المحاضرة السادسة

تقويم العبارات المنطقية عن طريقة تحليل الأشجار

تمهيد :

المنطق الصوري المعاصر اختزل البرهان في الحساب المنطقي للقضايا و التحليل، و هذا الذي رأيناه إلى غاية هذه الصفحة، فطريقة الجداول الكلاسيكية منذ أن وضع (فريجة) أصولها كانت تبحث عن التوتولوجيا و الصيغ الأخرى كالعرض و التناقض. لكن بالرغم من أنّها كانت طريقة مضبوطة و فيها نوعا من اليقين، إلاّ أنّها صعبة أحيانا، عندما تكثر الذرات و الأعمدة و تتشابك الروابط و تزداد احتمالات الوقوع في الخطأ"[1] ففكر المناطقة في طريقة أخرى تقوم على افتراض حالة أو حالتين في ذرات معدودة و التسليم بقواعد الرابط ثم الاستنباط. فقد رأينا أنها طريقة تمكننا من تحديد صيغ العبارات المنطقية، لكن هل تعتبر طريقة تحليلية؟

إنّ الفحص الجيد لطريقة جداول المختصرات يتجلى منه طابع الإحصاء و يُندر في عملياته طابع التحليل، وهذا لا يليق عند استعماله لتحليل النصوص و المعارف التي تبسطها العلوم للتحقيق و هذا هدف كل علم. و السرعة و الدقة هي أسمى الأهداف .إذ انصب تفكير المناطقة على هذين الميزتين فجاءوا بطريقة جديدة تساعد على معرفة الصيغ و تحلل العبارات بطريقة أسرع و بجهد أقل و بدقة كبيرة، و تتغلّب على المتغيرات القضوية[2] ، إنّها طريقة التحليل الشجيري ، أو طريقة صدق الأشجار Method of truth trees. فما هي طريقة التحليل الشجيري و ما مراحل تحليل العبارة المنطقية و ما هي القواعد التي تضبط هذه الطريقة و ما قيمتها المنطقية و الفلسفية؟

- أولا : التعريف بطريقة التحليل الشجيري: هي طريقة تقويم منطقية تحليلية تتناول تقويم العبارات المركبة ، بحيث ينطلق من نفي العبارة المنطقية المراد تحليلها إذ يقتضي " التحليل بالنسبة إلى هذه الطريقة تحويل الرابط الرئيسي أولا ثمّ الروابط الثانوية الواردة في العبارة التي يطلب تحليلها بطريقة تنازلية إمّا إلى الوصل " ∧ " و إما إلى الفصل "

---

[1] - محمد محمد قاسم ، نظريات المنطق الرمزي، مرجع سابق ، ص 117

[2] - أسعد الجنابي، المنطق الرمزي المعاصر، مرجع سابق ، ص 230

$\vee$ " وفقا لقواعد التكافؤ بين الروابط. فنضع علامة x كلما وجدنا في الفرع تناقضا ولا نواصل فيه التحليل و ننتقل إلى فرع آخر فنعمل العمل الأول و نستمر حتى النهاية..

- **ثانيا : كيفية تحديد صيغة العبارة المنطقية[3] :**

إذا نتج عن تحليل العبارة ~ أ تناقض في جميع الفروع فنقول : إنّ كل فروع الشجرة مغلقة أي أنّها متناقضة ، و بما أنها ليست هي العبارة المطلوبة للتحليل ..وهي تناقض المغلقة فإنّ نقيض العبارة المتناقضة هي العبارة التكرارية (توتولوجيا) الصادقة في جميع الحالات. أمّا إذا كشف التحليل عن فروع العبارة ~ أ بأنّها كلها مفتوحة أي لا وجود لأي تناقض بين القضايا في أي فرع من الفروع ، فنقول : أن فروع الشجرة المفتوحة تدل على أن العبارة المحلّلة ~ أ خالية من التناقض. أي تكرارية و منه نستنتج بأنّ العبارة أ عبارة متناقضة . contradictory .

