تمهيد:

الفضاء المتجهي أو الفضاء الشعاعي يعتبر عنصر اساسي في دراسة الجبر الخطي. هو مجموعة من عدة متجهات والتي يمكن إضافتها مع بعضها البعض وضربها بأعداد، التي يطلق عليهابالسلاميات. غالبا ما تكون السلميات عبارة عن أعدادا حقيقية، ولكن بالإمكان اختيار فضاءات شعاعية مع السلميات من أعداد مركبة . عمليتا جمع الاشعة وضرب شعاع ما في سلمية ينبغي لهما أن تحققا مجموعة من المتطلبات تدعى بالقانون الداخلي و اقانون الخارجي. سنتطرق الى كل هاتي المفاهيم بتفصيل في هذا الفصل .

الفصل الاول : الفضاءات الشعاعية (les Espaces Vectoriels)

1. تعريف الفضاء الشعاعي
2. التركيبات الخطية للاشعة
3. الاستقلال و الارتباط الخطي
4. لالساس و البعد

الهدف من هذا الدرس هو البرهان على ان مجموعة ما تشكل فضاء شعاعي جزئي (S.E.V) كيف نميز بين الفضاء الشعاعي الجزئي و الفضاء الشعاعي . وايضا كيفية التمييز بين الاشعة المستقلة و المرتبطة خطيا وفي الاخير سنتطرق الى اساس و بعد الفضاء الشعاعي.

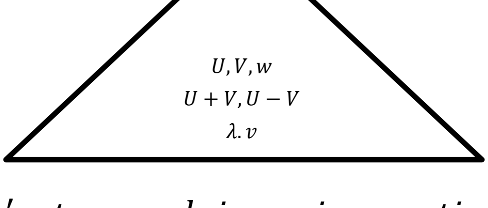
في هذا الفصل نرمز الى الجسم التبديلي بالرمز $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$

جسم تبديلي : هو شكل جبري من خااله يمكننا القيام بعملية الجمع $(+)$, الطرح $(-)$,و كذلك الضرب $(\cdot)$

بحيث $\langle \mathbb{K} = \mathbb{R}:$ (الحقيقية الاعداد) , $|\ \mathbb{C}:$ (المركبة الاعداد) $\rangle$

1. تعريف الفضاء الشعاعي (Espace Vectoriel)

هو مجموعة غير خالية يرمز لها با E تتكون من عناصر مجموعة العناصر التي تنتمي ل E تسمى لأشعة (les vecteurs)

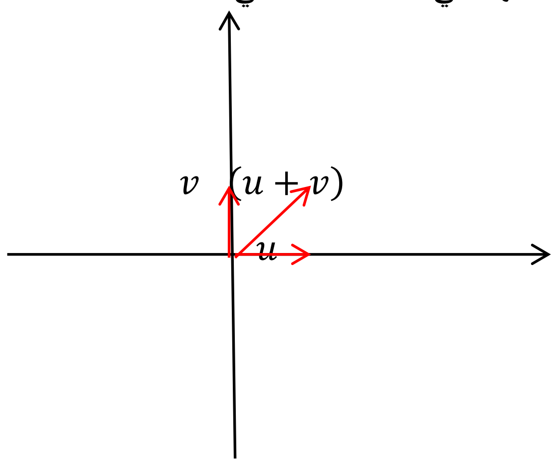


λ: $c'est\ un\ scalaire\ qui\ appartient$ à $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}: \langle \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \ \mathbb{Q}, \dots\dots \rangle$

ملاحظة :لايمكن ضرب او قسمة شعاعين ذو ابعاد مختلفة

التمثيل الهندسي للفضاء الشعاعي :

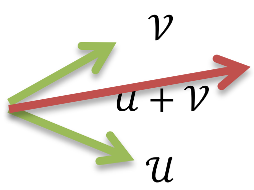


1.1. كيف نبرهن ان مجموعة ما تشكل فضاء شعاعي :

