المحاضرة الرابعة

تقويم العبارات المنطقية وحساب للقضايا

المبحث الأول: تقويم العبارات المنطقية عن طريق حساب جداول الصدق الكلاسيكية

تمهيد:

لقد تحدثنا في مبحث التطور التاريخي للمنطق الرمزي، و عرفنا أن المنطق انتقل من الاستنتاج إلى الاستنباط ثم استقرّ في الحساب المنطقي. " أين استعملت طريقة الجداول الصدقية لأوّل مرة مع فريجة و بيرس و شرويدر سنة 1880، و بعد سنة 1920 كان لها الأثر البالغ في المنطق الرياضي مع يانلوكازيفيتش و بوست Post و(لودفيدجنشطين) و اكتملت العملية مع كواين سنة 1940.[1] و الأصل كلّه يرجع إلى تحويل الاستدلال المنطقي القائم على اللغة الطبيعية إلى اللغة الرمزية ثم إلى الصورنة التي تتخذ من الحساب المنطقي أداة أمينة للحكم على العبارات المنطقية المركّبة.

ماذا نعني بالحساب المنطقي للقضايا، و ما هي مراحل انجاز جداول الصدق الكلاسيكية و كيف تتم عملية تقويم العبارات المنطقية؟

بعدما عرفنا أنّ المنطق المعاصر انبنى على اللغة الرمزية للتعبير عن القضايا و على الصورنة لحماية التفكير من الانزلاق، و بعد أن تجلّت لنا طبيعة الرموز التي تتألف من ثوابت و متغيرات. عرفنا أيضا، أن الوظيفة المنطقية للروابط المنطقية هي تكوين عبارات أكثر تركيبا..من قضية واحدة أو من عدة قضايا تتطلب عددا من الروابط و عددا من المتغيرات (للتعبير عن القضايا) الذي يسمى بالمجال أو المدى the scope connectives " و هو طول العبارة التي ينطبق عليها رابط منطقي معين داخل العبارة المركّبة"[2] لكن كيف نتجاوز هذا التركيب الذي يجعلنا أحيانا أمام التباس بين العبارات المتداخلة؟

مادام أنا المنطقي يعرف سبب الالتباس و الخلط لأوّل وهلة؛ فإنّه يمكن وضع حدّ لهذه المشكلة، و تجاوزها بالمنطق ذاته. كيف ذلك؟ إنّه لابد من التمييز بين الروابط الثانوية و

---

[1] - محمد مرسلي، المنطق الاستدلالي الرمزي، مرجع سابق، ص 35

[2] - أحمد موساوي، مدخل جديد الى المنطق المعاصر، مرجع سابق، ص 98

الرابط الرئيسي أولا، و لا يتأتى هذا إلاّ بالأقواس فمثلا في العبارة المنطقية التالية هل يمكن تحديد الروابط؟ " ق⊂ ل ∧ ~ ل ⊂ ~ق"

لهذا، صار تقويم العبارات المنطقية متوقفا على اتباع الخطوات التالية:

1 – حسب عدد المتغيرات المختلفة (الذرات) المذكورة في الدالة و نحدد ما هي تأليفاتها الممكنة للصدق و الكذب، إنهما إثنان بالنسبة لمتغير واحد (ق)، و أربعة 2^2 بالنسبة إلى متغيرين إثنين، (ق ، ك) و ثمانية بالنسبة إلى 3 متغيرات $2 \times 2 \times 2 = 8$.

باختصار نعرف عدد الذرات بتطبيق : 2 أس

2 – التعرف على طبيعة الأقواس ووضعيتها (الأقواس المفتوحة مثل (و الأقواس المغلقة مثل)

3– التعرف على الرابط الرئيسي و ترتيب الروابط الثانوية بحسب مداها. " ويسمى الرابط الرئيسي الرابط الذي له أطول مدى في عبارة ما . ويكون رابطا واحدا من بين روابط كثيرة ثانوية لها مدى أقل . مثال: (ق ⊂ك) ≡ (~ق ∨ ك) رابط التكافؤ هو الرابط الرئيسي أما رابطا ⊂، ∨، والرابط الأحادي ~ روابط ثانوية.

3– تقويم العبارات المركّبة بالتعبير عن المتغيرات بممكنات الصدق و الكذب و حساب الروابط الثانوية حسب القواعد ، و حساب العبارات انطلاقا من الرابط الرئيسي و تحديد الصيغة المنطقية التي تميّز العبارة المنطقية. و التي ستتضح لنا بعد الحساب المنطقي[3].

