Titre :

Les Espaces Réflexifs et Séparables

Par Leila Slimane

Janvier 2021

Table des matières

Chapitre 1

Espaces Réflexifs et Espaces Séparables

Les espaces réflexifs et les espaces séparables constituent des classes importantes des espaces de Banach ; ils possèdent des propriétés bien utiles.

1.1 Espaces réflexifs

On note J l'application définie par :

$$J: \begin{array}{l} E \to E'' \\ x \mapsto \xi_x \end{array}, \text{ où } \quad \xi_x : \begin{array}{l} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{array}.$$

Il est clair que l'application J est linéaire. De plus J est une isométrie (J conserve la norme) *i.e.* $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ car $\|J(x)\|_{E''} = \|\xi_x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Donc J est continue, *i.e.* $J \in \mathcal{L}(E, E'')$ et elle est bien injective, comme elle conserve la norme. Par contre, si E est de dimension infinie, J n'est pas nécessairement surjective. En général, $J(E)$ est un sous espace strict de E''. A l'aide de l'injection canonique J on peut identifier E à $J(E) \subset E''$. Dans le cas où J est surjective on dit que E est réfelxif.

Définition 1.1.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$ i.e. si J est surjective.*

Remarque 1.1.1 *C'est évident que les espaces de dimension finie sont réflexifs. En effet, on a $dimE = \dim E' = \dim E''$ et $\dim \ker J + \dim J(E) = \dim E''$, mais J est injective donc automatiquent J est surjective.*

Exemples

1) Tout espace de Hilbert est réflexif.

2) Pour $1 < p < +\infty$ l'espace $L^P(\Omega)$ est réflexif.

Lorsque E est réflexif, les espaces E et E'' sont identifiés implicitement à l'aide de l'isomotrie surjective (isomorphisme) J. On confond chaque $\varphi \in E''$ avec l'unique $x \in E$ tel que $\varphi = J(x) = \xi_x$.

Remarque 1.1.2 *La définition de la réflexivité dépend de l'isomorphisme J. Si on trouve que E et E''sont identifiés par un autre isomorphisme différent de J ça n'implique pas que E est réflexif.*

L'importance fondamentale de la réflexivité provient d'un résultat de compacité pour la topologie faible donné par Kakutani. Avant de présenter ce résultat et sa démonstration, nous aurons besoin des lemmes suivants, qu'on va les énoncés sans démonstration. Dans la suite, on note par B_E (resp. $B_{E''}$) la boule unité fermée de E (resp. de E'').

Lemme 1.1.1 *Le Banach E est réflexif si et seulement si $J(B_E) = B_{E''}$.*

Preuve. Voir exercice 1. ■

Lemme 1.1.2 ***(Helly)****Soient E un espace de Banach, $f_1, f_2, \cdots, f_n \in E'$ et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in B_E$ *tel que :* $|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon,\ \ \forall i = 1, \cdots, n.$

ii) $\forall \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$, *on a :* $\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'}.$

Lemme 1.1.3 ***(Goldstine)****Soit E un espace de Banach. Alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible étoile $*\sigma(E'', E')$.*

On présente maintenant le théorème de Kakutani, qui donne une caractérisation importantes des espaces réflexifs.

Théorème 1.1.1 ***(Kakutani)*** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de E :*

$$B_E = \{x \in E;\ \ \|x\| \leq 1\}$$

est compacte pour le topologie faible $\sigma(E, E')$ (i.e. est faiblement compacte).

Preuve. Montrons l'implication directe. Suposons que E est réflexif. D'après lemme 1.1.1 on a $J(B_E) = B_{E''}$ et il découle du théorème de Banach-Alaoglu que $B_{E''}$ est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E'', E')$. Mais J^{-1} est continue de $(E'', *\sigma(E'', E'))$ vers $(E, \sigma(E, E'))$ (voir exercice 4.2). Donc $B_E = J^{-1}(B_{E''})$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Réciproquement, supposons que B_E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Puisque $J : E \to E''$ est continue pour la topologie forte, elle est aussi continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(E'', \sigma(E'', E'''))$ (voir chapite 3). Mais $(E'', *\sigma(E'', E'))$ est moins fine que $(E'', \sigma(E'', E'''))$, alors J est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(E'', *\sigma(E'', E'))$. Il s'ensuit alors que $J(B_E)$ est compacte pour $*\sigma(E'', E')$ donc fermé. Mais le lemme de Goldstine assure que $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $*\sigma(E'', E')$. Donc $J(B_E) = B_{E''}$. Le lemme 1.1.1 assure que E est réflexif. ■

Présentons maintenant quelques propriétés des espaces réflexifs qui découle du théorème de Kakutani.