لدينا $(\mathbb{K},+,\cdot)$ مجموعة غير خالية مزودة بالقانون الداخلي يرمز له $(+)$ معناه التطبيق :

$$E \times E \to E$$

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U} + \mathcal{V}$$



$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y\,z)\,;\ (x',y',z');\ \ x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R}\,\}$$

$$(x,y\,z) + \ (x',y',z') = (x+x';y+y';z+z')$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1;x_2 \ldots \ldots \ldots \ldots .x_n)\,;\ (y_1;y_2 \ldots \ldots \ldots .y_n);\ \ x_i;\ y_i \in \mathbb{R}\,\}$$

$$(x_1;\ x_2; \ldots \ldots .x_n) + (y_1;y_2 \ldots \ldots \ldots y_n) = (x_1+y_1; \ldots x_n+y_n)$$

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1;z_2 \ldots \ldots \ldots \ldots .z_n)\,;\ (z_1';z_2' \ldots \ldots \ldots .z_n');\ \ z_i;\ z_i' \in \mathbb{C}\,\}$$

$$(z_1;z_2 \ldots \ldots \ldots \ldots .z_n)\ + (z_1';z_2' \ldots \ldots \ldots .z_n') = (z_1+z_1'; \ldots z_n+z_n')$$

$$\mathbb{R}_n[\![X]\!] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \ldots \ldots a_nx^n\}$$

$$\mathcal{P};\mathcal{Q} \in \ \mathbb{R}_n[\![X]\!] \ \ \mathcal{P}+\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_n[\![X]\!]$$

$$\mathscr{F}(X;\ \mathbb{R}) = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$$

$$f+g \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{S}_n = \{(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ;\ \mathbb{U}_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{V}_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbb{U}_n + \mathbb{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

و قانون خارجي يرمز له بالرمز (·) معناه التطبيق :

$$\mathbb{R} \times E \to E$$

$$\mu \times \mathcal{U} \to \mu\mathcal{U}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y\ z)\ ;\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\ \}$$

$$\mu(x, y, z) = (\mu.x, \mu y, \mu.z)$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2 \dots \dots \dots \dots x_n)\ ;\ \ x_i; \mu \in \mathbb{R}\ \}$$

$$\mu(x_1;\ x_2; \dots \dots x_n) = (\mu x_1;\ \mu x_2; \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \mu x_n)$$

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1; z_2 \dots \dots \dots \dots z_n)\ ;\ \ z_i;\ \mu \in \mathbb{C}\ \}$$

$$\mu(z_1; z_2 \dots \dots \dots \dots z_n)\ = (\mu z_1;\ \mu z_2; \dots \dots \dots \dots \dots \dots \mu z_n)$$

$$\mathbb{R}_n[\![X]\!] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \dots \dots a_n x^n\}$$

$$\mathcal{P} \in\ \mathbb{R}_n[\![X]\!];\ \mu \in \mathbb{R}\ \ \ \mu\mathcal{P} \in \mathbb{R}_n[\![X]\!]$$

$$\mathscr{F}(X;\ \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

$$\mu f \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{S}_n = \{(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}\quad ;\ \mathbb{U}_i;\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\mu(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mu\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ليكن E مجموعة , $E \neq \emptyset$ نقول ان E هو $\mathbb{K}$ - فضاء شعاعي اذا كان لدينا :

$$(+) E \times E \to E$$

$$(\mathcal{U}.;\ \mathcal{V}) \to \mathcal{U} + \mathcal{V}$$

$$(.)\ \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda;\ E) \to \lambda\mathcal{U}$$

نقول ان E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

القانون الداخلي $(+)$:

1. الخاصية التبديلية : $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V} + \mathcal{U},\ \ (\mathcal{U}, \mathcal{V}\ ) \in E$
2. الخاصية التجميعية : $(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W} = \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \qquad (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})\ \in E$
3. العنصر الحيادي بانسبة للجمع : $\mathcal{U} + 0_E = \mathcal{U}\ , \qquad \mathcal{U} \in E$
4. $\mathcal{U} + (-\mathcal{U}) = 0_E \qquad \mathcal{U} \in E$

القانون الخارجي $(.)$:

5. $\lambda(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = \lambda\mathcal{U} + \lambda\mathcal{V},\quad \lambda \in \mathbb{K}, (\mathcal{U},\mathcal{V}) \in E$
6. $(\lambda+\rho)\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U} + \rho\mathcal{U},\quad (\lambda,\rho) \in \mathbb{K}, \mathcal{U} \in E$
7. $\lambda(\rho\mathcal{U}) = (\lambda\rho)\mathcal{U},\quad (\lambda,\rho) \in \mathbb{K}, \mathcal{U} \in E$
8. $1.\mathcal{U} = \mathcal{U}$