أمّا إذا أظهر التحليل للعبارة ~ أ ، أن بعض من فروعها مفتوحا و بعضا مغلقا فنقول : أن العبارة المنطقية عرضية ، و نقيض العرضية عرضية أ .[4]

هذا، و مادام المنطق الصوري المعاصر يرسم و يصوّر ولا يقرأ فقط فإنّه من الضروري عرض هذه الأشجار و فروعها معرفة تقنيات التفريع و التحليل ، فنتساءل عن مراحل هذا التحليل؟

- **ثالثا : خطوات طريقة الأشجار**

لخّص لنا الدكتور موساوي احمد – أستاذ المنطق بجامعة الجزائر – والدكتور (نجيب الحصادي) الخطوات الرئيسية المعتمدة في تحليل العبارات المنطقية عن طريق الأشجار و هي كما يلي:

1 – إدخال النفي على العبارة المنطقية التي يُطلب تحليلها، فإذا كنا بصدد تحليل العبارة " أ " أو أيّة عبارة أخرى يجب أن ننفيها أولا فنحوّلها إلى " ~ أ " ، وإذا كانت لدينا العبارة " ~ أ " و يطلب تحليلها فيجب أن نحوّلها إلى العبارة " ~~ أ " بحيث تصير " أ"

---

[3] - Marc Peeters . Sébastien Richard . Logique formelle . édition Mardaga Belgique 2009. p 54-55

[4] - أسعد الجنابي، المنطق الرمزي المعاصر ، ص 232 و ما بعدها ، و انظر أحمد موساوي، مدخل جديد للمنطق المعاصر ، ص 152 .

2 – تحويل الرابط الرئيسي الحاصل بعد عملية النفي إلى وصل أو فصل، إذا كان غير ذلك ، و إلاّ فتحذف الخطوة ثمّ تواصل العملية مع الروابط الثانوية الأخرى إلى نهاية التحليل.

3 – نبدأ التحليل برابط الوصل قبل رابط الفصل، لأن الوصل عمودي يساعد أمّا الفصل فمتفرع .

4 – إذا ظهر في نفس الفرع تناقض، أي وجود قضية و نفيها فنضع العلامة " x " في ذلك الفرع و لا نواصل فيه التحليل، بل ننتقل إلى فرع آخر ليس فيه تناقض. و هكذا ، كلما ظهر تناقض في فرع من الفروع الشجرة نضع العلامة السابقة و ننتقل إلى فرع آخر إلى نهاية التحليل.

5 – إذا انتهت عملية تحليل القضية المنفية إلى عدم وجود أي تناقض في أي فرع من فروع الشجرة فنقول : أنّ كل فروع الشجرة مفتوحة أي خالة من التناقض، و هذا يعني أن القضية الأصلية كاذبة في كل الحالات أي أنها متناقضة contradictory. أمّا إذا ظهر تناقض في بعض الفروع و لم يظهر في غيرها، كانت العبارة عرضية contingent." [5] .

– رابعا : قواعد الروابط المنطقية في الإثبات و النفي و تمثيلها الشجيري.

الدارس للمنطق الرمزي يستطيع أن يكتشف طابع الصورنة و التمثيل الحسي البصري في مجال اللغة المنطقية المصطنعة و أشكالها. لهذا نزولا عند شرط التفهيم نحاول أن نقدم لكل رابط منطقي قاعدته في النفي و الإثبات و الصورة أو الشكل الذي يُعبّر عنه في الشجرة بعد تحليل العبارة المنطقية :

أ – قاعدة النفي : الإثبات : ق هي ~~ ق

النفي : ~~ ق هي ق

نفي النفي (النفي المزدوج) هو إثبات، و هذه العلاقة نجدها أيضا في الرياضيات ، لكن المناطقة الحدنسانيين يرفضونها.

– قاعدة الوصل conjunction

– الإثبات : (ق ∧ ك) – النفي ~ (ق ∧ ك)

---

[5] - أحمد موساوي، مدخل جديد إلى المنطق المعاصر، ص 151-152 . و انظر ، نجيب الحصادي، أسس المنطق الرمزي مرجع سابق، ص 118-119- 120

ق
|
ك

~ ك ~ ق

Negation of conjunction

~ (ق ∧ ك) ≡ (~ ق ∨ ك)

- قاعدة الفصل : (ق ∨ ك)
- الإثبات

- النفي : ~ (ق ∨ ك)

|

~ ق

|

~ ك

negation disjonction

~ (ق ∨ ك) ≡ (~ ق ∧ ~ ك)

- قاعدة الشرط و الاستلزام conditional
- الإثبات : (ق ⊂ ك)

النفي : ~ (ق ⊂ ك)

|

ق

|

~ ك

(ق ⊂ ك) ≡ (~ ق ∨ ك) ≡ ~ (ق ∧ ~ ك)

~ (ق ⊂ ك) ≡ (ق ∧ ~ ك) ≡ ~ (~ ق ∨ ك)

- قاعدة التشارط (التكافؤ) Equivalence
- التشارط المثبت : (ق ≡ ك)

