-1} \quad (v = R.\dot{\theta})$
Accélération angulaire $\ddot{\theta}$	$s^{-2} \quad (\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt})$
Travail W	$Kg.m^2s^{-2} \quad (W = F.dl)$
Energie cinétique Ec	$Kg.m^2s^{-2} \quad (Ec = \frac{1}{2}mv^2)$
Puissance P	$Kg.m^2s^{-3} \quad (P = \frac{dW}{dt})$
Constante de pesanteur g	$m.s^{-2} \quad (P = m.g)$
Constante de gravitation universelle G	$Kg^{-1}m^3s^{-2} \quad (F = G\frac{mM}{R^2})$

Vérifier la validité des relations suivantes :

$v = \sqrt{\frac{g}{k}}$ (k est le nombre d'onde, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde)

Unité de $[v] = m.s^{-1}$

$$[v] = \sqrt{\frac{[g]}{[k]}} = \sqrt{\frac{m.s^{-2}}{m^{-1}}} = \sqrt{m^2s^{-2}} = m.s^{-1}$$

3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{d^3} = \frac{2\pi}{GM}$ (T est un période, d est une distance, M est une masse) (1pt)

$$\frac{[T]^2}{[d]^3} = \frac{s^2}{m^3} = s^2.m^{-3}$$

$$\frac{2\pi}{[G][M]} = [G]^{-1}[M]^{-1} = \cancel{Kg}.m^{-3}s^2\cancel{Kg}^{-1} = s^2.m^{-2}$$

Exercice 6:

$$F = M.L.T^{-2} = G\frac{mM}{R^2} = G.M^2L^{-2}$$

$$M.L.T^{-2} = G.M^2L^{-2}$$

$$\frac{T^2}{M.L} = \frac{1}{G.M^2L^{-2}}$$

$$T^2 = \frac{M.L}{G.M^2L^{-2}}$$

$$\boxed{T^2 = M^{-1}L^3G^{-1}}$$

a= -1/2	b=3/2	c=-1/2

Exercice 7:

$$f = k\,.R^{\alpha}.\rho^{\beta}.\tau^{\gamma}$$

Fréquence	Rayon (m)	Masse volumique $(\frac{Kg}{m^3})$	Tension $\frac{F}{l}\,(\frac{Kg.\cancel{m}.s^{-2}}{\cancel{m}})$

$$[f] = s^{-1} = [R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\tau]^{\gamma}$$

$$[f] = s^{-1} = m^{\alpha}.(\frac{Kg}{m^3})^{\beta}.(Kg.s^{-2})^{\gamma}$$

$$[f] = s^{-1} = m^{\alpha}.Kg^{\beta}.m^{-3\beta}.Kg^{\gamma}.s^{-2\gamma}$$

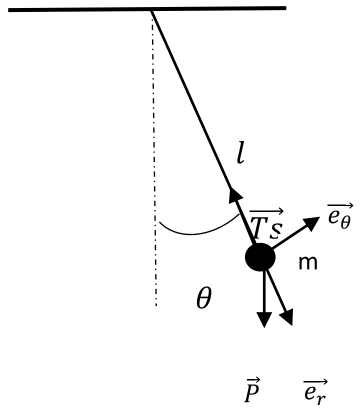
$$[f] = s^{-1} = m^{\alpha-3\beta}.Kg^{\beta+\gamma}.s^{-2\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \alpha = -3/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f = k\,R^{-\frac{3}{2}}\,\rho^{-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{1}{2}}}}$$

Exercice 8:



T : période d'oscillation

$T = fct(g, l, m, \theta)$

Equation d'oscillation $\ddot{\theta} + {\omega_o}^2\dot{\theta} = 0$

PDF : Bilan de force.

- $\vec{Ts}: tension\ de\ fil\quad \vec{Ts} = -T.\vec{e_r}$
- $\vec{P}: poids\ de\ la\ masse\ m$
  $\vec{P} = P(cos\theta\vec{e_r} - sin\theta\vec{e_\theta})$
  $\vec{P} = mg(cos\theta\vec{e_r} - sin\theta\vec{e_\theta})$
- $\Sigma Fext = m\vec{\gamma}$

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt};\quad \overrightarrow{OM} = l\ \vec{e_r}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l\,.\dot{\vec{e_r}} = l\,\dot{\theta}\ \vec{e_\theta}$$

$$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\,.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + l\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e_\theta}}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + l\,\dot{\theta}\,(-\dot{\theta}\vec{e_r})$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + l\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$$

$$-T\,\vec{e_r} + mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) = m\left(-l\,\dot{\theta}\,\vec{e_r} + l\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right)$$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -l\,mg\dot{\theta}^2 \\ -\cancel{m}g\sin\theta = l\,\cancel{m}\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

Equation d'oscillation : $\boxed{l\ddot{\theta} + \rho\sin\theta = 0}$ **1)**

(*) et 1) => $\boxed{l\ddot{\theta} + \rho\theta = 0}$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On peut déduire que

$$\omega_o{}^2 = \frac{g}{l} \quad => \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Et sachant que

$$\omega_o = 2\pi f \quad => \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_o}{2\pi} \quad => \quad T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$[T] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}} = s \qquad \begin{matrix} [g] = ms^{-2} \\ [l] = m \end{matrix}$$

Exercice 9 :

A1)

$T = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$

$[s] = [m]^{\alpha}[Kg]^{\beta}[m.s^{-2}]^{\gamma}$

$[s] = [m^{\alpha} Kg^{\beta} m^{\gamma} s^{-2\gamma}]$

$[s] = [m^{\alpha+\gamma} Kg^{\beta} s^{-2\gamma}]$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1/2 \end{cases} \qquad T = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

A2)

$$T_l = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_{2l} = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_{nl} = \sqrt{\frac{nl}{g}} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

B)

$[P_A] = [V]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[g]^{\gamma}$

$\updownarrow$

$Kg.m.s^{-2} = (m^3)^{\alpha}(Kg.m^{-3})^{\beta}(m.s^{-2})^{\gamma}$

$Kg.m.s^{-2} = m^{3\alpha} Kg^{\beta} m^{-3\beta} m^{\gamma} s^{-2\gamma}$

$Kg.m.s^{-2} = m^{3(\alpha-\beta)+\gamma} Kg^{\beta} s^{-2\gamma}$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ 3(\alpha + \beta) + \gamma = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 1$$

La poussée d'Archimède : $P_A = K\,\rho\,V\,g$

Exercice 10 :

Établir les équations aux dimensions en fonction des grandeurs masse, longueur, temps et Courant de :

1) Constante de Planck

$$E = h\vartheta = h\frac{c}{\lambda}$$

Vitesse de la lumière

Longueur d'onde

$$[E] = [h][\vartheta] = [h]\frac{[c]}{[\lambda]} \quad => \quad [h] = \frac{[E]}{[c]}[\lambda]$$

Or $\begin{cases} [\vartheta] = \frac{[c]}{[\lambda]} = \frac{ms^{-1}}{m} = s^{-1} \\ [E] = [Ec] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [m][v]^2 = \boldsymbol{kg.m^2s^{-2}} \end{cases}$

E homogène à l'énergie cinétique, donc :

$$h = \frac{E}{\vartheta} \quad => \quad [h] = \frac{[E]}{[\vartheta]} = \frac{Kg.m^2.s^2}{s^{-1}} = \boldsymbol{Kg.m^2.s^{-1}}$$

Donc :

$$[h] = m^2.Kg.s^{-1}$$

2) Constante de Boltzmann :

$$Ec = \frac{3}{2}kT \quad => \quad [Ec] = \left[\frac{3}{2}kT\right] = [k][T]$$

$$[k] = \frac{[Ec]}{[T]} \; or\ Ec\ est\ une\ énergie\ donc\ homogène\ a\ l'énergie\ potentielle\ Ep = mgh\ d'une\ masse\ en\ chutte\ libre.$$

$$[Ec] = [Ep] = [m][g][h] = Kg.m.s^{-2}.m = Kg.m^2.s^{-2}$$

$$[k] = \frac{m^2.kg.s^{-2}}{K} = \boldsymbol{m^2.Kg.s^{-2}.K^{-1}}$$

La formule suivante est-elle valide dimensionnellement!? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$p = \rho g h_1 + h_2 F$$

Cette formule n'est pas homogène car $[h_2 F] \neq [p]$

- Pression P.

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}$$

$$[P] = \frac{[m][g]}{[S]} = \frac{Kg.m.s^{-2}}{m^2} = \boldsymbol{Kg.m^{-1}.s^{-2}}$$

- Le terme $\rho g h_1$

$$[\rho g h_1] = [\rho][g][h_1] = \left[\frac{m}{v}\right][g][h_1]$$

$[\rho g h_1] = Kg.m^{-3}.m.s^{-2}.m = \boldsymbol{Kg.m^{-1}.s^{-2}}$ Homogène à P

- Le terme $h_2 F$

$$[h_2 F] = [h_2][F] = [h_2][mg] = [h_2][m][g]$$

$[h_2 F] = m.Kg.m.s^{-2} = \boldsymbol{m^2.Kg.s^{-2}}$ Non homogène à une pression

Soit ${h_2}^{\alpha} F^{\beta}$ homogène à une pression

D'où $[{h_2}^{\alpha} F^{\beta}] = m^{\alpha} Kg^{\beta} m^{\beta} s^{-2\beta} = m^{\alpha+\beta} kg^{\beta} s^{-2\beta}$

$[{h_2}^{\alpha} F^{\beta}] = [p] \;=>\; m^{\alpha+\beta} kg^{\beta} s^{-2\beta} = m^{-1} Kg.s^{-2}$

$$\begin{cases} -2\beta = -2 \\ \beta = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \;=>\; \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + 1 = -1 \;=>\; \alpha = -2 \end{cases}$$

D'où ${h_2}^{\alpha} F^{\beta} = {h_2}^{-2} F = \frac{F}{{h_2}^2}$

La relation finale est : $P = \rho g h_1 + \frac{F}{{h_2}^2}$

Exercice 11 :

1)

Nom	Symbole	Dimension en SI
Charge électrique	Q	$A.s$
Force	F	$Kg.m.s^{-2}$
Permittivité du vide ε_o	ε_o	$A^2Kg^{-1}m^{-3}s^4$
Capacité électrique	C	$A^2Kg^{-1}m^{-2}s^4$

2)

$$[psi] = [Pound]/[inch]^2 = \frac{[Newton]}{[mètre]^2} = \frac{Kg.m.s^{-2}}{m^2} = Kg.m^{-1}.s^{-2}$$