Corollaire 1.1.1 *Soit E un espace de Banach réflexif et $M \subset E$ un sous espace vectoriel fermé. Alors M muni de la norme de E est aussi un Banach réflexif.*

Preuve. Le s.e.v. M est un Banach et $\sigma(M, M')$ n'est que la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M (voir le chapitre précédent). De plus M est un convexe (car M est un s.e.v) fermé pour la topologie forte donc il est aussi fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. La boule unité fermée B_M de M n'est que : $B_M = M \cap B_E$ et B_E d'après le théorème de Kakutani est compacte pour $\sigma(E, E')$ car E est réflexif. Donc B_M est compacte pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M, alors pour $\sigma(M, M')$. En appliquant le théorème de Kakutani, on déduit que M est réflexif. ∎

Avant de donner un résultat qui relie la réflexivité de E avec celle de son dual, donnons le lemme suivant :

Lemme 1.1.4 *Soit E_1, E_2 deux Banach et $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ bijective. Alors E_1 est réflexif si et seulement si E_2 est réflexif.*

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si son dual E' est réflexif.*

Preuve. Supposons que E est réflexif. Alors la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$ coïncident. Par la suite le théorème de Banach Alooglu-Bourbaki assure que la boule unité fermée $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$. Il résulte qu'elle est aussi pour le topologie faible $\sigma(E', E'')$. Le théorème de Kakutani implique alors que E' est réflexif.

Réciproquement, supposons que E' est réflexif. D'après ce qui précède don dual E'' est réflexif. Mais $J(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E'' pour la topologie forte. Le corollaire 1.1.1 implique que $J(E)$ est réflexif. Enfin comme J est linéaire, continue et bijective de E sur $J(E)$, le lemme 1.1.4 assure la réflexivité de E. ∎

1.2 Espaces uniformément convexes

Dans cette section, on présente l'uniforme convexité, qui sera un outil explicite pour assurer la réflexivité.

Définition 1.2.1 *Un espace de Banach E est dit uniformément convexe si :*

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tels que :* $(x, y \in E, \|x\| < 1, \|y\| < 1$ *et* $\|x - y\| < \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right)$.

Exemple 1.2.1 *L'espace* $\mathbb{R}^n$ *muni de la norme euclidienne* $\|\cdot\|_2$ *est uniformément convexe. Par contre,* $\mathbb{R}^n$ *muni de* $\|\cdot\|_1$ *ou* $\|\cdot\|_\infty$ *ne l'est pas.*

Cet exemple affirme que l'uniforme convexité dépend de la norme choisie et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente.

Théorème 1.2.1 *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

1.3 Espaces séparables

Définition 1.3.1 *On dit que l'espace métrique* E *est séparable s'il possède une partie* $D \subset E$ *dénombrable et dense dans* E.

Exemples.

1. Les epaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x + iy, \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{C}$).
2. Tout espace normé de dimension finie est séparable : si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de E, l'ensemble dénombrable $D = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q}$ pour $i = 1, \ldots, n\}$ est dense dans E.
3. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables pour $1 \leq p < \infty$, par contre $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Proposition 1.3.1 *Soit* E *un espace métrique séparable et soit* A *une partie de* E*. Alors* A *est également séparable.*

Preuve. Si $D \subset E$ dénombrable et dense dans E, alors $D \cap A$ dénombrable et dense dans A. ■

Proposition 1.3.2 *Le produit d'une famille dénombrable d'espaces séparables est séparable.*

Preuve. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable des espaces métriques séparables et $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ l'espace produit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit D_n une partie dénombrable dense dans X_n. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un point de X, posons $A_p = \prod\limits_{n=0}^{p} D_n \times \prod\limits_{n=p+1}^{\infty} \{a_n\}$ pour $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble $A = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} A_p$ est alors dénombrable (comme le produit d'une famille finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable et la réunion d'une famille dénombrable d'ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable). De plus l'ensemble A est dense dans X, car tout ouvert élémentaire non vide sécrit : $\prod\limits_{n=0}^{p} \mathcal{O}_n \times \prod\limits_{n=p+1}^{\infty} X_n$, $\mathcal{O}_n$ ouvert de X_n et recontre A. Donc X est séparable. ■

Il découle de ce résultat que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont séparables.

