Université de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

M1-Analyse Mathématiques et Applications
Semestre1-2021/2022
06 février 2022 Durée :1h

==

Correction de l'Examen Final - Topologie et Analyse Fonctionnelle

==

Exercice n°1(6 points (1.5+1.5+1+1+1)) :

1. Énoncer le Théorème de Baire :

Rép. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de fermés de X d'interieur vide. Alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide.

2. Énoncer le Théorème de Kakutani.

Rép. Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de E : $\quad B_E = \{x \in E;\ \ \|x\| \leq 1\}$
est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ (*i.e.* est faiblement compacte).

3. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

a) Dans un e.v.n. de dimension infinie la boule unité fermée est compacte pour la topologie forte.

Rép. Faux . Dans un e.v.n. de dimension **infinie** la boule unité fermée **n'est pas** compacte pour la topologie forte ; ou dans un e.v.n. de dimension **finie** la boule unité fermée est compacte pour la topologie forte.

b) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $*\sigma(E', E)$ alors elle converge pour $\sigma(E', E'')$.

Rép. Faux . Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\sigma(E', E''$ alors elle converge pour $*\sigma(E', E)$.

c) L'espace E' est séparable si et seulement si E est séparable.

Rép. Faux . Si l'espace E' est séparable alors E est séparable (la réciproque n'est pas vraie).

Exercice n°2 (4 points(2+2)) :

1. Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de E non dense. Montrer que :

   $\exists f \in E'$ tel que $F \subset Ker f.$

   Rép. Soit $x_0 \in E \backslash \overline{F}$. On applique le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrque) avec $A = \overline{F}$ (convexe fermé) et $B = \{x_0\}$ (convexe compact). Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E'$ tels que : $\forall x \in \overline{F},\ f(x) < \alpha < f(x_0)$. Par la suite : $f(\lambda x) < \alpha$, $\forall x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $f(x) = 0, \forall x \in F$. Mais $f \neq 0_{E'}$ car $f(x_0) > f(x), \forall x \in F$. Donc F est inclus dans l'hyperplan $\ker f$ $\ i.e.\ F \subset \ker f$.

2. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que :

   $U := \underset{n \geq 0}{\cap} U_n$ n'est pas un ensemble dénombrable.

Rép. Supposons que U est dénombrable infini (le cas où U est fini se traite de la même manière). Il existe alors une application bijective φ de $\mathbb{N}$ dans U..

Posons : $V_n = U_n - \{\varphi(n)\}$. Il est clair que V_n est encore un ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Baire nous assure que $\underset{n \geq 0}{\cap} V_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Mais d'autre part on a : $\underset{n \geq 0}{\cap} V_n = \underset{n \geq 0}{\cap} (U_n - \{\varphi(n)\}) = \underset{n \geq 0}{\cap} U_n - \underset{n \geq 0}{\cup} \{\varphi(n)\} = U - U = \emptyset$. Contradiction.

Exercice n°3 (4 points(1+1.5+1.5)) :

Soit E un espace de Banach réflexif et M un s.e.v. fermé.

1. Montrer que M est aussi fermé pour $\sigma(E, E')$.

   Rép. L'ensemble M est un convexe (car M est un s.e.v) fermé pour la topologie forte donc il est aussi fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

2. Montrer que B_M la boule unité fermée de M est compacte pour $\sigma(E, E')$.

   Rép. La boule unité fermée B_M de M n'est que : $B_M = M \cap B_E$ et B_E d'après le théorème de Kakutani est compacte pour $\sigma(E, E')$ car E est réflexif. Donc B_M est compacte pour $\sigma(E, E')$ (un fermé dans un compact est compact).

3. Déduire que M est réflexif.

Rép. Le s.e.v. M est un Banach (car il est fermé) et $\sigma(M, M')$ n'est que la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M. Comme B_M est compacte pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M, alors elle compacte pour $\sigma(M, M')$. En appliquant le théorème de Kakutani, on déduit que M est réflexif.

Exercice n°4 (6 points(1.5+1.5+2+1)) :

Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté $G(T)$) le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F,\ y = Tx\}.$$

1. Montrer que si T est continue alors $G(T)$ est fermé.

   Rép. Soit $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $G(T)$ qui converge vers $(x, y) \in E \times F$ i.e. $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$. Mais l'application T et continue, donc on obtient $Tx_n \to Tx$. De l'unicité de la limite on déduit que $y = Tx$, ce qui signifie que $(x, y) \in G(T)$.

2. On suppose maintenant que $G(T)$ est fermé et on munit $E \times F$ par la norme :

   $$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right).$$

   Soit l'application linéaire : $P : G(T) \to E$ avec $P(x, Tx) = x$.

   i) Montrer que P est une application bijective et continue.

   Rép. Montrer que P est bijective est équivalent à montrer que :

   $\forall x \in E, \exists!(x', y') \in G(T)$ tel que $P(x', y') = x$. Soit $x \in E$, comme $P(x', y') = x$ donne $x' = x$ on obtient que la solution **unique** de cette équation est $(x', y') = (x, Tx) \in G(T)$.

   L'application P est continue car :

   $$\|P(x, Tx)\|_E = \|x\|_E \leq \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right) = \|(x, y)\|_{E\times F}.$$

   ii) Déduire que l'application P^{-1} est continue.

   Rép. L'application $P : G(T) \to E$ est une application linéaire bijective et continue. L'espace E est un Banach et $G(T)$ aussi. Car $G(T)$ est un s.e.v. fermé dans l'espace complet $E \times F$.

Les hypothèse du théorème d'isomorphisme de Banach sont vérifiées, donc on déduit que $P^{-1} : E \to G(T)$ est continue.

iii) Conclure que l'application T est continue.

Rép. L'application T est continue, car pour tout $x \in E$, on a :

$$\|T(x)\|_F \leq \max\left(\|x\|_E, \|Tx\|_F\right) = \|(x, Tx)\|_{E\times F} = \|P^{-1}(x)\|_{E\times F} \leq C\,\|x\|_E$$

(car P^{-1} est continue).

(Le but de cet exercice est de montrer le théorème du graphe fermé)