ملاحضة:

- نسمي مجموعة العناصر التي تنتمي الي E $\big((\mathcal{U}) \in E\big)$, بالاشعة
- نسمي الاعداد الحقيقية او المركبة $\lambda \in \mathbb{K}$ بالسلاميات

2. مجموعة الفضاءات الشعاعية :

1. $(\mathbb{R}^2,\ +,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^2$
2. $(\mathbb{R}^3,\ +,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^3$
3. .
4. ..
5. ..
6. $(\mathbb{R}^n,\ +,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^n$

ملاحضة : للاجابة على السؤال هل المجموعة E تشكل فضاء شعاعي يكفي ان ناخذ مجموعة جزئية من E نبرهن ان فضاء شعاعي جزئي اذن يكفي ان نبرهن فقط على 3 خواص تالية :

3. الفضاء الشعاعي الجزئي :

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي E نقول ان F فضاء شعاعي جزئي اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset \quad (0_E \in \mathcal{F})$
2. $\forall(\mathcal{U},\mathcal{V}) \in \mathscr{F},\ (\mathcal{U}+\mathcal{V}) \in \mathscr{F}$
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}(\mathcal{U}) \in \mathscr{F},\ (\lambda\mathcal{U}) \in \mathscr{F}$

مثال :

المجموعة الجزئية من $\mathscr{F}$ من $\mathbb{R}^3$ المعرفة ب $\mathscr{F}$ $\quad \mathcal{F}: \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3\}$

ليست فضاء شعاعي جزئي لان $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0) \notin \mathcal{F}$

ملاحضة : كل فضاء شعاعي جزئي هو فضاء شعاعي اذن لاثبات ان مجموعة ما هيا فضاء شعاعي يكفي اثبات انها فضاء شعاعي جزئي ل فضاء شعاعي معروف

مثال :

ليكن $\mathcal{F}$ جزء من $\mathbb{R}^2$ معرف كما يلي : $\mathcal{F}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ (x + y = 0)$

اثبت ان $\mathcal{F}$ فضاء شعاعي جزئي

1. $(0) + (0) = 0 \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$

2. $\mathcal{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{F} \ \ \mathcal{V}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = (x + x') + (y + y') = x + y + x' + y' = 0$$

3. $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \mathcal{U} \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda\mathcal{U} \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \lambda\mathcal{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = 0$$

اذن فضاء$\mathcal{F}$ شعاعي جزئي

مثال 2 :

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z\ ) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y - z = 0\}$$

بين هل $\mathcal{A}$ فضاء شعاعي جزئي

مثال:

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad x^2 - z^2 = 0\right\}$$

1. هل $\mathcal{K}$ فضاء شعاعي جزئي ؟

الحل:

لكي نبرهن ان $\mathcal{K}$ ليس فضاء شعاعي جزئي يكفي ان نجد مثال مضاد لاي حقق شرط من الشروط الثلاثة المذكورة اعلاه اذن:

ناخذ شعاعيين $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ينتميان الى الفضاء $\mathcal{K}$ بحيث $x^2 - z^2 = 0$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \ \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نلاحض ان جمع الشعاعين $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ لا ينتميان الى الفضاء $\mathcal{K}$

وعليه $\mathcal{K}$ ليس فضاء شعاعي جزئي

مثال :

لدينا المجموعة التالية :

$$\mathscr{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \qquad f(1) = 0\}$$

هل $\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي ؟

الحل:

الدالة المعدومة :

.1

$$\begin{cases} x \to 0 \\ 1 \to 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \in \mathcal{F}$$

$f, g \in \mathcal{F}$ .2

$$f(1) = 0; \quad g(1) = 0$$

$$f + g = 0 = f(1) + g(1) = 0$$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{F}$ .3

$$f(\alpha.1) = \alpha f(1) = 0$$

النتيجة :

$\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي

4. الاسس و الابعاد :

تعريف :