3)

3-1)

n Sans dimension

3-2)

8342,13	Sans dimension
2406030	$m^{-2} ou\ \mu m^{-2}$
130	$m^{-2} ou\ \mu m^{-2}$
15997	$m^{-2} ou\ \mu m^{-2}$
39,8	$m^{-2} ou\ \mu m^{-2}$
1,04126	$°C$
1	$Pa\ x\ °C$
0,003671	Pa

Exercice 12 :

1) $a = \frac{v^2}{r}$

2)

$[f] = k\,.v^2$ $\qquad$ $[N] = Kg.m\,.s^{-2}$

$[k] = \dfrac{N}{m^2 s^{-2}}$ => $Kg.m.s^{-2}.m^{-2}.s^2$ => $Kg.m^{-1}$

3) $[A] = m.s^{-3}$ $\qquad$ $[B] = m.s^{-2}$ $\qquad$ $[C] = m^2 s^{-2}$

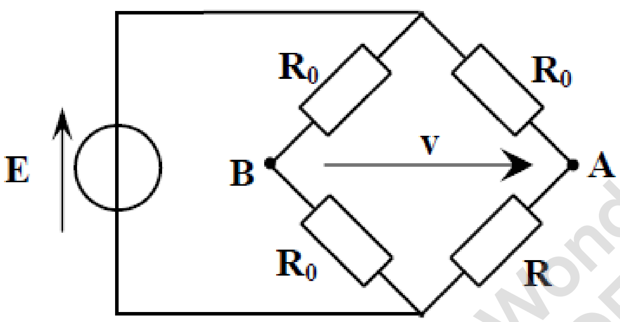
II- Conditionnement électronique des capteurs Passif

Enoncés

Exercice1:

On désire réaliser le circuit électronique ci-dessous qui mesure la différence de pression atmosphérique par rapport à 1013 mb (pression moyenne) avec une sensibilité de 1mV/mb (tableau ci-contre) :

Pression (mb)	Tension v (mV)
900	-113
1013	0
1100	87



- **E** est une source de tension fixe;
- **v** est la tension à en sortie du pont (image de la pression);
- **R_0** sont des résistances ajustables réglées à l'identique;
- **R** est le capteur résistif linéaire de caractéristiques définies ci-dessous:

Pression (mb)	Résistance R (Ω)
0	1000
4000	3000

1-Donner l'expression de la tension **v** en fonction de **E**;

2- Montrer qu'à l'équilibre du pont (lorsque **v = 0 V**), on a : **R = R_0**.

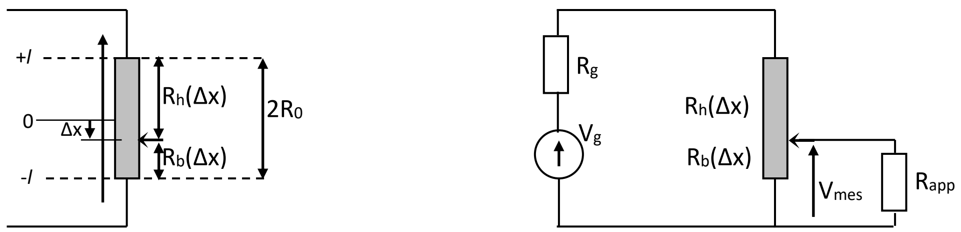
3- En utilisant le tableau caractérisant le capteur résistif, exprimer **R** en fonction de **P**. Déterminer alors la valeur des résistances réglables **R_0**.

4 - Exprimer **v** en fonction de **E** et **P**. La relation "**v fonction de E et P**" est-elle linéaire?

5 - En prenant **E = 12V**, calculer les valeurs respectives de **v** pour **P = 900mb** et **P = 1100mb**. Calculer les erreurs relatives pour les deux valeurs de **v** calculées plus haut.

<u>Exercice 2</u>:

Un capteur de déplacement rectiligne est constitué d'un potentiomètre linéaire schématisé sur la figure. On désigne par Δx la valeur du déplacement du curseur par rapport à la position milieu que l'on prend pour origine de l'axe x.



Le capteur   Le montage de conditionnement

Figure : Potentiomètre linéaire en capteur push-pull

1. La course utile du potentiomètre est longueur 2l=10cm et sa résistance totale est 2R0. En déduire l'expression des résistances $R_b(\Delta x)$ et $R_h(\Delta x)$ du potentiomètre (voir Figure) pour un déplacement du curseur par rapport à la position milieu.

2. Le potentiomètre est monté suivant le schéma de la figure. La tension de mesure Vmes, image de la position du curseur, est mesurée par une électronique d'impédance d'entrée Rapp. Exprimer Vmes en fonction de $R_b(\Delta x)$, $R_h(\Delta x)$, R_g, Rapp et V_g.

3. Que devient cette expression pour $R_{app} >> R_b$?

4. En déduire la sensibilité S_{mes} de la mesure.

5. Quelle valeur doit-on donner à Rg pour que cette sensibilité soit maximale ? Que deviennent dans V_{mes} ce cas et S_{mes}? Calculer la sensibilité réduite Sr.

6. Afin d'assurer un fonctionnement correct du capteur, le constructeur a fixé une limite V_{max}=0.2ms^{-1} pour la vitesse de déplacement V du curseur. En admettant que le curseur a un mouvement sinusoïdal d'amplitude a=1cm autour d'une position x_0 donnée, calculer la fréquence maximale fmax des déplacements que l'on traduire avec ce système.

<u>Exercice 3</u>: *Capteur capacitif push-pull à glissement du diélectrique*

On considère la structure de la figure1 constituée de deux condensateurs plans identiques C_1 et C_2, de surface carré ou rectangulaire d'aire A, entre les armatures desquels se place selon l'axe x un noyau diélectrique de permittivité relative ε_r et de longueur l.

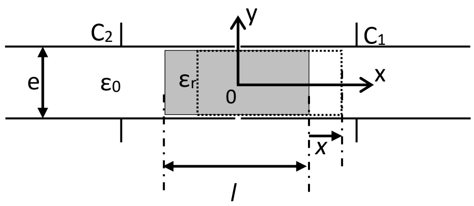


Figure1 : Condensateur à diélectrique glissant

On rappelle que la capacité plan est donné par $C=\varepsilon.(S/e)= \varepsilon_0\varepsilon_r$(Surface/épaisseur)

1. Le noyau étant à sa position initiale, centré en x=0 (rectangle gris), déterminer l'expression des capacités $C_1(x=0)= C_2(x=0)$ que l'on notera C_0 (on négligera pour cela les effets de bords et le couplage possible entres les deux condensateurs) on donnera $\varepsilon_0=8,85.10^{-12}$ Fm-1, $\varepsilon_r=3$, e=1mm et A=6cm2.

2. Le noyau est déplacé de x (rectangle en pointillé) de sa position d'origine, déterminer les expressions de $C_1(x)$ et $C_2(x)$. Ecrire les expressions sous la forme $C_1(x)= C_0+\Delta C_1(x)$ et $C_2(x)= C_0+\Delta C_2(x)$ en précisant les expressions de $\Delta C_1(x)$ et de $\Delta C_2(x)$ en fonction de C_0, x, l et ε_r. Conclure.

3. Les deux condensateurs sont montés dans un circuit en pont selon le schéma de la figure2. Exprimer la tension différentielle de mesure V_{mes} en fonction de x, l ε_r et V_g

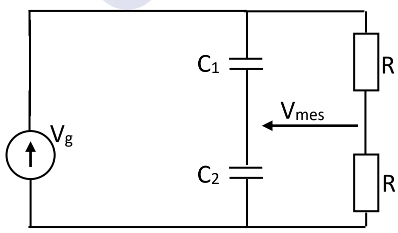


Figure2 : Conditionneur du capteur

4. En déduire la sensibilité S de la mesure. On donne : l=2cm et V_g=10V.

5. Quelles sont les valeurs de l'étendue de mesure EM et de l'excursion de V_{mes} ?

<u>Exercice</u> 4: *Effet de la résistance des fils de liaison du capteur dans un pont de Wheatstone :*

On considère une résistance thermométriquePt100 de résistance $R_c(T)=R_0(1+\alpha T)$ où T représente la température en °C, $R_0=100\Omega$ la résistance à 0°C et $\alpha=3{,}85.10^{-3}$°C^{-1} le coefficient de température. Cette résistance est placée dans un pont de Wheatstone schématisé sur la figure1. Le pont est alimenté par une source de tension de force électromotrice Vg et de résistance interne négligeable.

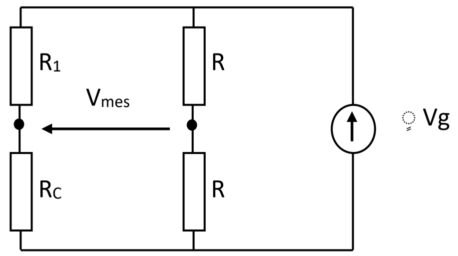


Figure1 : Montage en pont du capteur

1. On se limite à l'étendue de mesure [0°C :100°C]et on équilibre le pont pour la valeur $T_0=50$°C de la température pour laquelle $Rc(T_0)= R_{c0}$. L'impédance des fils de liaison liant le capteur au reste du montage est totalement négligeable (le capteur est physiquement proche du pont). Déterminer la valeur de R_1 qui permet d'équilibrer le pont.

2. Etablir l'expression de la tension différentielle de mesure pour une valeur quelconque de la température pour laquelle on posera :
$R_c(T)= R_c(T_0+\Delta T)= R_{c0}+\Delta R_c$
$Vmes(T)= Vmes\ (T_0+\Delta T)= V_{mes,0}+\Delta V_{mes}$
En déduire une approximation au premier ordre en $\Delta R_c/R_{c0}$ de la sensibilité de la mesure $S_{mes}=\Delta V_{mes}/\Delta T$.

3. Le capteur est maintenant mis en service mais à grande distance de l'électronique constitué par le pont, de son alimentation et du système de mesure de la tension différentielle. La résistance des fils de liaison du capteur à son électronique n'est plus négligeable. Celle-ci est modélisée selon la figure2 par deux résistances supplémentaires r.

