Université Djilali Bounaâma de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

L3 Mathématiques
Module : Géométrie différentielle

Chapitre 1 : Téorème d'inversion locale

1 Un peu de calcul différentiel :

Dans tout le cours, $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ sont des espaces vectoriels normés (e.v.n), U est un ouvert de E, V est un ouvert de F et $f : U \longrightarrow F$ est une application.

Définition 1 *Une application $f : U \longrightarrow F$ est différentiable au point $a \in U$ si et seulement, s'il existe une application linéaire et continue $L : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(||h||_E) \tag{1}$$

avec la notation o de landau, c'est-à-dire $o(||h||_E) = ||h||_E \xi(h)$ où ξ est une fonction définie au voisinage de 0 (sauf éventuellement en 0) et vérifiant : $\lim_{h \longrightarrow 0} \xi(h) = 0$.

Notation 1 *Si f est différentiable au point a, l'application L est appelée la différentielle de f en a et on la note par $d_a f$.*

Remarque 1

1. *L'égalité (1) est équivalente à l'égalité :*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\big|\big|f(a+h) - f(a) - L(h)\big|\big|_F}{||h||_E} = 0.$$

2. *Si E est de dimension finie alors toute application linéaire $L : E \longrightarrow F$ est continue ce qui évite d'avoir à utiliser les critères de continuité des applications linéaires dans la définition 1.*

3. *Si E et F sont de dimension finie, alors la différentiabilité de f et sa différentielle ne dépendent pas du choix des normes. Cette remarque est souvent utilisée dans la pratique pour simpliffier les calculs (en choisissant bien les normes avec lesquelles on travaille).*

Exemple 1 *Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = 1 + x\sqrt{2+y^2}.$$

Montrer que f est différentiable au point $(0,0)$.

f est différentiable au point $(0,0)$ si et seulement, s'il existe une application linéaire continue L de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f\big(0+h\big) = f\big(0\big) + L\big(h\big) + o(||h||).$$

avec $0 = (0,0)$ et $h = \big(h_1, h_2\big)$.
On a

$$\begin{aligned} f\big(h\big) &= 1 + h_1\sqrt{2+h_2^2} \\ &= f(0) + h_1\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h_2^2}{2}} \\ &= f(0) + h_1\sqrt{2}\Big(1+\frac{h_2^2}{4} + o\big(h_2^2\big)\Big) \\ &= f(0) + h_1\sqrt{2} + \frac{h_1h_2^2}{2\sqrt{2}} + o\big(h_2^2\big). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{h_1h_2^2}{2\sqrt{2}} + o\big(h_2^2\big) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0$$

car

$$||h||_\infty = \sup\{h_1, h_2\}$$
$$|h_1h_2^2| = |h_1||h_2^2| \leq ||h||_\infty^3.$$

On obtient donc

$$f(h) = f(0) + h_1\sqrt{2} + o\big(||h||\big).$$

En déduire que f est différentiable au point $(0,0)$ et $d_0f(h) = \sqrt{2}h_1$.

Définition 2

- *L'application $f\ : U \longrightarrow F$ est dite différentiable sur U si et seulement, si f est différentiable en tout point de U. On appelle alors application différentielle $Df : U \longrightarrow \mathscr{L}^c(E,F)$ définie par $Df(a) = d_af$.*

- *L'application f est dite de classe C^1 sur U si si et seulement, si f est différentiable sur U et Df est continue sur U.*

Remarque 2

1. *Si f est différentiable en a alors L est unique.*

2. *Si f est différentiable en a alors f est continue en a.*

3. *Si f est une application constante alors elle est de classe C^1 sur U et $Df \equiv 0$.*

4. *Si $L \in \mathscr{L}^c(E, F)$, alors L est de classe C^1 sur E et on a $DL \equiv L$.*

5. *Soient E, F, G trois e.v.n et U un ouvert de E. Si $f : U \longrightarrow F$ est différentiable en a et $g : f(U) \longrightarrow G$ est différentiable en $b = f(a)$ alors l'application composée $gof : U \longrightarrow G$ est différentiable en a et $d_a(gof) = d_b g \ o \ d_a f$.*