– مثال :

لنأخذ العبارة المنطقية التالية: (ق ⊂ك) ≡ (~ق ∨ ك)

قوم العبارة المنطقية عن طريق جداول الحساب الكلاسيكي للقضايا و بيّن صيغتها.

أولا: نحدد حالات الصدق و الكذب : لدينا قضيتين $2^2 = 4$

ثانيا: توزيع قيم الصدق و الكذب على "ق" و "ك" بحيث "ق" حالتين صدق و حالتين كذب

أما "ك" حالة صدق تليها حالة كذب حالة صدق تليها حالة كذب

ثالثا : توزيع قيم الصدق و الكذب حسب الجدول و الأعمدة الضرورية

[3] - أحمد موساوي، مدخل جديد الى المنطق المعاصر، ص 104-105

ق	ك	(ق ⊂ك)	≡	(~ق ∨ ك)
1	1	1 1		1 0
1	0	0 1		0 0
0	1	1 0		1 1
0	0	0 0		0 1

رابعا: تحديد الرابط الرئيسي للعبارة الذي له أطول مدى و هو ≡ أما ⊂ و ∨ فهما رابطان ثانويان.

خامسا: تقويم العبارة المنطقية وفقا لقاعدة كل رابط والحساب يبدأ من أقصر مدى إلى أطول مدى حتى نصل ألى الرابط الرئيسي الذي على أساسه تتحدد قيمة و العبارة و صيغتها.

ق	ك	(ق ⊂ك)	≡	(~ق ∨ ك)
1	1	1 1 1	1	1 1 0
1	0	0 0 1	1	0 0 0
0	1	1 1 0	1	1 1 1
0	0	1 1 0	1	0 1 1

كما نلاحظ على صورة الجدول إنّ خانة الرابط الرئيسي ≡، جاءت كلها صادقة 1، في كل الحالات التي كانت عليها ق و ك، وتسمى هذه الحالة الصادقة دوما في كل الأحوال الممكنة بصيغة " **العبارة التكرارية Tautology**،[4] أو (تحصيل حاصل) .و التكرارية هنا مرتبطة بتكرار الصدق و في هذه الحالة يعتبر قانون منطقي يتأكد من خلاله علمية المنطق، بل، هذه القوانين صارت قالبا لقوانين علمية هامة جدا ممكن تجدها في كتب تاريخ العلم المعاصر. لأن اليقين في القانون المنطقي أقوى درجة من القانون العلمي. و إليك أهم القوانين المنطقية[5]:

- **أ – قانون إثبات المقدم** : (((ق ⊂ ك) ∧ ق) ⊂ ك)
- ب – **قانون نفي التالي:** (((ق ⊂ ك) ∧ ~ ك) ⊂ ~ ق)
- جـ– **قانونا دي مورغان:** ~ (ق ∧ ك) ≡ (~ ق ∨ ~ ك)

~ (ق ∨ ك) ≡ (~ ق ∧ ~ ك)

–د– **قانون التجميع: ((ق ∨ ك) ∨ ل) ≡ (ق ∨(ك ∨ ل) ≡ (ق ∨ ك ∨ ل)**

---

[4] - Gerard CHazal. Eléments de Logique formelle. Editions Hermès Paris.1996. p 79

[5] - أحمد موساوي، المرجع نفسه، ص 119

- هـ- **قانون كلافيوس:** (~ ق ⊂ ق) ⊂ ق)

- ي- **قانون تعدي اللزوم:** ((ق ⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ل)) ⊂ (ق ⊂ ل)

لتحصيل هذه الطريقة نحاول تقويم العبارة المنطقية التالية:

(((ق ∨ ك) ∨ ل) ≡ ((ق ∨(ك ∨ ل))

لدينا ثلاث قضايا أو 3 ذرات، ق ، ك ، ل، يعني 2 ثلاث مرات و هي : 2x2 x2 = 8

المدى الطويل حسب الاقواس هو ≡ ، و الروابط الأخرى ثانوية متفاوتة المدى.