التشارط المنفي : ~ (ق ≡ ك)

ق ~ ق

| |

ك ~ ك

ق ~ ق

| |

ك ~ ك

بالتعريف : (ق ≡ ك) ≡ (ق ∧ ك) ∨ (~ ق ∧ ~ ك)

و ~ (ق ≡ ك) ≡ (ق ∧ ~ ك) ∨ (~ ق ∧ ك)

– **استنتاج** : هذه القواعد التي استعرضنا حالها في الإثبات و النفي ، و التحويلات التي تترتب عنها هي التي نعتمدها في تحليل الأشجار و تحديد صيغها، إذ إن الرابطين الوصل و الفصل هما أساسان للعملية، و لا ننتظر دائما العبارة المنطقية أن تأتي جاهزة متوفرة عليهما. و يتضح عملنا أكثر عند بسط الأمثلة النموذجية .

– **المثال الأوّل** :

حلل العبارة المنطقية التالية بواسطة طريقة الأشجار :

β = ((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) ⊂ (ق ≡ ك)

الخطوة الأولى نقوم بنفي β فنحصل على :

~ β = ((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) ∧ ~(ق ≡ ك)

بما أنّ الوصل ∧ في الطرف الثاني هو الرابط الرئيسي فستأخذ الشجرة الشكل التالي :

~ β = ((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) ∧ ~(ق ≡ ك)

|

((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) الطرف الأيمن من الرابط الرئيسي

|

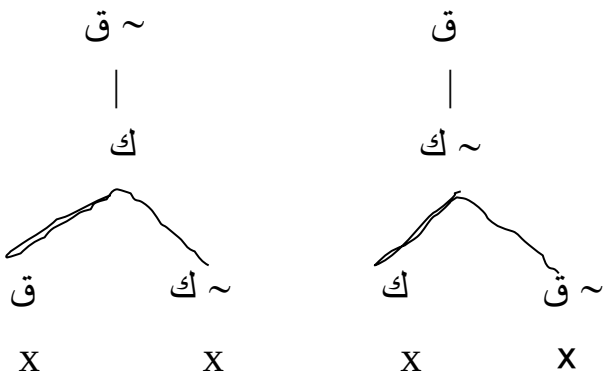
~(ق ≡ ك) الطرف الأيسر من الرابط الرئيسي (∧)

|

(ق ⊂ ك) الجزء الأول من الطرف الأول

|

(ك ⊂ ق) الجزء الثاني من الطرف الأول



نلاحظ أنّه بعد إدخال النفي على العبارة المنطقية β ، و صارت ~ β ، و لما كان الاستلزام ⊂ هو الرابط الرئيسي قبل إدخال النفي على العبارة ، تحول الرابط الرئيسي إلى وصل ∧ ، و اعتمدنا على قاعدة تحويل ~ ⊂ ، فنفينا التالي و أثبتنا المقدم فصارت العبارة

~ β = ((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) ∧ ~(ق ≡ ك)

وبعد ترتيب العبارات من اليسار إلى اليمين ، حللنا عبارة نفي التشارط ~(ق ≡ ك) إلى فرعين ، (وصلين منفصلين) حسب تعريف رابط نفي التشارط :

~(ق ≡ ك) ≡ (ق ∧ ~ ك) ∨ (~ ق ∧ ك)

بعدها حللنا عبارة المقدم أو الطرف الأوّل الذي يتألف من وصل بين استلزامين:

((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) الذين فرعناهما إلى فصلين حسب تعريف الاستلزام:

((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ق)) ≡ (~ ق ∨ ك) ∧ (~ ك ∨ ق)

بما أن كل الفروع مغلقة و بالتالي القضية ~ β متناقضة ، إذن فالقضية β تكرارية" [6].

– **المثال الثاني :**

قوّم العبارة المنطقية التالية بواسطة طريقة التحليل الصدقي الشجيري:

α = (~ ق ∨ ك) ≡ ~ (ق ∧ ~ ك)