Théorème 1.3.1 *Soit E un espace de Banach. Si son dual E' est séparable alors E est séparable aussi.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense dans E'. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in E$ fixé tel que $\|x_n\| = 1$ et $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{E'}$. Posons :

$$D = \left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

On note que D est dénombrable. Montrons maintenant que D est dense dans E. Comme D est dense dans le sous-espace vectoriel :

$$G = \left\{ \sum_{k\geq 1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\},$$

il suffit de vérifier que G est dense dans E. D'après le critère de densité donné par corollaire C???, il suffit de montrer que toute forme linéaire s'annulant sur G est nulle. Soit $f \in E'$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in G$. La densité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E implique que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : \|f - f_n\|_{E'} \leq \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Donc :

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq \tfrac{1}{2} \|f_n\|_{E'} = \tfrac{1}{2} \|f_n\|_{E'} \|x_n\|.$$

Alors :

$$\|f - f_n\|_{E'} \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{E'} \Rightarrow \|f_n\|_{E'} \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Par la suite :

$$\|f\|_{E'} \leq \|f - f_n\|_{E'} + \|f_n\|_{E'} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On déduit alors $\|f\|_{E'} = 0$ ce qui veut dire que $f = 0_{E'}$. ■

Remarque 1.3.1 *La réciproque n'est pas toujours vraie. La séparabilité de E n'implique pas nécessairement celle de E'. En effet l'epace $L^1(\Omega)$ est séparable mais son dual $L^\infty(\Omega)$ ne l'est pas.*

Dans le cas où E est séparable et réflexif, on a l'équivalence suivante :

Corollaire 1.3.1 *Soit E un Banach. Alors E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Preuve. i) On sait que si E' est réflexif alors E l'est aussi (voir théorème 1.1.2) et si E' est séparable alors théorème 1.3.1 assure que E l'est également.
ii) Montrons maintenant l'implication directe. Supposons que E est réflexif et séparable. Alors $E'' = J(E)$ est réflexif séparable car $E^{''}$ est identifié à E et donc d'après i) E' aussi.
■

Théorème 1.3.2 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors il existe une distance d définie sur $B_{E'}$ et telle que la topologie associée à d et la topologie induite par $*\sigma(E', E)$ sur $B_{E'}$ coïncident. On dit que la boule unité fermée $B_{E'}$ de E' est métrisable pour la topologie faible étoile.*

Remarque 1.3.2 *L'espace entier E' n'est jamais métrisable pour $*\sigma(E', E)$ sauf en dimension finie.*

Théorème 1.3.3 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Ce résultat se montre d'une manière analogue au théorème 1.3.2.

Le théorème 1.3.2, qui donne un résultat de métrisabilité de la topologie faible étoile sur les bornés, combiné au théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki donne le résultat suivant :

Corollaire 1.3.2 *Soit E' un Banach séparable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge pour la topologie $*\sigma(E', E)$.*

Le théorème suivant donne un résultat similaire dans le cas où E est réflexif.

Théorème 1.3.4 *Si E est un espace de Banach réflexif alors de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Preuve.

■

Remarque 1.3.3 *Rappelons que le théorème de Bolzano-Weiestrass affirme que si E est un espace métrique, alors E est compact si et seulement toute suite possède une sous-suite convergente.*

Théorème 1.3.5 *(d'Eberlein-Šmulian)Si K est une partie faiblement compacte dans un espace de Banach E, alors de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de K.*

On termine cette section, par donner un critère qui nous aide à identifier les espaces qui ne sont pas séparables.

Lemme 1.3.1 *Soit E un Banach. Supposons qu'il existe une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que :*

i) $\mathcal{O}_i \neq \emptyset, \quad i \in I,$

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \quad$ *si* $i \neq j$,

iii) *I n'est pas dénombrable.*

Alors E n'est pas séparable.

Preuve. Voir exercice 5. ■

1.4 Exercices

Exercise 1 *Montrer que : "Un Banach E est réflexif si et seulement si $J(B_E) = B_{E''}$ où B_E (resp. $B_{E''}$) est la boule unité fermée de E (resp. de E'')".*

Solution. On suppose que E est réflexif. Comme J est une isométrie (conserve la norme), on a : $J(B_E) \subset B_{E''}$. Soit maintenant $\xi \in B_{E''}$. Comme E est réflexif (J est surjectif), il existe $x \in E$ tel que $J(x) = \xi$, de plus $\|x\|_E = \|J(x)\|_{E''} = \|\xi\|_{E''} \leq 1$. Donc $x \in B_E$. Par la suite $B_{E''} \subset J(B_E)$, d'où $J(B_E) = B_{E''}$.
Reciproquement, supposons que $J(B_E) = B_{E''}$. Notons que $J(0_E) = 0_{E''}$. Soit maintenant $\xi \in E'' \setminus \{0_{E''}\}$. On a $\frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}} \in B_{E''}$, dons il existe $x \in E$ tel que $J(x) = \frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}}$. Comme J est linéaire on obtient : $J(\|\xi\|_{E''} x) = \xi$, i.e $J(E) = E''$. En conséquence E est réflexif.