6. *Si f et g sont deux applications de U dans F différentiables en a alors pour tous scalaires λ et μ, l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g$.*

7. *Si $F = K$ (K est le corps), f et g sont deux applications de U dans F différentiables en a alors le produit $f \times g$ est différentiables en a et $d_a(f \times g) = f(a) d_a g + g(a) d_a f$.*

   - *Si $f(a) \neq 0$, l'inverse de f est différentiables en a et*
   $$d_a\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-d_a f}{[f(a)]^2}$$
   .
   - *Si $g(a) \neq 0$, le quotiant $\dfrac{f}{g}$ est différentiables en a et*
   $$d_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(a) d_a f - f(a) d_a g}{[g(a)]^2}$$
   .
   - *Une application $f : x \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_q(x))$ (à valeurs dans un produit de q e.v.n) est différentiables en un point a si et seulement, si chacune de ces composantes f_i (pour i de 1 à q) l'est également et $d_a f = (d_a f_1, d_a f_2, \cdots, d_a f_q)$.*
   - *Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$,*
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_p) \longmapsto \big(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_p), \cdots, f_q(x_1, x_2, \cdots, x_q)\big)$$
   la différentielle de f au point a s'il existe s'écrit sous forme matricielle
   $$d_a f(h) = J_f(a).h$$

où

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

est la matrice Jacobienne de f au point a. C'est une matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. $J_f(a)$ est la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

- *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en a, on appelle gradient de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $\nabla f(a)$ et défini par $\nabla f(a) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)$.*
- *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en a, alors on a $d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $\langle . \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.*
- *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point a alors*

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Définition 3 *Soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U. La différentielle de Df au point $a \in U$ (où $Df : U \longrightarrow \mathscr{L}^c(E, F)$ définie par $Df(a) = d_a f$), on notera $d_a^2 f$ et s'appelle la différentielle seconde (ou d'ordre deux) de f en a et on a*

$$d_{a+h} f = d_a f + d_a^2 f(h) + o\big(||h||_E\big)$$

De manière générale on définit la différentielle d'ordre k ($k \geq 1$) de f en a comme une application $k-$linéaires continues et on note par $d_a^k f$.

Définition 4 *L'application f est dite de classe C^k, ($k \geq 1$), sur U si si et seulement, si $d_a^k f$ existe sur U et est continue sur U.*

Remarque 3 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable* *en a. On appelle matrice Hessienne de f en a la matrice*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

et on a $d_a^2 f(h) = {}^t h.H_f(a).h$.

Théorème 1 ***(Accroissements finis)***
Soit $f : U \longrightarrow F$ une application et $(x, y) \in U$ un couple de points tel que $[x, y] \subset U$ (où $[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$). Si f est différentiable en tout point du segment $[x, y]$ alors on a

$$\left|\left|f(x) - f(y)\right|\right|_F \leq \sup_{z \in [x,y]} \left|\left|d_z f\right|\right|_F \times ||x - y||_E$$

Définition 5
- *Soit $f : U \longrightarrow F$ une application. On dit que f est lipshitzienne sur U si si et seulement, s'il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$\left|\left|f(x) - f(y)\right|\right|_F \leq c||x - y||_E$$
- *On dit que f est contractante sur U si et seulement, s'il existe une constante $c \in [0, 1[$ telle que f soit $c-$lipshitzienne.*
- *On dit que f est localement lipshitzienne sur U si et seulement, $\forall a \in U$ il existe $U_a \subset U$ un voisinage ouvert de a sur lequel f est lipshitzienne.*

2 C^k-difféomorphisme

Définition 6 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de classe C^k sur U (où un C^k-difféomorphisme si et seulement, si*

- *f est de classe C^k sur U.*
- *f est une bijection de U sur V.*
- *f^{-1} est de classe C^k sur V.*

Remarque 4 *Si $k = 1$, on dira difféomorphisme pour C^1-difféomorphisme.*

Exemple 2 *Montrer que l'application $\phi : (u, v) \longmapsto (u + v, u \times v)$ est un difféomorphisme sur $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$ vers un ouvert que l'on déterminera.*

Exemple 3 *Montrer que l'application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$définie par : $f(M) = M^2$ est de classe C^1 sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

Théorème 2 ***(d'inversion locale)***