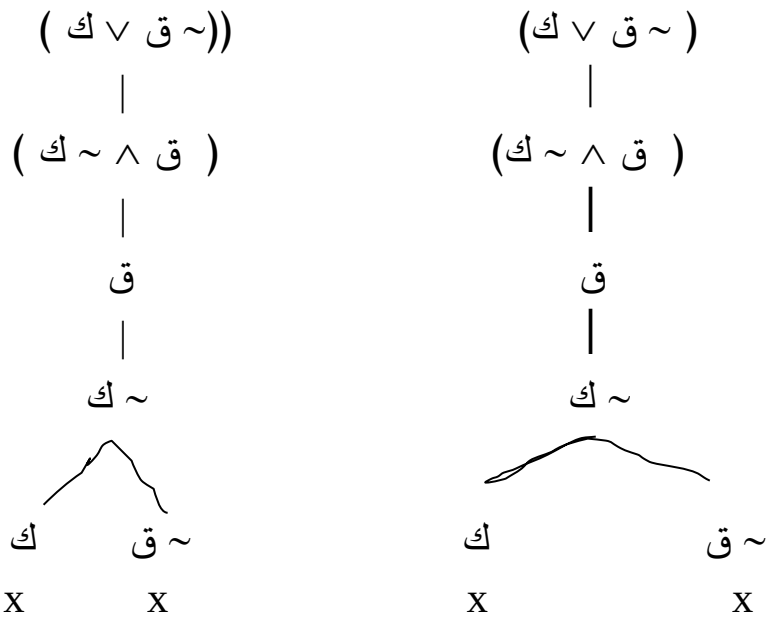
1/ ~ α = (~ ق ∨ ك) ≡ ~ (ق ∧ ~ ك)

= ~ ((~ ق ∨ ك) ≡ ~ (ق ∧ ~ ك))

= ((~ ق ∨ ك) ∧ ~~ (ق ∧ ~ ك)) ∨ ~((~ ق ∨ ك) ∨ (ق ∧ ~ ك)

= ((~ ق ∨ ك) ∧ (ق ∧ ~ ك)) ∨ ((~ ق ∨ ك) ∧ (ق ∧ ~ ك)

[6] - Marc Peeters ; Sébastien Richard . Logique formelle . édi Mardaga . p 56



بما أن كل فروع العبارة $\sim \alpha$ مغلقة فهي متناقضة ، إذن: العبارة α **تكرارية توتولوجيا**

- **المثال الثالث :**

قوم العبارة المنطقية التالية بطريقة أشجار الصدق، ثم ابرز صيغتها المنطقية.

π = ((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك)) ⊃ ((ق ∨ ل) ⊃ ك)

صورة هذه العبارة المنطقية تبيّن أن الرابط الرئيسي هو الاستلزام كم تدل على ذلك الأقواس. الطرف الأول : ((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك))

الطرف الثاني: ((ق ∨ ل) ⊃ ك)

1/ إدخال رابط النفي على كامل العبارة π

$\sim \pi$ = ((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك)) ⊃ ((ق ∨ ل) ⊃ ك)

= ((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك)) ∧ ~((ق ∨ ل) ⊃ ك)

= ((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك)) ∧ ((ق ∨ ل) ∧ ~ ك) نفي الاستلزام

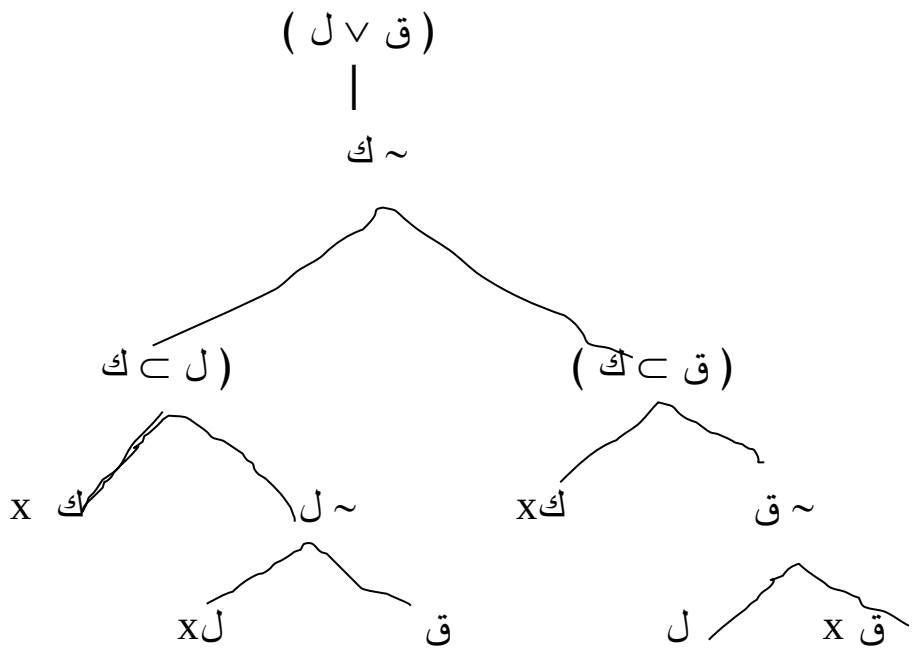
|

((ق ⊂ ك) ∨ (ل ⊂ ك))

|

((ق ∨ ل) ∧ ~ ك)

|



نلاحظ أن فروع الشجرة بعضها مغلق و بعضها مفتوح يعني أنّ العبارة ~ π **عرضية و منه نستخلص أن العبارة π عرضية لأن نقيض العرضية عرضية. Contingent**