الجدول الكلاسيكي لحساب القضايا و تقويم عبارة:

(((ق ∨ ك) ∨ ل) ≡ ((ق ∨(ك ∨ ل))

ق	ك	ل	**((ق ∨ ك) ∨ ل)**	≡	**((ق ∨**	**(ك ∨ ل)**
1	1	1	1 1 1 1 1 1		1 1	1 1 1
1	1	0	1 0 1 1 1 1		1 1	0 1 1
1	0	1	1 1 1 0 1 1		1 1	1 1 0
1	0	0	1 0 1 0 1 1		1 1	0 0 0
0	1	1	1 1 1 1 1 0		1 0	1 1 1
0	1	0	1 0 1 1 1 0		1 0	0 1 1
0	0	1	1 1 1 0 0 0		1 0	1 1 0
0	0	0	1 0 0 0 0 0		0 0	0 0 0
				T ↓	↓	

نلحظ في هذا الجدول أنّه بعدما وزعنا قمية 1، 0، على الذرات و على الروابط الثانوية المتفاوتة المدى ربطنا قيم الفصل الثاني في العبارة الأولى، مع قيم الفصل الأول من العبارة الثانية، فوجدنا أنّ الطرفين يحققان التكافؤ ≡ و منه نستخلص: إنّ **العبارة تكرارية**

(((ق ∨ ك) ∨ ل) ≡ ((ق ∨(ك ∨ ل))

- مثال حول العبارة المتناقضة:

قوم العبارة المنطقية التالية و بين صيغتها عن طريق جدول الحساب الكلاسيكي.

أ = ((ق ∧ ك) ≡ ل) ∧ (~ ق ∧ ل)

- عبارة منطقية تتألف من 3 ذرات : ق، ك، ل. وبالتالي الحالات الممكنة 2x2 x2 = 8

ق	ك	ل	((ق ∧ ك) ≡ ل)	∧	(~ ق ∧ ل)
1	1	1	1 1 1 1 1	0	1 0 0
1	1	0	0 0 1 1 1	0	0 0 0
1	0	1	1 0 0 0 1	0	1 0 0
1	0	0	0 1 0 0 1	0	0 0 0
0	1	1	1 0 1 0 0	0	1 1 1
0	1	0	0 1 1 0 0	0	0 0 1
0	0	1	1 0 0 0 0	0	1 1 1
0	0	0	0 1 0 0 0	0	0 0 1
			*	⊥	*

إنّ الذي نلاحظه في هذا الجدول، هو وجود قيمة الكذب التي تكررت في جميع الحالات التي في خانة الرابط الرئيسي للعبارة المنطقية. و بالتالي **العبارة المنطقية متناقضة.**

- مثال حول القضية أو العبارة المتعارضة:

بالإضافة إلى الصيغ التكرارية و الصيغ المتناقضة، فإنّه يوجد نوع آخر من الصيغ ، وسمه المناطقة بالصيغة العرضية، و تكون صادقة من أجل بعض القيم الممكنة ، و كاذبة لبعض القيم الأخرى. الرابط الرئيسي خانته ميزاج بين 1 و 0.

قوم العبارة المنطقية التالية: (ق ∨ ك) ⊃ م)

في هذه العبارة ثلاث ذرات او قضايا: ق ، ك ، م . وبالتالي عدد الحالات الممكنة 08

وهناك رابطين: ∨، رابط ثانوي ⊃ رابط رئيسي

ق	ك	م	(ق ∨ ك)	⊃	م
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0

1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

*

نلاحظ أن خانة العمود الرئيسي في الجدول فيه: قيم 1، و قيم 0 و بالتالي العبارة عرضية.

- **أسئلة للفحص و التدريب:**

قوّم بواسطة جداول الصدق الكلاسيكية العبارات المنطقية التالية:

1/ (ق ∨ (ك ∧ ل) ≡ (ق ∨ ك) ∧ (ك ∨ ل)

2/ ق ⊂ (ك ⊂ ق)

3/~ (ق ∧ ك) ≡ (~ ق ∨ ~ ك)

4/ (ل ⊂ (ق ∨ ك)) ≡ (~ ق ⊂ (ك ∨ ل)

5/ ((ق⊂ ك) ∧ (ك ⊂ل) ⊂ (ق ⊂ ل)

~((ق ∧ ~ ك) ∧ ل) ∨ (م ⊂ ~ ك) ≡ ((~(ق ∧ ~ ك) ∨ ~ ل)) ∨(م∧ ~ق)

7/ ((ق⊂ ك) ∧ (ك ⊂ ل) ⊂ (~ق ∨ ل)

8/ (((ق⊂ ك) ∧ (ق ⊂ ~ ك) ⊂ ~ ق

9/ (ق w ك) ≡ ((ق ∧ ~ ك) ∨ (~ ق ∧ ك)