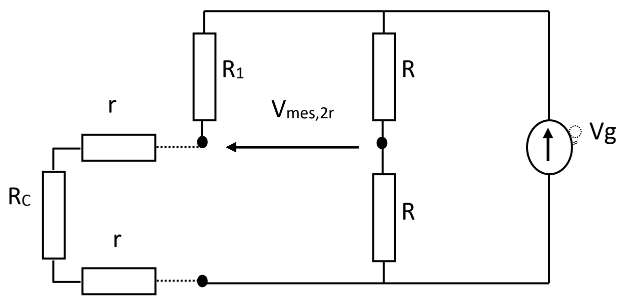


Figure2 : Montage en pont, du capteur éloigné

4. Calculer la tension de déséquilibre $V_{mes,2r}$ du pont dans ce cas puis l'erreur δV_{2r} entraînée par les fils de liaison.

Calculer la valeur maximale de r pour que l'erreur introduite sur la mesure d'une température reste inférieure à $\delta T=0,2°C$. On suppose que le fil de liaison est un fil de cuivre de diamètre d=0,5mm et de résistivité $1,72.10^{-8}\Omega.m$. Calculer la longueur des fils de liaison qui correspondent à cette résistance.

<u>Exercice 5</u> : capteurs à condensateur d'épaisseur variable. (Les parties A et B sont indépendants)

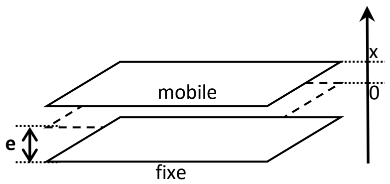


Figure1 : Schéma du capteur

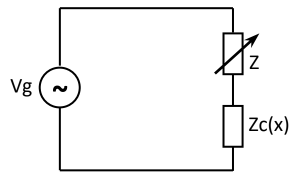


Figure2 : Conditionnement du capteur

Première partie :

Soit un condensateur à écartement variable constitué de deux plaques de surface S placées en regard (voir figure1). Le condensateur est plein d'air de constante ε_0=8,85.10-12 F/m. On appelle x la variation (algébrique) de l'épaisseur par rapport à e, donc l'épaisseur vaut e+x

1. Quelle est donc la mesurande ?
2. Donner l'expression de la capacité du condensateur C(x) et l'impédance $Z_c(x)$ en régime permanent à la pulsation ω.

Le capteur est monté en série avec un condensateur réglable impédance Z, dont la valeur sera prise égale à celle du capteur au repos, quand x=0. Le dipôle ainsi constitué est alimenté par un générateur parfait de f.em Vg et de pulsation ω (voir figure2).

3. Donner l'expression de Vmes prise aux bornes de Zc(x) en fonction de x, e et Vg.
4. En considérant un fonctionnement en petits signaux (x<<e), donner par un DL 1 l'approximation linéaire $V_{mes,lin}$ de V_{mes}.
5. Calculer la variation ΔVmeslin=(Vmes,lin-Vmes(x=0)). En déduire la sensibilité réduite.

Deuxième partie :

Soit maintenant un capteur capacitif à trois armatures A1, A2 et A3 ; A1 est capable de se déplacer entre les armatures fixe A2 et A3 voir figure3.

6. Donner l'expression de la capacité C21 (vue entre A2 et A1) et C31 (vue entre A3 et A1) et conclure
7. Proposer le montage conditionneur de ce nouveau capteur et calculer sa sensibilité réduite et conclure.

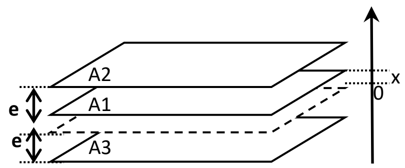


Figure3 : Schéma du nouveau capteur

Exercice 6: (Extrait CC GEGM S3 2014/2015)

On désire mesurer le niveau d'hydrocarbure dans un réservoir. Le niveau peut varier entre 0 et L=2 mètres. Le capteur est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux (voir figure 1) plongés dans le réservoir (non représenté). Le conducteur interne est en métal plein. On mesure la capacité entre les conducteurs, séparés partiellement par de l'hydrocarbure et partiellement par de l'air. On rappelle que la capacité d'un condensateur constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux en regard est $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\lambda}{\ln(\frac{r_{ext}}{r_{int}})}$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide (ou de l'air), ε_r la permittivité relative du diélectrique (hydrocarbure ou air selon le cas), λ la longueur du condensateur et r_{ext}et r_{int} sont les rayons internes et externes du capteur.

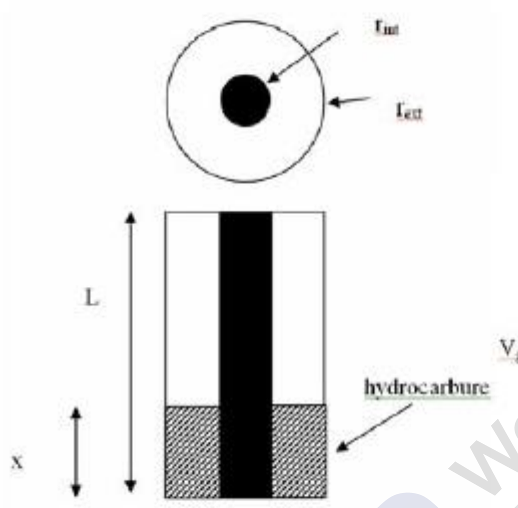


Figure 1 : schéma du capteur

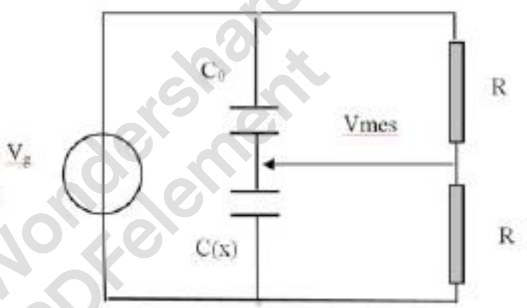


Figure 2 : pont de mesure

On pose par la suite $a = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{r_{ext}}{r_{int}})}$.

1. De manière générale, x étant la hauteur de liquide, calculer la capacité C(x) du capteur.
2. Pour mesurer la capacité, on monte le capteur sur un pont décrit figure 2. Que vaut la capacité C0 qui assure l'équilibre du pont (V_{mes}=0) quand le niveau d'hydrocarbure est à zéro ?
3. Le générateur assure une tension à ses bornes $Vg = V_o \cos(\omega t)$. Que vaut la tension Vmes en fonction de la hauteur de liquide, toujours notée x ?

Exercice 7 :

On désire réaliser un capteur de niveau pour une cuve d'huile. Soit le condensateur plan schématisé figure suivante dont les armatures sont de surface S et de hauteur h. Le condensateur est initialement dans l'air (permittivité ε1). Un liquide, de l'huile de permittivité ε2, monte jusqu'à une hauteur x mesurée à partir du bas des armatures ;
Soit C(x) la capacité correspondante du condensateur.

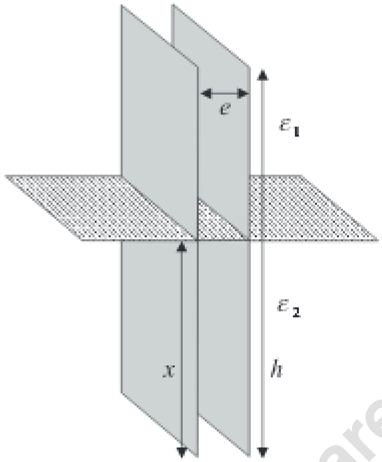
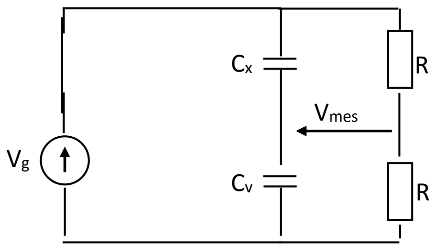


Schéma de principe du capteur

I- Déterminer l'expression de la capacité C(x).

II- Calculer les capacités minimale et maximale du capteur ainsi que les impédances correspondantes sous une alimentation sinusoïdale à 10 kHz. On donne $\varepsilon_1=\varepsilon_0=8{,}85.10^{-12}$F/m, $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$, $S=2.10^{-2}m^2$, e=5mm et h=1m.

III- Le capteur est monté dans un circuit en pont selon le schéma de la figure 2. Le condensateur Cv est un condensateur variable dont on règle la valeur à $C_0=C(x=0)$.
Donner l'expression de la tension différentielle de mesure V_{mes} en fonction de x, h, ε_1, ε_2 et V_g.



Circuit de conditionnement du capteur

<u>Exercice</u> <u>8</u>: *Accéléromètre piézoélectrique*

Un accéléromètre est constitué d'une masse sismique (m) en appui sur un anneau céramique piézoélectrique de raideur K. Les faces supérieure et inférieure de l'anneau sont métallisées et reliées à un amplificateur opérationnel idéal (voir figure1). On supposera que l'accéléromètre est équivalent à une source de courant dq/dt, ou q est la charge qui apparaît sur les faces de la céramique, et d'impédance interne Z_a (source de Norton). On supposera également que q est proportionnel à O'M=z.

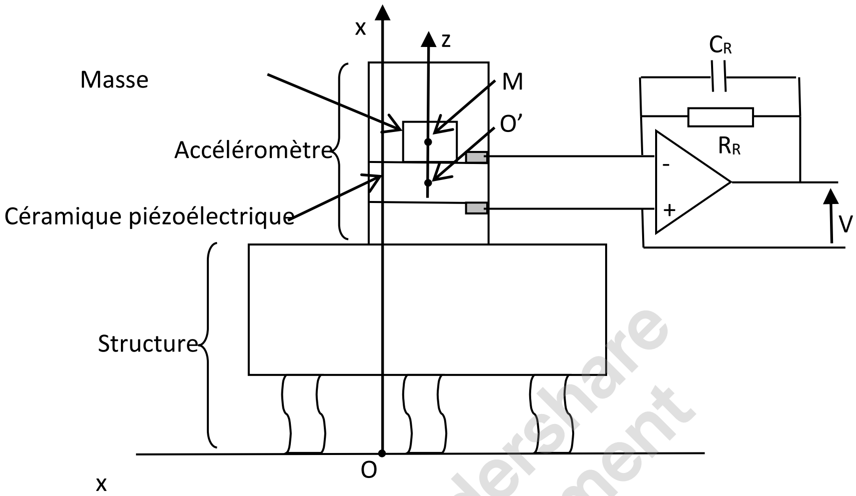


Figure 1 : Schéma de l'accéléromètre fixé à la structure, M est la position de la masse sismique

Le centre de gravité de la masse, soit le point M, peut être repéré par rapport à O', position d'équilibre (on note O'M=z), ou par rapport au sol (point O). O' est fixe par rapport au boîtier qui lui-même fixé sur la structure. On cherche à mesurer l'accélération de la structure par rapport au sol. On notera d^2OO'/dt^2 cette accélération.