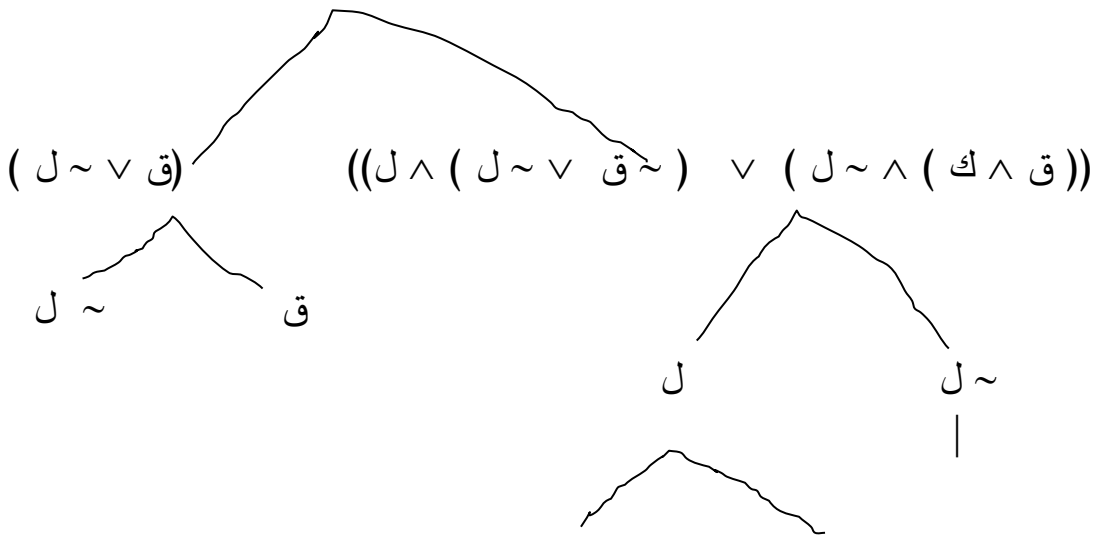
- **المثال الرابع :**

- **قوم** العبارة المنطقية التالية بطريقة أشجار الصدق، ثم ابرز صيغتها المنطقية.

أ = ((ق ∧ ك) ≡ ل) ∧ (~ ق ∧ ل) الرابط الرئيسي حسب الأقواس هو وصل

~ أ = ~ ((ق ∧ ك) ≡ ل) ∨ ~(~ ق ∧ ل)الرابط الرئيسي تحول إلى فصل

~ أ = (((ق ∧ ك) ∧ ~ ل) ∨ (~ ق ∨ ~ ل) ∧ ل)) ∨ (ق ∨ ~ ل))



ق

| ~ ق ~ ك

ك

نلاحظ أن شجرة الصدقي (~ أ) جميع فروعها جاءت مفتوحة و لم نعثر على أي تناقض بين قضيتين ، لهذا نقول أن العبارة (~ أ) تكرارية توتولوجية ، إذن نستنتج أن العبارة المطلوبة للتقويم (أ) **قضية متناقضة contradictory**

- تمارين تحصيلية :

قوّم العبارات التالية بطريقة التحليل الشجيري و حدد صيغتها المنطقية

أ = ((ق ∧ ك) ∨ (~ ق ∧ ل) ⊃ (ق ∨ ل)

ب = ((ق ⊃ ك) ∧ (~ ك ⊃ ~ ق)) ≡ (~ق ∨ ك)

ج = ((ق ∧ ك) ⊃ (ل ∨ م) ∨ ~ (ق ⊃ ك) ∧ ~(ل ⊃ م)

د = (ق ≡ (ق ∨ ق)

و = (ق ≡ ك) ≡ (ق ⊃ ك) ∧ (ك ⊃ ق)

ي = (ق ∨ ك) ∧ ~ (~ ق ⊃ ك)