نقول عن جملة اشعة $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\mathcal{V}_1}, \boldsymbol{\mathcal{V}_2}, \dots \dots \dots \dots . \boldsymbol{\mathcal{V}_p}\}$ مجموعة غير خالية من الفضاء الشعاعي E انها اساس ل فضاء الشعاعي E اذا وفقط اذا كانت $\mathcal{S}$:

- مستقلة
- و مولدة

$$\mathcal{S}\ \text{اساس} \Leftarrow \begin{cases} \mathcal{S}\ \text{خطيا مستقلا} \\ \wedge \\ \mathcal{S}\text{مولدة} \end{cases}$$

ملاحظة :

كي نبرهن ان جملة اشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ تشكل اساس ل $\mathbb{R}^p$

يكفي ان نبرهن انها جملة مستقلة او مولدة

او نبرهن ان $det(\mathcal{S}) \neq 0$

كل فضاء شعاعي يملك اساس

امثلة :

ان الجملة $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots \dots \dots \dots . \boldsymbol{e_n}\}$ حيث

$$e_1 = (1,0,0,0,,,,0), e_2 = (0,1,0 \dots \dots .0) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . e_n = (0,0,0,0 \dots . .1)$$

تسمى بالاساس القانوني ل R^n

الجملة $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ اساس ل $\mathbb{R}^2$

4.1. الاستقلال الخطي :

جملة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ مستقلة خطيا اذا وفقط اذا كان :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, . . \lambda_p \in \mathbb{R} \ \ / \ \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathcal{V}_p = 0 \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots . \lambda_p = 0.$$

ملاحظة :

اذا كانت جملة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ليست مستقلة خطيا $\Leftarrow$ اذا يمكننا القول ان الجملة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ مرتبطة خطيا

خواص الجمل المرتبطة:

لتكن جملة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ من الفضاء الشعاعي E^p عندئذ:

1. اذا كان احد عناصر هذه الجملة هو الشعاع الصفري 0_E اذن مرتبطة $\mathcal{S}$ خطيا
2. اذا كان في الجملة $\mathcal{S}$ شعاع مكرر اكثر من مرة فان الجملة $\mathcal{S}$ مرتبطة خطيا
3. اذا كانت الجملة $\mathcal{S}$ مرتبطة حطيا فان اي شعاع من هذه الجملة يكتب عن شكل تركيب خطي مع بقية العاصر او الاشعة الاخرى ل $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{U} = \boldsymbol{\lambda_1 \mathcal{V}_1 + \lambda_2 \mathcal{V}_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \lambda_p \mathcal{V}_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathcal{V}_p}$$

مثال :

بين ان $\{e_1(1,0);\ e_2(0,1)\}$ جملة مستقلة من $\mathbb{R}^2$

ليكن $_2$ و$_1$ **من** $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}}$

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = 0 \Leftarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1 = 0} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = 0} \end{cases}$$

مثال :

هل الاشعة $\{\mathcal{V}_1 = (1,\ 1);\ \mathcal{V}_2 = (2,\ 2)\}$ مستقلة خطيا

$\forall \lambda_1;\ \lambda_2 \in \mathbb{R};\ \ \lambda_1 \mathcal{V}_1 + \lambda_2 \mathcal{V}_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

اذن ليس بالضرورة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ و منه الجملة تقبل عدد غير منتهي من الحلول و منه الاشعة مرتبطة خطيا

مثال :

ادرس الاستقلال او الارتباط الخطي للأشعة التالية :

$$\{(1,0,0)\ (1,1\ 1\ )\ (-1,-2,-2)\}$$

4.2. **بعد فضاء شعاعي:**

ليكن E فضاء شعاعي نقول ان E منتهي البعد اذا و فقط اذا وجدة فيه جملة مولدة منتهيه

اذا كان $\mathcal{S}$ اساس ل E نسمي $n = card(\mathcal{S})$ بعد الفضاء الشعاعي E و نرمز له بالرمز

$$dim(E) = n$$

4.3. نظرية البعد :

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منتهي و $\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي

اذن $dim(\mathcal{F}) \leq dim(E)$

$dim(E) = dim(F) \iff E = F$

عبارة $(Grassmann)$ فيما يخص الابعاد :

اذا كان F و E فضائيين شعاعيين جزئيين من نفس الفضاء الشعاعي E ذو بعد منتهي اذن :