Lorsque le structure est en mouvement par à rapport au sol la masse sismique se déplace dans le boîtier. Elle est alors soumise notamment à une force de rappel F_1 vers la position d'équilibre O' (soit F_1=-k.O'M=-k.z) et à une force de frottement fluide F_2 proportionnelle à sa vitesse dz/dt (soit F_2=-f.dz/dt)

1. Ecrire l'équation donnant l'accélération d^2x/dt^2 de la structure par rapport au sol en fonction de z et de ses dérivées par rapport au temps.

2. On suppose que le mouvement de la structure est sinusoïdal ($x=x_0\exp(j\omega t)$). Rechercher la solution permanente de l'équation précédente. Montrer que l'accéléromètre est un passe-bas. Donner l'expression de la fréquence de coupure basse ω_0.

3. Calculer la tension V sinusoïdal correspondant au mouvement $x=x_0\exp(j\omega)$. Montrer que le montage électronique est un passe haut. Donner sa fréquence de coupure haute ω_c.

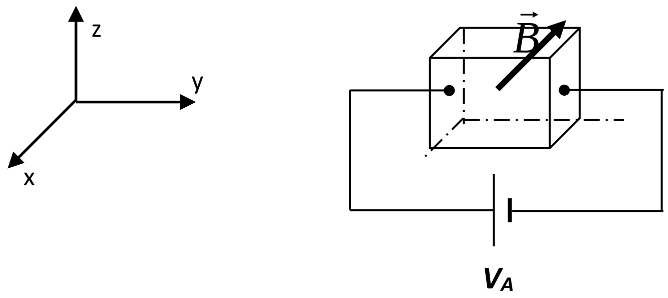
4. Calculer numériquement la bande passante du système de mesure de la figure1 sachant que $k=10^8$N/m, M=50g, C_R=200pF et R_R=109Ω.

Exercice 9 : (Extrait CC Cycle d'ingénieur S2 2014/2015)

On rappelle qu'une particule de charge q, animé d'une vitesse $\vec{V}$ en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, subit une force $\vec{F}$, dite force de Laplace donnée par :

$$\vec{F}_L = q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

On considère un cube de coté ***d*** en silicium de type N, contenant ***n*** électrons par unité de volume. La mobilité des électrons µ () et leur charge (-q) avec q=1,6 10^{-19}C.
Une différence de potentiel V_A continue est appliquée au cube comme sur la figure :



1. Exprimer la densité du courant $\vec{J}$ dans le cube en fonction q,n et $\vec{V}$.

2. On rappelle que la loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ où $\vec{E}$ est le champ électrique crée par V_A. σ est la conductivité électrique du cube. Exprimer σ en fonction de q, µ et n.

3. En plus de V_A, on applique aussi un champ magnétique $\vec{B}$ suivant la direction (-$\vec{x}$). Représenter les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}_L$ la force de Laplace qui s'applique aux électrons du cube.

4. Les électrons sont donc déviés par $\vec{F}_L$ vers la face supérieure du cube, où ils se recombinent, formant ainsi des charges négatives statiques sur la face supérieure. Puisque le cube est électriquement neutre, il se forme des charges, de signe contraire, sur la face inférieur et il apparaît dans le cube un champ électrostatique $\vec{E}_H$; La force de Coulomb correspondante appliquée aux électrons est donc : $\vec{F}_E = -q\vec{E}_H$
A l'équilibre ; que l'on considère réalisé, les modules des forces $\|\vec{F}_L\|$ et $\|\vec{F}_E\|$ s'égalisent.

4.1. Représenter les vecteurs $\vec{E}_H$, $\vec{F}_E$ et $\vec{F}_L$ dans le repère (x,y,z).

4.2. Exprimer la tension électrostatique V_H en fonction de $\|\vec{E}_H\|$ et d.

4.3. A l'équilibre, exprimer V_H en fonction de q, n, d, $\|\vec{B}\|$ et I.

5. Le cube de côté d= 2mm est parcouru par un courant I=50mA. On a $\|\vec{B}\|$ =0,2T et on mesure V_H =54mV. Par ailleurs le silicium présente une résistivité ρ=1/σ = 4Ωcm. Calculer n et µ à l'aide de ces valeurs.

6. Donner une application possible à l'exploitation de ce phénomène comme capteur.

Exercice 10: (Extrait CC GEGM S3 2015/2016)

On souhaite mesurer les déformations d'une structure pour laquelle, pour des raisons de températures élevées, l'utilisation de jauges d'extensométrie collées classiques est impossible. On se propose d'étudier la jauge capacitive représentée en Figure 1.

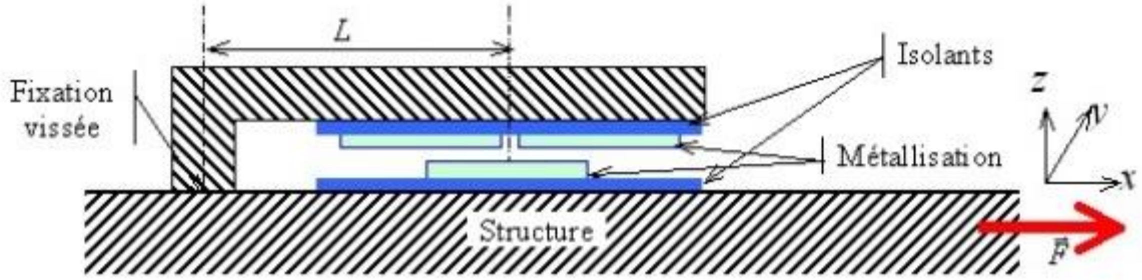


Figure 1 : Principe de la jauge capacitive haute température

Trois métallisations forment les armatures de deux condensateurs C_{12} et C_{13} schématisés sur la Figure 2. Ces armatures ont même surface $\boldsymbol{S}$, même longueur **a**, la distance entre les armatures est notée **e**. La permittivité de l'air environnant est considérée égale à celle du vide $\boldsymbol{\varepsilon_0}$.

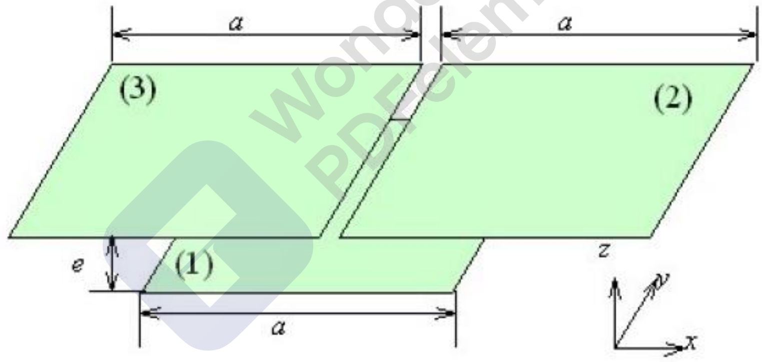


Figure 2 : Armatures des condensateurs de la jauge

1. À l'origine, l'armature (1) est au milieu des armatures (2) et (3). Donner l'expression des capacités des condensateurs $\mathbf{C_{12}}$ et $\mathbf{C_{13}}$ ainsi formés. Déduire $\boldsymbol{C_0}$.

2. On considère que la distance entre le milieu de l'armature (1) et la fixation vissée est initialement de longueur $\boldsymbol{L}$. L'application d'une contrainte (force) orientée selon la direction x provoque un déplacement $\Delta \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{L}$ de cette armature (1) par rapport aux armatures (2) et (3). Donner alors les nouvelles expressions de $\boldsymbol{C_{12}}$ et $\boldsymbol{C_{13}}$ en fonction de $\Delta \boldsymbol{L}$, a et $\boldsymbol{C_0}$.

On note $\underline{\boldsymbol{G_x}} = \boldsymbol{G_x e^{j(\omega y+\alpha)}}$ la grandeur complexe associée à une grandeur temporelle $\boldsymbol{g_x(t) = G_x \cos(\omega t + \alpha)}$

On considère le montage en pont de Wheatstone représenté sur la Figure 3. Le générateur délivre une tension sinusoïdale de pulsation , $\boldsymbol{V_G(t) = V_G \cos(\omega t + \alpha)}$ (grandeur complexe associée $\underline{\boldsymbol{V_G}} = \boldsymbol{V_G e^{j(\omega y+\alpha)}}$) et on supposera son impédance interne négligeable. Les dipôles $\boldsymbol{Z_1}$ à $\boldsymbol{Z_4}$ ont pour impédance complexe les valeurs $\underline{\boldsymbol{Z_1}}$ à $\underline{\boldsymbol{Z_4}}$.

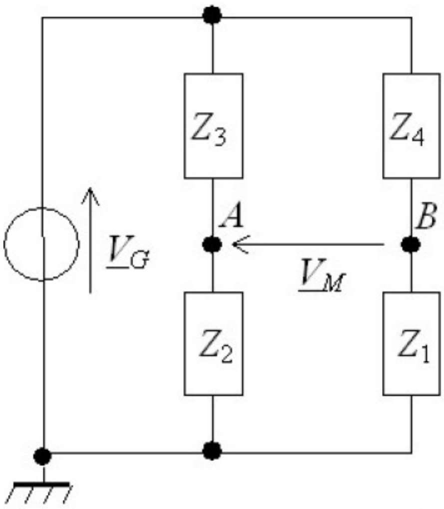


Figure 3 : Montage en pont de Wheatstone

3. Établir l'expression de la tension de sortie du pont, $\underline{\boldsymbol{V_M}}$, en fonction de la tension $\underline{\boldsymbol{V_G}}$ et des quatre impédances $\underline{\boldsymbol{Z_1}}$ à $\underline{\boldsymbol{Z_4}}$. Donner la condition d'équilibre.

4. Les condensateurs $\boldsymbol{C_{12}}$ et $\boldsymbol{C_{13}}$ sont montés en pont selon ce montage, respectivement à la place de $\boldsymbol{Z_2}$ et $\boldsymbol{Z_3}$. Les dipôles $\boldsymbol{Z_1}$ et $\boldsymbol{Z_4}$ sont des résistors, ayant la même valeur de résistance $\boldsymbol{R}$. Écrire les expressions des impédances $\underline{\boldsymbol{Z_1}}$ à $\underline{\boldsymbol{Z_4}}$ en fonction de ces grandeurs ($\boldsymbol{C_{12}}$, $\boldsymbol{C_{13}}$ et $\boldsymbol{R}$) en notation « complexe ».