Exercise 2 *Soit E un Banach réflexif. Montrer que J^{-1}, l'inverse de l'injection canonique J, est continue de $(E'', *\sigma(E'', E'))$ dans $(E, \sigma(E, E'))$.*

Solution. Comme E est réflexif, l'inverse $J^{-1} : (E'', *\sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E'))$ est bien défini. Soit U un ouvert de E pour $\sigma(E, E')$. On cherche à vérifier que $\left(J^{-1}\right)^{-1}(U) = J(U)$ est un ouvert de E'' pour la topologie $*\sigma(E'', E')$. Soit $x_0 \in U$. Il existe $f_1, \cdots, f_n \in E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$V = \{x \in E, \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \text{ pour } i = 1, \cdots n\} \subset U.$$

Par la définition de J, on a :

$$J(V) = \{\xi \in E'' \text{ tel que } \xi = J(x) \in E \text{ et } |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \text{ pour } i = 1, \cdots, n\}.$$

Mais $\xi(f_i) = f_i(x)$ si $\xi = J(x)$ donc :

$$J(V) = \{\xi \in E'' \text{ tel que } \ |\xi(f_i) - J(x_0)(f_i)| < \varepsilon, \text{ pour } i = 1, \cdots, n\}.$$

Alors $J(U)$ est bien un voisinage de $J(x_0)$ pour la topologie $*\sigma(E'', E')$. On déduit alors que J^{-1} est continue.

Exercise 3 *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ une partie convexe, fermée et bornée. Alors K est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Solution. Comme K est un ensemble convexe et fermé pour la topologie forte alors K est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. De plus K est borné, alors il existe une constante positive m telle que $K \subset mB_E$. Le théorème de Kakutani implique que mB_E est compacte pour $\sigma(E, E')$. Alors K est compact (car une partie fermée d'un compact est compacte).

Exercise 4 *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Supposons que E est réflexif. Montrer que $T(B_E)$ est un ensemble fermé de F où B_E est la boule unité fermée de E.*

Solution. Soit (x_n) une suite d'élément de B_E telle que $Tx_n \to y \in F$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci implique que $Tx_n \rightharpoonup y \in F$. Puisque E est réflexif, sa boule unité est faiblement compacte. Donc la suite (x_n) admet une sous-suite faiblement convergente : $x_{n_k} \rightharpoonup x \in F$ quand n_k tend vers $+\infty$ (voir théorème d'Eberlein-Šmulian). On constate que T est continue pour les topologies faibles car il est continue pour les topologies fortes. Donc $T(x_{n_k}) \rightharpoonup T(x) \in F$ quand n_k tend vers $+\infty$. L'unicité de la limite nous donne que $y = T(x) \in T(B_E)$. Alors $T(B_E)$ est fermé (fortement) dans F.

Exercise 5 *Soit E un Banach. Supposons qu'il existe une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ telle que :*

i) $\mathcal{O}_i \neq \emptyset, \quad i \in I,$

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \quad$ si $i \neq j$,

iii) I n'est pas dénombrable.

Solution. Montrons ce résultat par l'absurde. Supposons que E est séparable, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E. Alors pour chaque $i \in I$, il existe $n(i)$ tel que $x_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$, car $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de E. L'application $i \mapsto n(i)$ est injective, puisque si $n(i) = n(j)$, alors $x_{n(i)} = x_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ et donc $i = j$. On conclut alors que I est dénombrable, contradiction avec l'hypothèse ii).

Bibliographie

[1] Guy Auliac, Jeans-Yves Caby, Mathématiques Topologie et Analyse, Dunod, Paris, 2005.

[2] Haim Brezis, *Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson, 1987.

[3] Adel Chala, *Introduction à la Topologie, Cours et Exercices Résolus*, Université de Mohamaed Khider Biskra, 2018.

[4] Josette Charles, Mostafa Mbekhta, Hervé Queffélec : *Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs, Exercices Corrigés*, Dunod, Paris [redacted] 2010.

[5] L. Chwartz , *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, 1970.

[6] Hervé Queffelec, *Topologie Cours et Exercices Corrigés*, Dunod, Paris, 2012.

[7] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Appplications,* John Wiley & sons Inc., 1978.

[8] Daniel Li, *Cours d'Analyse Fonctionnelle avec 200 Exercices Corrigés,* Ellipses, 2013.

[9] Georges Skandalis, Topologie et Analyse 3ème année, Cours et exercices avec solutions, Dunod, Paris, 2001.