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

تطبيق :

لتكن E مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ معرفة كما يلي :

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; x - y + z = 0\}$$

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$
2. عين اساس و بعد E

ليكن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ معرفة كما يلي :

$$F = \langle (1,2,3); \; (2,4,6) \rangle$$

1. عين اساس F et F+E

الحل :

.1

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x - y + z = 0 \\ = \; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x = y - z \\ \left(\begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; y,z \in \mathbb{R} \right. \end{array} \right\}$$

$$E = vect\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E = vect\langle (\mathcal{V}_1;\ \mathcal{V}_2) \neq 0_{R^3} \rangle$$

$$dim(E) = 2$$

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \ .2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = vect\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$dim(F) = 1$$

$$E + F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$dim(E + F) \leq dim(\mathbb{R}^3)$$

اذن لالشعة الاربعة مرتبطة خطيا ندرس استقلالية ثلاثة اشعة اختيارية

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \lambda = 0 \Rightarrow -2\lambda + 3\lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \alpha + 0 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \ \alpha = -2\lambda \Rightarrow \alpha = 0 \\ 0 + \beta + 3\lambda = 0 \Rightarrow \ \beta = -3\lambda \Rightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = \lambda = 0$$

اذن $\boldsymbol{dim(E+F) = 3}$

4.4. بعض الخصائص :

1. $rang(\mathcal{S}) \leq p$
2. $rang(\mathcal{S}) = p \Leftarrow \mathcal{S}$ مستقلة خطيا

4.5. تقاطع فضائيين شعاعين جزئيين :

تقاطع فضائيين شعاعين جزئيين هو فضاء شعاعي جزئي لدينا $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ فضائين شعاعيين جزئيين

$\mathcal{F}_1$ تقاطع $\mathcal{F}_2$ يرمز له $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

مثال :

لدينا المجموعات التالية:

$$\mathscr{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x - y - z = 0\}$$

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 0\}$$

1. عين $\mathscr{F} \cap \mathcal{G}$

ملاحضة:

لا يمكن تقاطع فضايين شعاعيين جزئيين اذا كان ينتميان الى فضاءات شعاعية ذات ابعاد مختلفة

تطبيق :

ليكن $\mathcal{B} = \{(1, 0,1, 0), (0, 2,1, 1)\}$; $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$:

نفرض ان : $E_1 = [\mathcal{A}]$; $E_2 = [\mathcal{B}]$

عين $dim(E_1)$; $et\ dim(E_2)$

عين اساس $E_1 \cap E_2$

هل $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$

الحل :

$dimE_1 = 3$; $dimE_2 = 2$ لان لان الاشعة المشكلة ل $\mathscr{B}$ و $\mathcal{A}$ مستقلة خطيا

$$X \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow X \in E_1 \wedge X \in E_2 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \lambda, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$$

$$X = (\alpha, \alpha + \beta, \beta + \lambda, \lambda) \wedge X = (\gamma, 2\gamma, \gamma + \theta, \theta)$$

Donc

$$(\alpha, \alpha + \beta, \beta + \lambda, \lambda) = (\gamma, 2\gamma, \gamma + \theta, \theta) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = \theta$$

Alors

$$X = \alpha(1, 2, 2\ 1)\ \alpha \in \mathbb{R}, E_1 \cap E_2 = \mathcal{V} = (1, 2, 2, 1) \neq (0, 0, 0,0)$$

ومنه $\mathcal{V}$ يشكل اساس ل $E_1 \cap E_2$

$$\mathbb{R}^4 \neq E_1 \oplus E_2$$

لان $E_1 \cap E_2 \neq (0\ 0\ 0\ 0)$

كما ان

مثال :

ليكن Eفضاء شعاعي $\mathscr{F}$و$\mathcal{G}$ فضائين شعاعيين جزئيين

بين ان $\mathscr{F} \cap \mathcal{G}$ فضاء شعاعي جزئي

الحل :

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{F}, \mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{F}, car\ \mathcal{F}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{G}, \mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{G}, car\ \mathcal{G}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{F}, \lambda\mathcal{V} \in \mathcal{F}, car\ \mathcal{F}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{G}, \lambda\mathcal{V} \in \mathcal{G}, car\ \mathcal{G}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\lambda\mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$