5. Établir dans ce cas l'expression de la tension de sortie du pont, $\underline{\boldsymbol{V_M}}$, en fonction de $\boldsymbol{C_{12}}$, $\boldsymbol{C_{13}}$ et $\underline{\boldsymbol{V_G}}$. En déduire l'expression de $V_M(t)$. Préciser l'amplitude V_M de $V_M(t)$ en fonction $\Delta \boldsymbol{L}$, a et $\boldsymbol{V_G}$.

Exercice 11: (Extrait CC Cycle d'ingénieur S2 2016/2017)

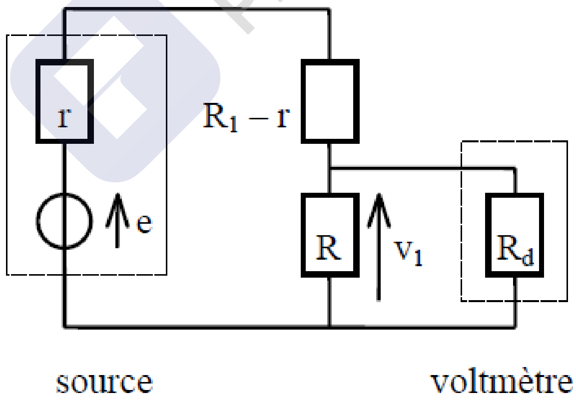
La résistance R d'une thermistance, formée d'un matériau semi-conducteur, varie avec la température absolue T suivant la loi : $R = R_0 \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right)$ où *B, R_0 = 12000Ω et T_0 = 298 K* sont des constantes.

1. Que représente la constante R_0 ?
2. Exprimer le coefficient de température $\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT}$ en fonction de *B* et *T*.
3. Calculer *B* sachant que *α (T = 298 K) = – 4,135 10^{-2} K^{-1}*.
4. Calculer *R* aux températures 0°C et 100°C.

Pour mesurer une température, on utilise un capteur résistif. On mesure un signal électrique, en général une tension, qui traduit les variations de la résistance avec la température. Un montage, alimenté par une source de tension comprend la résistance à mesurer et d'autres résistances constantes. Le circuit de mesure ainsi constitué est appelé conditionneur du thermomètre.

Montage potentiométrique.

Celui-ci est représenté sur la figure ci-dessous. Le générateur a pour fem *e* et pour résistance interne *r*; le voltmètre de résistance interne R_d mesure la tension aux bornes de la résistance thermométrique *R* qui dépend de *T* .



5. *Exprimer v_1 en fonction de R_1, R, R_d, et e.*
6. *Comment doit-on choisir R_d pour que la tension v_1 ne dépende pas trop du voltmètre utilisé ? Quelle est alors l'expression de v_1? On suppose cette condition désormais réalisée.*
7. *À T = T_0, la résistance thermométrique R a pour valeur R_0 et la tension de mesure la valeur v_1. Ces conditions définissent un point moyen de fonctionnement. Lorsque R varie de ΔR, v_1 varie de Δv_1. Exprimer Δv_1 en fonction de ΔR, R_1, R et e, en se limitant au cas où ΔR<< Ro.*

8. On définit la sensibilité du conditionneur par $S = \frac{\Delta v_1}{\Delta R}$; Pour quelle valeur de R_1 cette sensibilité est-elle maximale au voisinage de $T = T_0$? Calculer cette sensibilité maximale.
9. Alors que le conditionneur a sa sensibilité maximale, la fem e du générateur fluctue entre e – Δe et e + Δe. Calculer la variation de correspondant à une variation Δe de e. Comparer l'influence de ΔR et de Δe. Quel est le niveau tolérable de fluctuations de la fem de la source dans ce dispositif ?

CORRIGES

Exercice 1

1. L'expression de Vm en fonction de E, R et $R0$

On a : $$\text{Vm} = \text{VA} - \text{VB} = E\frac{R}{R+R_0} - E\frac{R_0}{2R_0} = E(\frac{R}{R+R_0} - \frac{1}{2})$$

Donc

$$\text{Vm} = E\frac{R - R_0}{2(R + R_0)}$$

2. A l'équilibre et pour que $Vm_0 = 0$, il faut que R=R0.
3. La valeur des résistances réglables $R0$ qui équilibre le pont:

$R = fct\ (P)$

$R(P) = aP + b$

$P = 0 \rightarrow R(0) = b = 1000$

$P = 4000 \rightarrow R(4000) = a \times 4000 + 1000 = 3000$

$$\rightarrow a = \frac{3000 - 1000}{4000} \rightarrow a = \frac{1}{2} = 0.5$$

$R(P) = \dfrac{P}{2} + 1000 \rightarrow R(P) = 0.5P + 1000$

$R_0 = R(1013) = \dfrac{1013}{2} + 1000 \rightarrow R_0 = 1506.5\Omega$

4. Exprimons Vm en fonction de E et P

$$\text{Vm} = \frac{E}{2}\left(\frac{0.5P + 1000 - 1506.5}{0.5P + 1000 + 1506.5}\right)$$

$$= \frac{E}{2}\left(\frac{0.5P - 506.5}{0.5P + 2506.5}\right)$$

L'équation de Vm est une équation non Linéaire

5. En prenant E = 12V, calculer les valeurs respectives de v pour P = 900mb et P = 1100mb. Calculons les erreurs relatives pour les deux valeurs de v calculées plus haut

$$\text{Vm}\ (P = 900mb) = \frac{0.5\times900-506.5}{0.5\times900+2136.5} \rightarrow \text{Vm}\ (P = 900mb) = -114.6mV$$

$$Erreur\ relative = \frac{-114.6 - (-113)}{-113} = 1.4\%$$

Exercice 2

1. Déduire les équations de $R_h(\Delta x)$ et $R_b(\Delta x)$

Le potentiomètre utilisé est linéaire implique que :

$$R_h\,(\Delta x) = a_h\Delta x + b_h$$
$$R_b\,(\Delta x) = a_b\Delta x + b_b$$

Avec

$\boldsymbol{\Delta x}$	$R_h\,(\boldsymbol{\Delta x})$	$R_b\,(\boldsymbol{\Delta x})$
$+\boldsymbol{l}$	***0***	$2R_0$
0	R_0	R_0
-l	$2R_0$	***0***

On a $R_h\,(0) = a_h * 0 + b_h = R_0 \quad => b_h = R_0$

$R_b\,(0) = a_b * 0 + b_b = R_0 \quad => b_b = R_0$

Et $R_h\,(-l) = a_h * (-l) + R_0 = 2R_0 \;=> a_h = -R_0/l$

$R_b\,(l) = a_b * (l) + R_0 = 2R_0 \;=> a_b = R_0/l$

D'où les équations sont :

$$Rb\,(\Delta x) = (R0 * \frac{\Delta x}{l}) + R0$$

$$Rh\,(\Delta x) = -(R0 * \frac{\Delta x}{l}) + R0$$

Donc on peut déduire que notre montage se comporte comme un montage Puch-Pull.

2. D'après le schéma on peut déduire directement que :

$$Vmes = \frac{Rb(\Delta x)//Rapp}{Rg + Rh(\Delta x) + Rb(\Delta x)//Rapp}Vg$$

Avec :

$$Rb(\Delta x)//Rapp = \frac{Rb(\Delta x) * Rapp}{Rb(\Delta x) + \mathrm{Rapp}}$$

D'où

$$Vmes = \frac{\frac{Rb(\Delta x) * Rapp}{Rb(\Delta x) + \mathrm{Rapp}}}{Rg + Rh(\Delta x) + \frac{Rb(\Delta x) * Rapp}{Rb(\Delta x) + \mathrm{Rapp}}}Vg$$

3. Pour Rapp>> Rb(Δx) on a :

$$Rb(\Delta x)//Rapp = \frac{Rb(\Delta x) * Rapp}{Rb(\Delta x) + \mathrm{Rapp}} = \frac{Rb(\Delta x) * Rapp}{Rapp}$$

$$= Rb(\Delta x)$$

Ce qui implique :

$$Vmes = \frac{Rb(\Delta x)}{Rg + 2R0} Vg$$

4. Calcul de sensibilité :

On sait que :

$$S_{mes} = \frac{\Delta \mathrm{Vm}}{mesurande} = \frac{\Delta \mathrm{Vm}}{\Delta \mathrm{x}}$$

On a Vm d'après la question précédente :

$$Vmes = Vmes_0 + \Delta Vm = \frac{Rb(\Delta x)}{Rg + 2R0} Vg$$

Donc :

$$Vmes = Vmes_0 + \Delta Vm = \frac{\frac{\mathrm{R0} * \Delta \mathrm{x}}{l} + \mathrm{R0}}{Rg + 2R0} Vg = \frac{R0}{Rg + 2R0} Vg + \frac{\frac{\mathrm{R0} * \Delta \mathrm{x}}{l}}{Rg + 2R0} Vg$$

$$Vmes_0 = \frac{R0}{Rg + 2R0} Vg$$

$$\Delta Vm = \frac{\frac{\mathrm{R0} * \Delta \mathrm{x}}{l}}{Rg + 2R0} Vg$$

Alors :

$$S_{mes} = \frac{\Delta \mathrm{Vm}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{\frac{\mathrm{R0}}{l}}{Rg + 2R0} Vg$$

5. Pour que la sensibilité soit Maximale Rg doit tends vers 0 donc :

$$S_{mes}\,(\max) = \frac{\frac{\mathrm{R0}}{l}}{2R0} Vg = \frac{Vg}{2l}$$

6. Le curseur a un mouvement sinusoïdale d'amplitude $a = 1cm$ autour de x_0 implique que :

$$X = x0 + a * sin(2\pi ft)$$

Donc la vitesse $\dot{x} = a2\pi fcos(2\pi ft)$

D'où la vitesse maximale :

$$\dot{x} = a2\pi f$$

Car

$$cos\ (2\pi fmaxt) = 1$$

Alors

$$Vmax = 0{,}2m/s$$

Et

$$fmax = 0{,}2/10 - 2 * 2 * \pi = 3{,}18\ s - 1 = 3{,}18\ Hz$$

Exercice 3

1. déterminons l'expression des capacités $C_1(x=0)= C_2(x=0)$ que l'on notera C_0

On sait que

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e}$$

Et on a :

$C_0 = C_1(x=0) = C_1^{diél}(x=0) + C_1^{air}(x=0)$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{2e} + \varepsilon_0 \frac{A}{2e}$$

Ce qui implique :

$C_0 = C_1(x=0) = \varepsilon_0 \frac{A}{2e}(1+\varepsilon_r)$

De même on trouve que :

$C_0 = C_2(x=0) = \varepsilon_0 \frac{A}{2e}(1+\varepsilon_r)$

2. Calculons $C_1(x)$ et $C_2(x)$

$C_1(x) = C_1^{diélectrique}(x) + C_1^{air}(x)$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{e} \frac{A}{L}\left(\frac{L}{2}+x\right) + \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{A}{L}\left(\frac{L}{2}-x\right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{e} \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{e} \frac{A}{L}x + \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{A}{2} - \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{A}{L}x$$

$C_1(x) = \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{A}{2}(1+\varepsilon_r) - \frac{\varepsilon_0 A}{eL}(1-\varepsilon_r)x$

$C_1(x) = C_0 + \Delta C_1(x)$ Avec $\Delta C_1(x) = -\frac{\varepsilon_0 A}{eL}(1-\varepsilon_r)x$

De la même manière on trouve:

$C_2(x) = C_0 + \Delta C_2(x)$ Avec $\Delta C_2(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{eL}(1-\varepsilon_r)x$

On constate que : $\Delta C_1(x) = -\Delta C_2(x)$

On peut conclure que ce capteur peut être utilisé dans un conditionneur Push-pull.

3. Exprimons la tension différentielle de mesure V_{mes} en fonction de x, l ε_r et V_g

$$V_m = V_g\left(\frac{Zc_2}{Zc_1+Zc_2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{Zc_2 - Zc_1}{Zc_1 + Zc_2}$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{\frac{1}{jC_2w} - \frac{1}{jC_1w}}{\frac{1}{jC_2w} + \frac{1}{jC_1w}}$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{C_0 + \Delta C_1 - C_0 - \Delta C_2}{C_0 + \Delta C_1 + C_0 + \Delta C_2}$$

$$= \frac{V_g}{4C_0} 2\Delta C_1$$

On peut déduire :

$V_m = \frac{V_g}{2C_0}\Delta C_1 = \frac{V_g}{2C_0}\frac{\varepsilon_0 A}{eL}(\varepsilon_r - 1)x$

4. la sensibilité S de la mesure est donnée par :

$$Vm = Vm0 + \Delta Vm = \Delta Vm$$

$$= \frac{V_g}{2C_0}\frac{\varepsilon_0 A}{eL}(\varepsilon_r - 1)x$$

Sachant que : $S = \frac{\Delta Vm}{x}$

On aura alors

$$S = \frac{V_g}{2C_0}\frac{\varepsilon_0 A}{eL}(\varepsilon_r - 1)$$

5. Les valeurs de l'étendue de mesure EM et de l'excursion de V_{mes}

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

Ce qui implique que

$$-\frac{L}{2}S \leq xS \leq \frac{L}{2}S$$

Et

$$-\frac{L}{2}S \leq \Delta V_m \leq \frac{L}{2}S$$

Exercice 4

1. Calcul de R1

$$Rc(T) = R0\ (1 + \alpha T) = \alpha\, R0\, T + R0$$

On sait que la variation de la PT100 est linéaire et on sait que : T ϵ [0 °C , 100 °C] de plus on a à l'équilibre $T = 50\,°C$ alors à $Tc = 50\,°C$ on a $Vm = Vm0$

$$\text{Vm} = v_g\left[\frac{R_C}{R_1+R_C} - \frac{1}{2}\right] = \frac{v_g}{2}\frac{R_C - R_1}{R_C + R_1}$$

à l'équilibre : $v_m = v_{m_0} = 0$ ce qui implique:

$$R_1 = R_C(50) = R_0(1 + \alpha\, 50)$$

2. Expression de Vm

$$v_m = \frac{v_g}{2}\frac{R_{c_0} + \Delta R_c - R_{c_0}}{R_{c_0} + \Delta R_c + R_{c_0}}$$

$$v_m = \frac{v_g}{2}\cdot\frac{\frac{\Delta R_c}{R_{c_0}}}{2 + \frac{\Delta R_c}{R_{c0}}}$$

L'équation de Vm est une équation non linéaire. Pour la linéariser nous utilisons le développement limité :

$$\text{Soit : } f(u) = \frac{u}{2+u}$$

$$f(u) \approx f(0) + f'(0)u = \frac{u}{2}$$

On peut déduire que :

$$v_m = \frac{v_g}{2}\cdot\frac{\Delta R_c}{2R_0} = \frac{v_g}{4}\cdot\frac{\Delta R_c}{R_0}$$

L'équation de Vm est devenue maintenant une équation linéaire.

3. Expression de la sensibilité

$$S = \frac{\Delta v_m}{\Delta T}$$

$$\Delta v_m = \frac{v_g}{4R_{co}} \Delta R_c = \frac{v_g}{4R_{c_0}} (R_c(T) - R_{co})$$

$$\Delta v_m = \frac{v_g}{4R_{co}} \left(R_0\big(1 + \alpha T\big) - R_0(1 + \alpha T_0)\right)$$

$$\Delta v_m = \frac{v_g\, R_0}{4R_{co}}\, \alpha(T - T_0)$$

$$\Delta v_m = \frac{v_g\, R_0}{4R_{co}}\, \alpha \Delta T$$

$$S = \frac{\Delta v_m}{\Delta T} = \frac{v_g\, R_0}{4R_{co}}\, \alpha$$

4. L'influence des fils de liaison

Rc devient : $R_c = R_{c_0} + 2r + \Delta R_c$

$$v_{m_r} = \frac{\Delta R_c + 2r}{2R_{c_0} + 2r + \Delta R_c} \frac{v_g}{2}$$

Alors l'erreur introduite par les fils des liaison est :

$$E_{rr} = v_{mr} - v_m$$

$$E_{rr} = \frac{v_g}{2} \frac{\Delta R_c + 2r}{2R_{c_0} + 2r + \Delta R_c} - \frac{v_g}{2} \frac{R_{c_0} + \Delta R_c - R_{c_0}}{R_{c_0} + \Delta R_c + R_{c_0}}$$

$$E_{rr} = \frac{4rR_C}{(2R_{C0} + \Delta R_C)^2} \frac{1}{1 + \frac{2r}{2R_{c0} + \Delta R_c}} \frac{v_g}{2}$$

Exercice 5

Première partie :

1. La mesurande pour ce capteur est le déplacement.

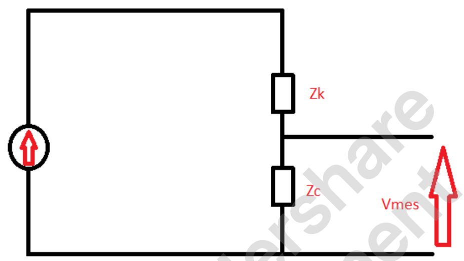
2. Pour la capacité du condensateur C (x) :

   On sait que : $C = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e}$ d'où $C(x) = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e+x}$

   Pour l'impédance $Z_c(x)$:

   On sait que $z_c = \frac{1}{jcw}$ d'où $z_c(x) = \frac{1}{jc(x)w} = \frac{1}{j\varepsilon_0 \times \frac{S}{e+x} \times w} = \frac{e+x}{j\varepsilon_0 Sw}$

3.



Sachant que :$Z_k = \frac{e}{j\varepsilon_0 Sw}$ et $z_c(x) = \frac{e+x}{j\varepsilon_0 Sw}$

On a $$Vm = Vg \times \frac{z_c(x)}{z_c(x)+z_k} = Vg \times \frac{\frac{e+x}{j\varepsilon_0 Sw}}{\frac{e+x}{j\varepsilon_0 Sw}+\frac{e}{j\varepsilon_0 Sw}}$$

D'où $$Vm = Vg \times \frac{e+x}{e+e+x} = Vg \times \frac{e+x}{2e+x} = Vg \times \frac{1+\frac{x}{e}}{2+\frac{x}{e}}$$

4. Considérant un fonctionnement en petits signaux : x<<e

$Vm = Vg \times \frac{1+\frac{x}{e}}{2+\frac{x}{e}}$ est une équation non linéaire, donc on doit la linéariser.

Si on pose $U = \frac{x}{e}$ et on prend $f(U) = \frac{1+U}{2+U}$

Le développement limité d'ordre 1 de $f(U)$ est donné par :

$$DL1(f(U)) = f(0) + U\grave{f}(0)$$

avec

$$\grave{f}(U) = \frac{2+U-1-U}{(2+U)^2} = \frac{1}{(2+U)^2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\grave{f}(0) = \frac{1}{4}$$

Donc : $f(U) = 1/2 + \ U/2$

On peut déduire alors que :

$$Vmeslin \ \cong \ Vg \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{e}\right) \cong Vg \times \frac{1}{2} + \ Vg \times \frac{x}{4e}$$

Cette dernière est une équation linéaire avec

$$Vm0 \ = \ Vg \times \frac{1}{2}$$

et

$$\Delta Vm \ = Vg \times x/4e$$

5. Calcul de La variation ΔV_{meslin}:

$$\Delta Vmeslin \ = \ Vmeslin - \ Vmes(x=0) \ = \frac{Vg}{2} + \frac{Vg \times x}{4e} - \frac{Vg}{2}$$

Donc :

$$\Delta Vmeslin \ = \frac{Vg \times x}{4e}$$

Déduction de la sensibilité réduite :

$$Smeslin = \frac{\Delta Vmeslin}{x} = \frac{Vg}{4e}$$

$$Srlin = \frac{1}{4e}$$

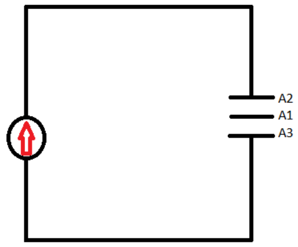
Deuxième partie :

6. Les capacités C_{12} et C_{13} :

$$C12 = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e+x} \quad \text{donc} \quad Zc_{12} = \frac{e+x}{j\varepsilon_0 Sw} = \frac{e}{j\varepsilon_0 Sw} + \frac{x}{j\varepsilon_0 Sw}$$

$$C13 = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e-x} \quad \text{donc} \quad Zc_{13} = \frac{e-x}{j\varepsilon_0 Sw} = \frac{e}{j\varepsilon_0 Sw} - \frac{x}{j\varepsilon_0 Sw}$$

7.



Exercice 6

1. **Capacité du Capteur**

$$C(x) = C_{air}(x) + C_{hydro}(x)$$

$$= a(L-h) + a\varepsilon_r h$$

$$= aL - ah + a\varepsilon_r h$$

$$= aL + a(\varepsilon_r - 1)h$$

2. Capacité C0 qui équilibre le pont

$$Vmes = Vg\left(\frac{Zc_x}{Zc_0+Zc_x} - \frac{R}{2R}\right)$$

$$= Vg\left(\frac{Zc_x}{Zc_0+Zc_x} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{Zc_x - Zc_0}{Zc_x+Zc_0}$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{\frac{1}{jC(x)w} - \frac{1}{jC_0w}}{\frac{1}{jC(x)w} + \frac{1}{jC_0w}}$$

$$= \frac{V_g}{2}\frac{C_0 - C_x}{C_0 + C_x}$$

$$Vmes = 0 \rightarrow \frac{V_g}{2}\frac{C_0-C_x}{C_0+C_x} = 0 \rightarrow C_0 = C_x$$

3. Tension $Vmes$ en fonction de la hauteur de liquide

$$Vmes = V_0\frac{\cos(wt)}{2}\frac{aL - aL - a\,(\varepsilon_r-1)h}{aL+aL+a(\varepsilon_r-1)h}$$

$$= V_0\frac{\cos(wt)}{2}\frac{a\,(1-\varepsilon_r)h}{2aL + a(\varepsilon_r-1)h}$$

<u>Exercice 7</u>

1. Déterminer l'expression de la capacité C(x).

On a $C(X) = C_X^{air} + C_X^{huile}$

$$= \varepsilon_1 \frac{\frac{S}{h}(h-x)}{e} + \frac{\frac{S}{h}x}{e}\varepsilon_2$$

$$= \varepsilon_1 \frac{S}{e} - \varepsilon_1 \frac{S}{eh} x + \frac{S}{eh} x\, \varepsilon_2$$

$$= \varepsilon_1 \frac{S}{e} + \frac{S}{eh} x(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

2. Calculer les capacités minimale et maximale du capteur ainsi que les impédances correspondantes sous une alimentation sinusoïdale à 10 kHz. On donne $\varepsilon_1=\varepsilon_0=8{,}85.10^{-12}$F/m, $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$, $S=2.10^{-2}\text{m}^2$, e=5mm et h=1m.

$$Cmin = C(x=0) = \varepsilon 1 \frac{S}{e}$$

$$Z_{Cmin} = \frac{1}{j(Cmin)w} = \frac{e}{j\varepsilon 1 S w}$$

$$Cmax = C(x=h) = \varepsilon 2 \frac{S}{e}$$

$$Z_{Cmax} = \frac{1}{j(Cmax)w} = \frac{e}{j\varepsilon 1 S w}$$

3. L'expression de la tension différentielle de mesure $Vmes$ en fonction de $x, h, \varepsilon 1, \varepsilon 2$ et Vg.

$$Vmes = Vg\left(\frac{Zv}{Zc+Zv} - \frac{1}{2}\right) = \frac{C(x)-Cv}{C(x)+Cv} \cdot \frac{Vg}{2}$$

$$= \frac{Vg}{2} \cdot \frac{\frac{S}{eh}(\varepsilon 2 - \varepsilon 1)x}{2\varepsilon 1 \frac{S}{e} + \frac{S}{eh}(\varepsilon 2 - \varepsilon 1)x} = \frac{Vg}{2} \cdot \frac{\frac{(\varepsilon 2 - \varepsilon 1)x}{h}}{2\varepsilon 1 + \frac{(\varepsilon 2 - \varepsilon 1)x}{h}}$$

Exercice 8

1. Principe fondamental de la dynamique : $m\overrightarrow{\gamma_M} = \sum\overrightarrow{F_{ext}}$

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{F}_{raideur} + \vec{F}_{fluide}$$

$$= -k\overrightarrow{O'M} - F\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$= -Kz - f\dot{z}$$

De plus on a

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right]$$

$$m\ddot{x} \quad = m\gamma + m\ddot{z}$$

On peut déduir que

$$m\gamma + m\ddot{z} = -Kz - f\dot{z}$$

$$\gamma = -\ddot{z} - \frac{k}{m}z - \frac{f}{m}\dot{z}$$

$$-\gamma = \ddot{z} + \frac{k}{m}z + \frac{f}{m}\dot{z}$$

2. Le mouvement de la structure est sinusoïdal : $x = x_0 \exp(jwt)$

x = x_0 exp (jwt) → systeme: H(jw) → z = z_0 exp (jwt)

$H(jw)$ c'est la fonction de transfert du système : $H(jw) = \frac{z}{\ddot{x}}$

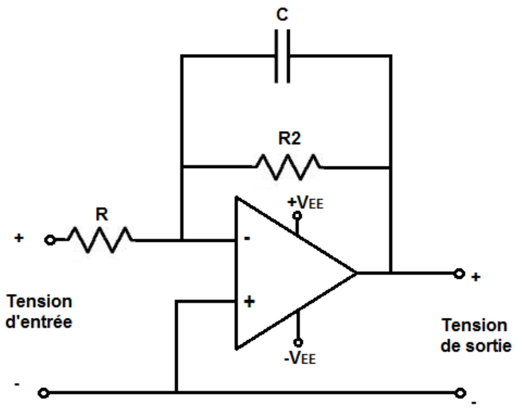
$$z = z_0 \, exp\,(jwt) \rightarrow \dot{z} = j\omega z \rightarrow \ddot{z} = -\omega^2 z$$

$$\gamma = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 x = -\omega^2 z + \frac{f}{m}j\omega z + \frac{k}{m}z$$

$$\omega^2 x = z\left(-\omega^2 + \frac{f}{m}j\omega + \frac{k}{m}\right)$$

3.



La charge est proportionnelle à l'accélération : $q = \alpha\, x$

$x = x_0 e^{j\omega t}$

$q = \alpha\, x_0 e^{j\omega t}$

$q = q_0 e^{j\omega t}$

$\dot{q} = jwq$

L'ampli OP fonctionne en régime permanant

$\varepsilon \to 0$

$\varepsilon = v + v_z = 0$

$$z = C//R\,;$$

$$z = \frac{1}{\frac{1}{jc\omega} + \frac{1}{k}} = \frac{R}{1 + jRc\omega}$$

$$v = -v_z = -z\frac{dq}{dt} = -zj\omega q = -\frac{jR\omega q}{1 + jRC\omega}$$

$$B(j\omega) = \frac{v(t)}{q(t)} = \frac{-jR\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\lim_{\omega \to 0} B(j\omega) = 0\,;\ \lim_{\omega \to \infty} B(j\omega) = -1$$

C'est un filtre passe haute.

$$|B(\omega c)| = \frac{B_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$|B(\omega c)| = \frac{R\omega}{\sqrt{1+(Rc\omega_c)^2}}$$

La fonction de transfert est alors :

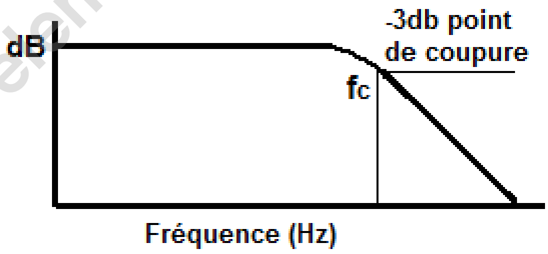
$$H(jw) = \frac{z}{\ddot{x}} = \frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + j\omega\frac{f}{m}}$$

$$\lim_{\omega\to 0} H(jw) = \frac{1}{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \lim_{w\to\infty} H(jw) = 0 \ .$$

C'est un filtre passe bas car il n'aine pas les fréquences hautes.

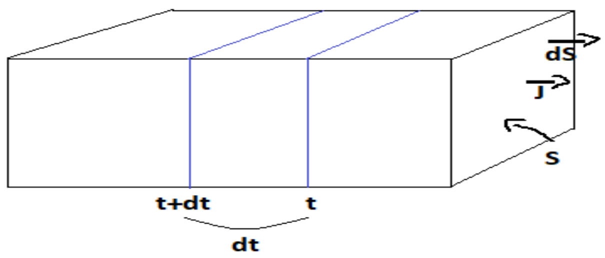
$$H_{max} = \frac{1}{\frac{k}{m}}$$

$$H(jw) = \frac{H\max}{\sqrt{2}}$$



Exercice 9

1.



$\mathrm{I} = \oiint \vec{\mathrm{J}}.\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$ avec $dq = S.V.dt.n.q$

Ce qui implique $I = \frac{dq}{dt} = S.V.n.q$

Et on sait que $\oiint \vec{J}.\overrightarrow{dS} = J.S$

on a alors $\vec{J} = V.n.q$

$$\vec{J} = n.q.\vec{V}$$

2.

On a $\vec{J} = \sigma.\vec{E}$ avec $\vec{V} = \mu.\vec{E}$

Tel que $\vec{V}$: vitesse

$\vec{E}$: champ appliqué

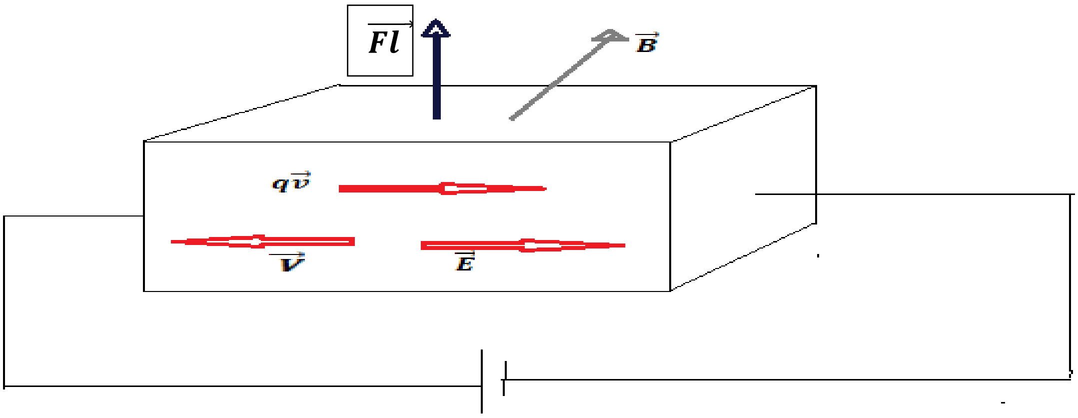
μ : mobilité

$\vec{J} = n.q.\vec{V} = n.q.\mu.\vec{E}$

Alors on a

$$\sigma = n.q.\mu$$

3.

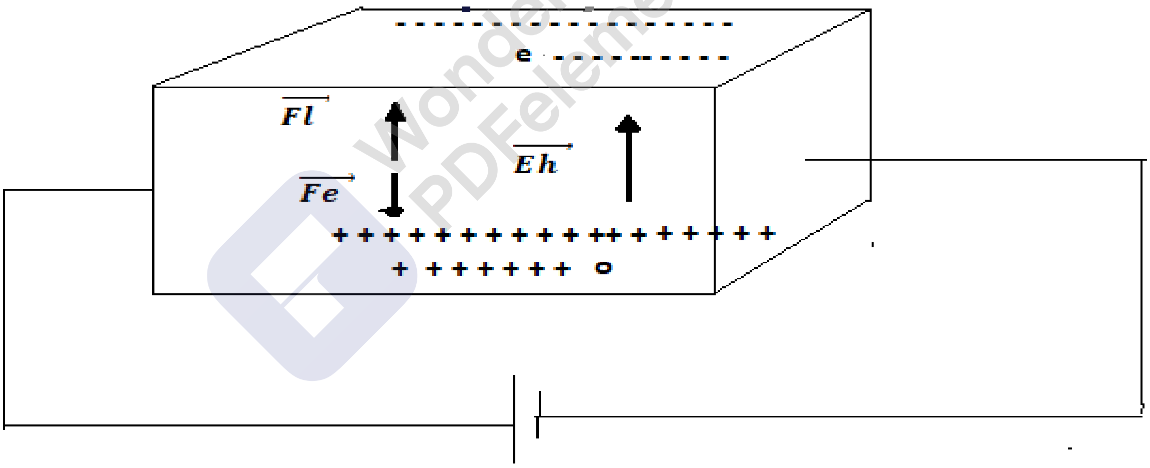


$\overrightarrow{Fl} \perp (q\vec{v}, \vec{B})$

$(q\vec{v}, \vec{B}, \overrightarrow{Fl})$ forme un triédre direct

4. .

a)



b)

$$\vec{E} = -grad\,\overrightarrow{Vh} = -\frac{\partial Vh}{\partial x} - \frac{\partial Vh}{\partial y} - \frac{\partial Vh}{\partial z}$$

$$\|\overrightarrow{Eh}\| = \frac{Vh}{d}$$

On déduit alors que

$$Vh = d.\|\overrightarrow{Eh}\|$$

c)

$\|\vec{Fl}\| = q.V.B$ $\|\vec{Fl}\| = \|\vec{Fe}\|$ $\|\vec{Fe}\| = q.Eh$

Avec $Eh = V.B = \frac{Vh}{d}$ alors $Vh = d.V.B$

Sachant que $J = S.V.n.q$

$$V = \frac{I}{S.n.q} = \frac{I}{n.q.d^2}$$

$$Vh = \frac{B.I}{n.q.d}$$

5.

Soit d=2mm I=50mA $\|\vec{B}\| = 0.2T$ Vh=54mV $\rho = \frac{1}{\sigma} = 4Ohm.cm$

Apllicatio numérique :

$$n = \frac{B.I}{Vh.q.d} = \frac{0.2 \times 0.05}{0.054 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.002} = 5.79 \times 10^{20}$$

$$\mu = \frac{1}{\rho.n.q} = \frac{1}{40 \times 10^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 5.79 \times 10^{20}} = 27 \times 10^{-3}$$

6.

On peut utiliser ce phénoméne comme capture (détecteur) de proximité.

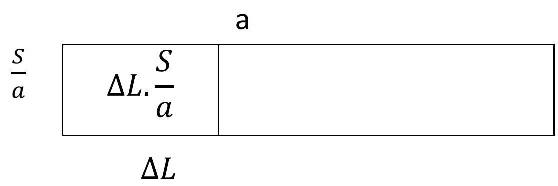
Exercice 10

1. Les expressions des capacités des Condensateurs C_{12}, C_{13} et C_0 :

   On a :

   $C_{12}= C_{13} = \varepsilon_0 \times \frac{\frac{S}{2}}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{2e} = C_0$

2. Nouvelles Expressions de C_{12} et C_{13} en fonction de ΔL, a et $C0$:



   On a :

   $$C_{12} = \frac{\varepsilon_0}{e}\left(\frac{S}{2} - \Delta L.\frac{S}{a}\right)$$

   $$= \frac{\varepsilon_0}{2e}\left(1 - 2.\Delta L\frac{1}{a}\right)s$$

   $$= \frac{\varepsilon_0 S}{2e}\left(1 - 2.\Delta L\frac{1}{a}\right)$$

   Donc :

   $$C_{12} = C_0\left(1 - 2.\Delta L\frac{1}{a}\right)$$

   De même on trouve:

   $$C_{13} = C_0\left(1 + 2.\Delta L\frac{1}{a}\right)$$

3. Tension de sortie de pont V_M en fonction de la tension V_G et des quatre impédances Z_1 à Z_4 , puis la condition d'équilibre :

   On a :

   $$V_M = V_A - V_B$$

   avec

   $$V_A = V_G\frac{Z_2}{Z_3+Z_2} \quad \text{et} \quad V_B = V_G\frac{Z_1}{Z_1+Z_4}$$

On obtient alors $V_M = V_G .\left(\frac{Z_2.Z_4 - Z_3.Z_1}{(Z_3+Z_2).(Z_1+Z_4)}\right)$

<u>Condition d'équilibre :</u>

$$Z_2.Z_4 = Z_3.Z_1$$

4. Expressions de Z_1 à Z_4 en fonction de ces grandeurs (C_{12}, C_{13} , R) :

$Z_3 = \frac{1}{j\,C_{13}w}$

$Z_2 = \frac{1}{j\,C_{12}w}$

$Z_4 = R$

$Z_1 = R$

5. La Tension de Sortie du pont V_M , en fonction de V_M(t). Précisons Amplitude V_M de V_M(t) en fonction de ΔL , a et V_G :

On a :

$$V_M = V_A - V_B$$

Et

$$V_A = V_G \frac{Z_{12}}{Z_{13}+Z_{12}} \quad \text{et} \quad V_B = V_G \frac{R}{R+R} = \frac{V_G}{2}$$

$$V_M = V_G\left(\frac{Z12}{Z13+Z12} - \frac{1}{2}\right)$$

$$V_M = \frac{V_G}{2}\left(\frac{2.Z12-Z13-Z12}{Z13+Z12}\right)$$

$$V_M = \frac{V_G}{2}\left(\frac{\frac{1}{j\,C12w}-\frac{1}{j\,C13w}}{\frac{1}{j\,C12w}+\frac{1}{j\,C13w}}\right)$$

$$V_M = \frac{V_G}{2}\left(\frac{C13-C12}{C13+C12}\right)$$

$$V_M = \frac{V_G}{2}\left(\frac{C0(1+2.\Delta L\frac{1}{a}) - C0(1-2.\Delta L\frac{1}{a})}{C0\left(1-2.\Delta L\frac{1}{a}\right)+C0(1+2.\Delta L\frac{1}{a})}\right)$$

$$V_M = \frac{V_G}{2}.\left(\frac{C0.4.\Delta L\frac{1}{a})}{2.C0}\right)$$

On obtient alors :

$$V_M = V_G\left(\Delta L\frac{1}{a}\right)$$

Exercice 11

1. La constante R_0 représente la valeur de R à $T = T_0$.

2. On a $\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT}$

   Ainsi que $R = R_0 \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right)$, Donc on dérive R dans l'expression de α :

$$\alpha = -\frac{R_0}{R} B \frac{1}{T^2}$$

$$\alpha = \frac{-B}{RT^2} R$$

   Finalement on obtient : $\alpha = \frac{-B}{T^2}$

3. $\alpha(T = 298K) = -4{,}135 \times 10^{-2}$ et $\alpha = \frac{-B}{T^2} = \frac{-B}{298^2}$

   Ce qui implique que $B = -\alpha T^2$

   <u>Application numérique :</u>

   B = 3672.04

4. à T= 273 K on a

$$R = 12000 \exp\left(\frac{3672.04}{273} - \frac{3672.04}{298}\right) = 37089\ \Omega$$

Et à T= 373 K on a

$$R = 12000 \exp\left(\frac{3672.04}{373} - \frac{3672.04}{298}\right) = 1007.26\ \Omega$$

5. En appliquant le diviseur de tension on obtient :

$$V1 = e \times \frac{\frac{(R \times Rd)}{R + Rd}}{r + R1 - r + \frac{(R \times Rd)}{R + Rd}}$$

$$V1 = e \times \frac{R \times Rd}{R1(R + Rd) + (R \times Rd)}$$

6. On doit prendre Rd $\gg$ R

On obtient alors:

$$V1 = e \times \frac{R}{R1 + R}$$

7. La sensibilité est une constante donc S = $\frac{\varDelta V1}{\varDelta R} = \frac{dV1}{dR}$

$$\frac{dV1}{dR} = e \times \frac{(R1+R)-R}{(R1+R)^2} = e \times \frac{R1}{(R1+R)^2} = \frac{\varDelta V1}{\varDelta R}$$

$$\varDelta V1 = \varDelta R \times e \times \frac{R1}{(R1+R)^2}$$

8. S = $\frac{\varDelta V1}{\varDelta R} = e \times \frac{R1}{(R1+R)^2} = e \times \frac{R1}{R1^2+2R0R1+R0^2} = e \times \frac{1}{R1+2R0+\frac{R0^2}{R1}}$

9. La sensibilité est maximale quand $R1 + 2R0 + \frac{R0^2}{R1}$ est minimale.

Soit $f(R_1) = R1 + 2R0 + \frac{R0^2}{R1}$

$$\frac{df(R_1)}{dR_1} = 1 - \frac{R_0^2}{R_1^2}$$

Donc il fait chercher la condition pour laquelle $1 - \frac{R_0^2}{R_1^2} = 0$

Finalement il faut que $R1 = R0$.

$$S_{MAx} = e \times \frac{1}{R1+2R0+\frac{R0^2}{R1}} = e \times \frac{1}{R0+2R0+R0} = e \times \frac{1}{4R0}$$